Lastnosti jeder

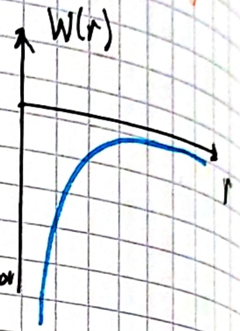
- masa
- porazdelitev gostote
- porazdelitev gostote naboja
- spin
- magnetni dipolni moment

Masa jedra

$$m(Z,A) = Z \cdot m_p + (A-Z)\,m_n + \frac{W}{c_0^2} \quad W < 0$$

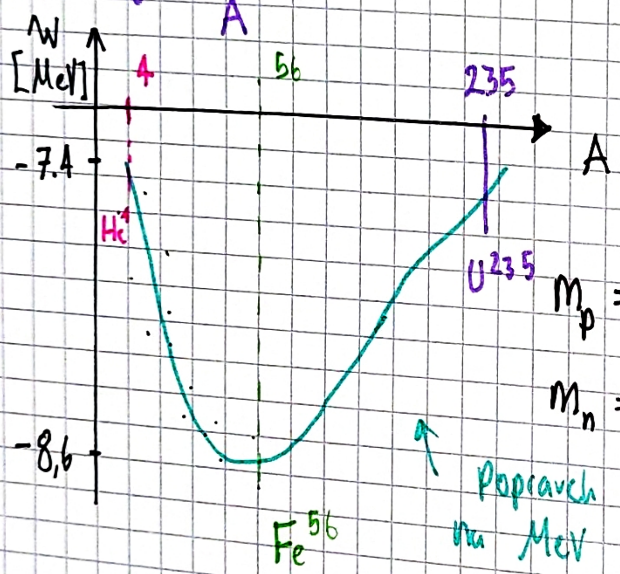
Vezavna energija

mora biti negativen
jedro je lažje od svojih gradnikov



· Specifična vezavna energija

$$W_0 = \frac{W}{A}$$



Popravek na MeV

Profesor se velikokrat drži načela $\hbar = c_0 = 1$

$$m_p = 0{,}93827\ldots \, GeV/c_0^2$$

$$m_n = 0{,}939565\ldots \, GeV/c_0^2$$

na skali GeV

$$W = W_0 = \frac{W}{A} \approx konst. \Leftarrow \frac{m(A,Z)}{A} \sim \underbrace{m_p + m_n}_{1\,GeV} + \frac{W}{c_0^2}$$

· Interakcija ~~potnega~~ dolgega dosega?

Interakcija bi morala biti $W \propto \frac{A(A-1)}{2}$ (vsak z vsakim).
Mi pri meritvi dobimo $W \propto A W_0$, torej da se nukleon "kopa" v svoji okolici. Torej so interakcije kratkega dosega.

Bethe - Weizsäcker / Kapljični model jeder

1) $W \simeq w_0$ konst $\left(\frac{W}{A}\right)$ $\quad -w_0 A$

2) $r \propto A^{1/3}$ $(V \propto A)$
Površina "kapljice" $\propto A^{2/3}$, kjer imamo šibkejše vezane nukleone $\quad +w_1 A^{2/3}$

3) Odboj protonov: $\sim \frac{Z^2 e_0^2}{r}$ $\quad +w_2 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$

4) Število protonov je $\simeq$ št. nevtronov $\quad +w_3 \frac{(2Z-A)^2}{A}$
$Z \simeq (A-Z)$

5) Preferirano je $Z, (A-Z)$ soda $\downarrow\uparrow$ $\quad +w_4 \frac{\delta(A,Z)}{A^{3/4}}$
(kvantni nivoji v jedru)

$w_0 = 15{,}6$ MeV
$w_1 = 17{,}2$ MeV
$w_2 = 0{,}7$ MeV
$w_3 = 23{,}2$ MeV
$w_4 = 12$ MeV

$$\delta(A,Z) = \begin{cases} -1 & \text{sodo sodo} \\ 0 & \text{sodo liho} \\ 1 & \text{liho liho} \end{cases}$$
(št. prot. / št. n)

Od lihih lihih jeder poznamo samo 4: ${}^2_1H$, ${}^{10}_5B$, ${}^6_3Li$, ${}^{14}_7N$

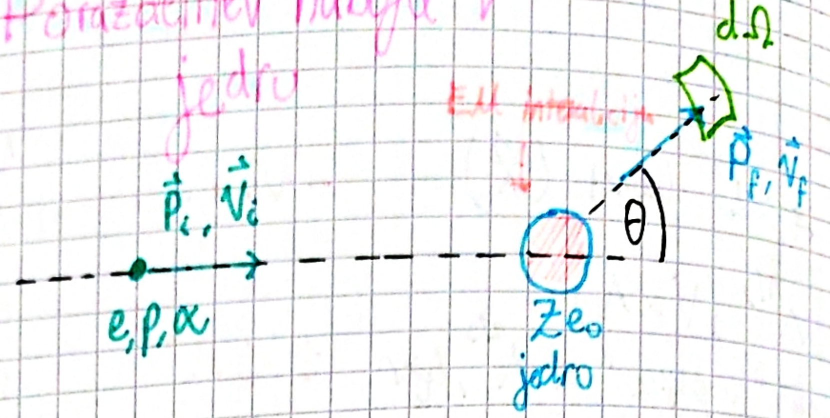
"Magična" jedra:

Formula močneje odstopa, ker so ta jedra močno vezana

$$\left.\begin{array}{l} p: Z \\ n: N = (A-Z) \end{array}\right\} 2, 8, 20, 28, 50, \dots$$

Porazdelitev naboja v jedru

Eksperiment:
[Sipanje / Scattering]



$$d\Omega = d\varphi \sin\theta d\theta$$
$\downarrow$ rotacijska simetrija
$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$$

Izhodišče celotne zadeve je Fermijevo zlato pravilo

$\Psi_i \to \Psi_f$
$$W_{f \leftarrow i} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho_f(E_i)$$
$\downarrow$
Verjetnost za prehod na časovno enoto $\left(\frac{1}{\tau}, \lambda, \frac{\Gamma}{\hbar}, \dots\right)$

V_{fi} - matrični element: $\langle \Psi_f | \hat{H}' | \Psi_i \rangle$

$\rho_f(E_i)$ - Gostota končnih stanj kot f. energije

Izpeljava Fermijevega zlatega pravila

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$$
↳ Motnja / interakcija
"Nemoteno življenje"

Časovno evolucijo podaja SE:
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$
$$|\vec{\Psi}_i\rangle \to |\vec{\Psi}_f\rangle$$
$$\underline{\underline{S}}\,(t \in [-\infty, +\infty])$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\vec{\Psi}(t)\rangle = \hat{H} |\hat{\Psi}(t)\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}\, dt}}_{\underbrace{\underline{U}(t=0,t)}_{S}} |\Psi(t=0)\rangle$$

Problem poskusimo rešiti perturbativno. Naj bo motnja majhna, da je originalna baza še vedno dobra:

$$H_0|n\rangle = E_n|n\rangle \qquad \langle k|n\rangle = \delta_{kn}$$

↳ Ortogonalna baza

Razvijemo stanje po bazi:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t)\, e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle$$

$$P_n(t) = |a_n(t)|^2$$

Ta nastavek vstavimo v SE:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n a_n(t) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |n\rangle = (H_0 + H') \sum_n a_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle \Big/ \cdot \langle k| e^{i\frac{E_k}{\hbar}}$$

$$\downarrow$$

$$i\hbar \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} = \sum_n \underbrace{\langle k|H'|n\rangle}_{\text{Interakcija / Pichard mat stanj:}} a_n(t)\, e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \cdot e^{i\frac{E_k t}{\hbar}}$$

Če je interakcija trivialna $H'=0$ dobimo kar identiteto $a_n = \delta_{kn}$. Za netrivialno pa:

$$a_k(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_n \int_0^t \langle k|H'|n\rangle\, a_n(t)\, e^{i\frac{t'(E_k - E_n)}{\hbar}}\, dt'$$

↑ Novi približek ↑ Stari približek

To iterativno reševanje je Picardova iteracija!

Začetni približek: Začetno stanje naj bo lastno $i = n$

$$a_i(t=0) = 1$$

$$a_{k\neq i}(t=0) = 0$$

Samo en člen vsote (pointegriramo)

$$\Rightarrow \quad a_k(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle k|H'|i\rangle \cdot 1\left(e^{\frac{it(E_k-E_i)}{\hbar}}-1\right)\frac{\hbar}{i(E_k-E_i)}$$

$$|a_k(t)|^2$$

$$e^{ix}-1 = e^{i\frac{x}{2}}\,\frac{e^{\frac{ix}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}\cdot 2i = e^{i\frac{x}{2}}\,2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$|a_k(t)|^2 = |\langle k|H'|i\rangle|^2 \cdot 4\sin^2\left(\frac{(E_k-E_i)t}{2\hbar}\right)\frac{1}{(E_k-E_i)^2}$$

Končna stanja so lahko diskreten nabor:

$$\sum_{k=f}|a_k(t)|^2 = P_f(t)$$

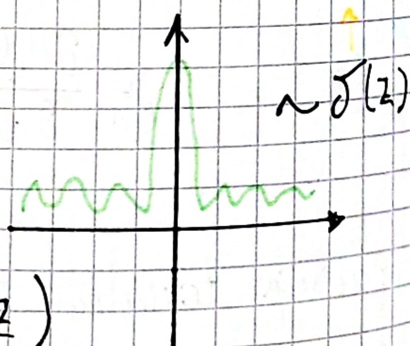
ali pa zvezna končna stanja

$E_f = E_i$ Elastično sip

$$P_f(t) = 4\int \underbrace{\rho(E_f)\,dE_f}_{\text{končna stanja}}\ \overbrace{|\langle f|H'|i\rangle|^2}^{|V_{fi}|^2}\ \sin^2\left(\frac{t}{2\hbar}(E_f-E_i)\right)\frac{1}{(E_f-E_i)^2}$$

Velja:

$$\int \frac{\sin^2(\alpha z)}{z^2}\,dz = \pi\alpha$$



$$\Rightarrow \pi\alpha\,\delta(z)$$

Kjer je pri nas:

$$\alpha = \frac{t}{2\hbar} \qquad \underbrace{z = E_f - E_i}\ ; \quad dz = dE_f$$

$$z = 0 \Leftrightarrow E_f \to E_i$$

$$P_f(t) = 4|V_{fi}|^2 \rho(E_i) \frac{\pi t}{2\hbar}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = w_{fi} \quad \Rightarrow \quad W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

To bi radi predelali v nekaj kar ima veze z Rutherfordovo sipanje.

Gostota končnih stanj

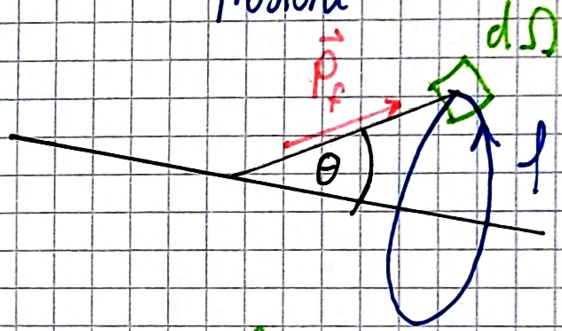
Nerelativistično

$$dN_f = \frac{d^3r\, d^3p}{h^3} = V_N \frac{d^3p}{h^3}$$

Normiran volumen

$$d^3p = p^2\, dp\, d\Omega$$

Sferične koordinate v p prostoru



Gostota energijskih stanj je tako:

$$d\rho_f(E_f) = \frac{dN_f}{dE_f}$$

V našem primeru $p \Rightarrow p_f$

$$d\rho_f(E_f) = \frac{dN_f}{dE_f} = \frac{V}{h^3} \frac{p_f^2\, dp_f\, d\Omega}{dE_f} \quad ; \quad E_f = \frac{p_f^2}{2m}, \quad dE_f = \frac{p_f\, dp_f}{m}$$

$$\downarrow$$

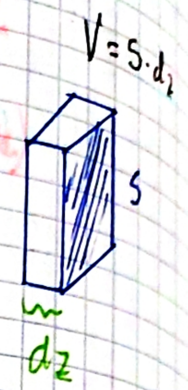
$$\frac{d\rho_f(E_f)}{d\Omega} = \frac{V_N}{h^3} p_f m = V_N \frac{m p_f}{(2\pi\hbar)^3}$$

- Za elastično nerelativistično sipanje: $p_f = p_i = m v_i$, $E_f = E_i$

$$\Rightarrow \frac{d\rho_f(E_i)}{d\Omega} = V_N \frac{m^2 v_i}{(2\pi\hbar)^3}$$

Merljiva količina pri sipanju (sipalni presek)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}$$ } Diferencialni sipalni presek po prostorskem kotu (Ubistvu predstavlja verjetnost za dogodek)



$N_t = n_t \cdot V$

Iz starega:

absorpcija $\{ dN_f = \frac{\sigma}{S_0} N_i N_t = N_i n_t \sigma dz = -dN_t$

št. tarč

št. izstrelkov

št. trkov

Bolj moderno:

$$\frac{dN_f}{dt} = L \cdot \sigma$$

Presek: barn $[b = 10^{-28} m^2 = 100 fm^2]$

Luminoznost: Lastnost eksperimenta (npr. žarek v pospeševalniku) $[b^{-1} s^{-1}]$

(časovno) integrirana Luminoznost / integrated luminosity

$L_{int}, \int L dt \quad [b^{-1}]$

št. dogodkov

$$N_f = L_{int} \cdot \sigma$$

Npr. v ~~LHC~~ LHC $L_{int} = \cancel{10}\,140 fb^{-1}$

So: $dN_f = N_i n_t \sigma dz$ v času t.

$n_t \rightarrow \frac{N_t}{V}$

$N_i \hookrightarrow$ je št

$$\Rightarrow \frac{dN_f}{d\Omega} = N_i n_t \frac{d\sigma}{d\Omega} dz$$

~~Tako~~ Verjetnost na časovno enoto po definiciji:

$$W_{fi} = \frac{dW_f}{N_t \cdot t}$$

To združimo skupaj v:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\frac{dW_{fi}}{d\Omega}}{j_i}$$

Matični element V_{fi}

$$V_{fi} = \int_{V_N} \Psi_f^*(\vec{r})\, V(\vec{r})\, \Psi_i(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

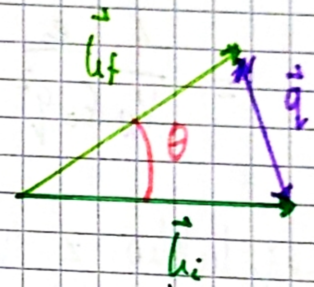
$\hookrightarrow H' = V$ (EM interakcija)

Ravni valovi med sabo interagirajo:

$$\Psi_i = \frac{1}{\sqrt{V_N}} e^{i\vec{k}_i\vec{r}} \;;\; \vec{k}_i = \frac{\vec{p}_i}{\hbar} \Bigg\} \; \rho_i = |\Psi_i|^2 = \frac{1}{V_N}$$

gostota izstrelkov

$$\Psi_f = \frac{1}{\sqrt{V_N}} e^{i\vec{k}_f\vec{r}} \;;\; \vec{k}_f = \frac{\vec{p}_f}{\hbar}$$



$$V_{fi} = \frac{1}{V_N}\int_{V_N} e^{-i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}\, d^3\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{V_N}\int_{V_N} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\, d^3\vec{r} =$$

$\vec{q} = \vec{k}_i - \vec{k}_f$

$|\vec{k}_i| = |\vec{k}_f|$

$q = 2k_i \sin\frac{\theta}{2}$

Zapišimo potencial kot: $V(\vec{r}) = \overset{\substack{\text{Naboj} \\ \text{izstrelka} \\ \uparrow}}{e}\, \underbrace{U(\vec{r})}_{\text{Em. potencial tarče}}$

Uporabimo Greenovo formulo:

$$\int_V [u\nabla^2 v - v\nabla^2 u]\, d^3r = \oint_{\partial V} [u\vec{\nabla} v - v\vec{\nabla} u]\cdot d\vec{S}$$

Kjer pri nas vzamemo: $u = e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$, $v = e\,U(\vec{r})$. Uporabimo še

$$\nabla^2 U(\vec{r}) = -\frac{\rho_e(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Tarča (jedro)} = \int_V \rho_e(\vec{r})\, d^3r = Ze_0$$

Vemo gotovo še $U(\vec{r})$ in $\nabla(U(\vec{r})) = -\vec{E}$ greška $\to 0$ za $r \to \infty$.

Rešimo sedaj levo in desno stran Greenove formule:

$$\Rightarrow \int_{V_N} (-q^2) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \underbrace{(eU)}_{V} d^3r - e\int_{V_N} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \nabla^2 U(\vec{r}) d^3r = 0$$

Desna stran 0 zaradi padanja V_i 0 $\to$ 0 ko $r \to \infty$.

$$\Rightarrow V_{fi} = \frac{1}{V_N}\int_{V_N} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(\vec{r}) d^3r = \frac{e}{\varepsilon_0 q^2}\frac{1}{V_N}\underbrace{\int_{V_N} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \rho_e(\vec{r}) d^3r}_{} =$$

$$= \frac{1}{V_N}\frac{e}{\varepsilon_0 q^2} F(\vec{q})$$

Uvazi "FT" $\Rightarrow F(\vec{q})$ Oblikovni faktor/ form factor

$F(q)^2$

Sedaj lahko z vsem tem poskusimo izraziti naš diferencialni presek:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dW_{fi}/d\Omega}{\underbrace{\rho_i v_i}_{j_i}} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{fi}|^2 \frac{d\rho_f}{d\Omega} \frac{1 \cdot V_N}{N_i} =$$

$$\rho_i = \frac{1}{V_N}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar}|V_{fi}|^2 V_N \frac{m^2 \cancel{v_i}}{(2\pi\hbar)^3}\frac{V_N}{\cancel{v_i}} =$$

$$\Rightarrow = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{fi}|^2 V_N^2 \frac{m^2}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{2\pi}{\hbar}\left[\frac{me}{\varepsilon_0 q^2}\right]\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}|F(q)|^2 \frac{\cancel{V_N^2}}{\cancel{V_N^2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar}\left[\frac{me}{\varepsilon_0 q^2}\right]\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}|F(\vec{q})|^2$$

Za Rutherfordovo sipanje pa smo pri modfiz2 dobili:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{\left[\frac{m e}{8\pi\varepsilon_0\hbar^2}\right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}}_{\sim \text{Rutherford}} \underbrace{|F(q)|^2}_{\text{Približek}} \leftarrow$$

Večja kot je energija bolj lahko otipamo notranjo strukturi

↓

ekvivalent kot velikost svetlobe z λ

de Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$\lambda >> R$ jedra $\quad \rho_e(\vec{r}) = Z e_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Da lahko gledamo strukturo jedra $\lambda \sim R \Rightarrow \rho_e(\vec{r}) \neq \delta$

Temu se reče "Deep" scattering (Elastic/Inelastic)

Jedrski razpadi

Razpad α:

$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + \underbrace{^{4}_{2}He}_{\text{Spin } 0}$$

Kinematika:

$$T_\alpha + T_y = (m_x - m_y - m_\alpha) c_0^2$$

$\Rightarrow T_\alpha \geq 0$: Po semiempirični masni formuli je to možno $A \gtrsim 150$.

Eksperiment pa pokaže, da je to slab račun in da mora biti $A > 200$ (npr. $^{207}_{82}Pb$).

Eksperimentalni "fit" na podatke:

Geiger-Nuttall law:

$\tau \in [10^{-10}s, 10^{9}s]$

20 redov velikosti

ampak je ta "fit" kar dober

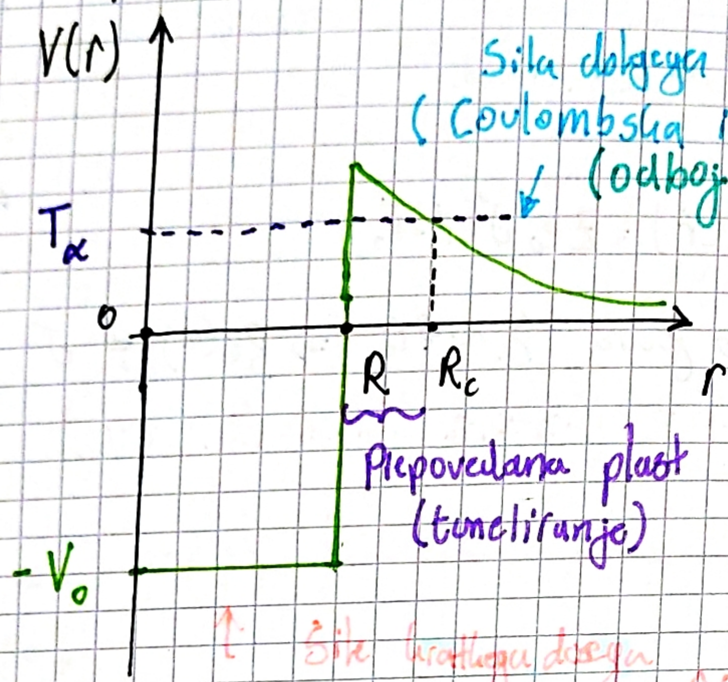
$$\left.\begin{matrix} \log t_{1/2} \\ \log \tau \\ -\log \lambda \end{matrix}\right\} = \frac{c_1 \cdot \overset{\text{Včasih}}{Z}}{\sqrt{T_\alpha}} + c_2 \sim \frac{1}{\sqrt{T_\alpha}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

Model tuneliranja (razpad jeder s tuneliranjem delca α)

Ta model precej dobro opiše rezultat Geiger-Nuttallovega zakona

Imamo potencial približno:



$V_c(r) = \frac{Z_\alpha Z_y e_0^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Vrh pri $V_c(R)$

Sila dolgega dosega (Coulombska interakcija) (odboj)

$R = R_\alpha + R_y$

Prepovedana plast (tuneliranje)

$R \sim 10\,\mathrm{fm}$

$T_\alpha \sim 5\text{-}10\,\mathrm{MeV}$

Sile kratkega dosega (npr. močna sila) $\sim$ konst.
(privlak)

Delec je prost, ko je $r > R_c$: $T_\alpha = \frac{e_0^2 Z_\alpha Z_y}{4\pi\varepsilon_0 R_c}$

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = P_T \cdot \nu$$ verjetnost za tuneliranje

Potrebujemo frekvenco zadevanja ob barijero:

hitrost (iz T_α)

$$\nu = \frac{v_\alpha}{R}$$

$$t_0 = \frac{R}{v_\alpha}$$ tudi se najde $t_0 = \frac{2R}{v_\alpha}$ natančno.

Večinoma se ta model ne izide! Morali bi uporabiti lupinski model. Okoli magičnega števila $N_n = 126$, $A \sim 200$, če gremo do 126 imamo še dva nevtrona, ki sta izven vseh lupin (šibko vezana). Če dodamo še dva šibko vezana p^+, dobimo močno vezan α delec.

$$\Rightarrow \Delta E \rightarrow T_\alpha$$

Slika tuneliranja

Vzamemo kar preproste ovire (barriere)

μ ... red. masa

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{m_Y}$$

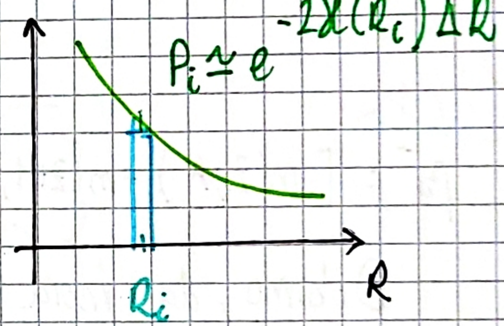
Prepustnost:

$$P_i = \left[\frac{4k\chi}{k^2+\chi^2}\right]^2 e^{-2\chi\Delta R}$$

$$k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} T_\alpha \qquad \chi^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V_c(R) - T_\alpha\right)$$

Če postane ~~tanka~~ bariera tako kot "rezina"

$$\frac{\Delta R}{R} \ll 1$$



Celotna prepustnost je potem produkt vseh verjetnosti:

$$P_T = \prod_i P_i = \exp\left(\sum_i \left(-2\chi(R_i)\Delta R\right)\right)$$

$$P_T = e^{-2G} \quad ; \quad \text{Gamow factor } G$$

$$G = \int_R^{R_c} \chi(r)\,dr = \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(V_c(r) - T_\alpha\right)}\,dr$$

$$\rightsquigarrow G \sim \frac{1}{\sqrt{T_\alpha}} \cdot Z \quad ; \quad R \ll R_c \text{ (debela bariera)}$$

To je to, kar nam potrdi Geiger-Nuttallovo pravilo.

Razpadi β:

Sorry ker je vse neonslo
Ana

β^-: ${}^A_Z X \to {}^{\;\;A}_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e$

OZ.

$n^0 \to p^+ e^- \bar{\nu}_e$ (mogoča za prost n^0 $\tau = 880\,s$)

Manjkajoča P, E

β^+: ${}^A_Z X \to {}^{\;\;A}_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e$ ⇒ Posledica je, da dobimo zvezni spekter dN/p_e, dN/E_e ...

OZ.

Merljivi $T_Y, T_e, P_Y, P_e, \ldots$

$p^+ \to n^0 e^+ \nu_e$ (za prost p^+ $\tau > 10^{36}$ let)

Hypothetical: $p^+ \to \pi^0 e^+ \to \gamma\gamma e^+$ → To se še ni zgodilo (da bi detektirali)

čerenkov v vodi

Kinematika:

$$\beta^-: [m(Z,A) - m(Z+1,A) - m_e]c_0^2 \geq 0$$

Dobimo, da mora biti razlika vezavnih energij

$$|W(Z+1,A)| - |W(Z,A)| \geq -0{,}78\ MeV$$

$$\beta^+: |W(Z-1,A)| - |W(Z,A)| \geq 1{,}79\ MeV$$

Verjetnost za razpad na časovno enoto:

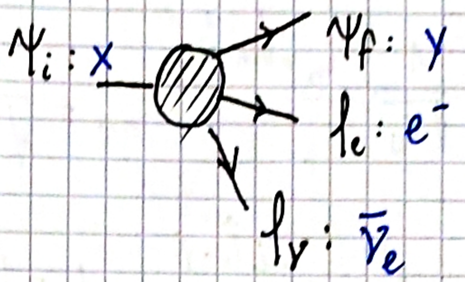
$$W_{f\leftarrow i} = \begin{matrix}\lambda\\ \text{ali}\\ 1/\tau\end{matrix} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{fi}|^2 \rho_f(E_i)$$

Fermijevo zlato pravilo

Fermi predpostavi:

$$V_{fi} = G_F \int_{V_N} \psi_p^* \varphi_e^* \varphi_\nu^* \psi_i \, d^3r$$

$$V_{fi} = \langle \Psi_f \phi_e \phi_\nu | \hat{H}_{int} | \Psi_i \rangle$$



Splošen izraz

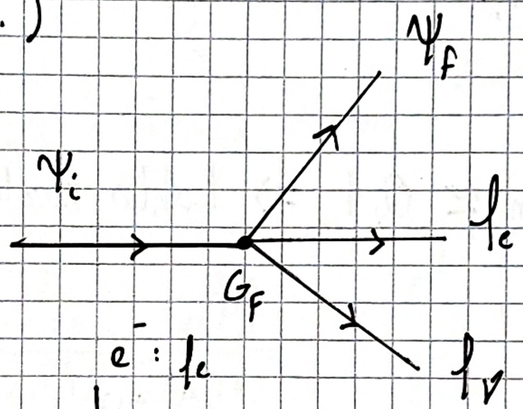
$$V_{fi} = \int \Psi_f^* \phi_e^* \phi_\nu^* \hat{H}_{int} \Psi_i \, d^3 r$$

Torej vidimo, da je Fermi predpostavil: $\hat{H}_{int} = G_F$ - Sklopitvena konstanta (šibka, Fermijeva)

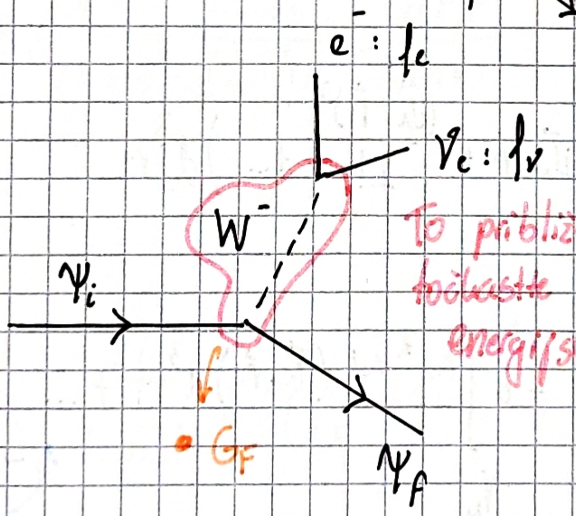
Temu se reče "point-like interaction" (Yukawa terms)

To da se VF samo zmožijo pomeni, da imamo samo tri "kroglic" (nič ni vmes izsevanih γ ipd.)

"Feynmannov diagram"



Bolj točno:



To približamo z točko. Približek točkaste interakcije je dobra nizko energijska limita.

Včasih v literaturi:

$$\hat{H}_{int} = G_F \cdot \hat{\tau}$$

operator spreminja $n \leftrightarrow p$ (izospin)

Vzemimo $e, \nu \rightarrow \phi_e, \phi_\nu$ so ravni valovi (so prosti)

Ker drugače ne znamo vzamemo nerelativistično QM in relativistična kinetika

"Fineish"

Torej:

$$\psi_e = \frac{1}{\sqrt{V_N}} e^{i\vec{k}_e\cdot\vec{r}} \qquad \psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V_N}} e^{i\vec{k}_\nu\cdot\vec{r}} \qquad k_e = \frac{\sqrt{E_e^2 - m_e^2 c_0^4}}{\hbar c_0} = \frac{p_e}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \psi_e^* \psi_\nu^* = \frac{1}{V_N} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad \underbrace{k}_{\text{Sistem}} = \vec{k}_e + \vec{k}_\nu$$

(oz. to ravno opisuje tisti Bozon W, o tem kasneje)

$\hbar c_0 = 197 \text{ eV nm} = 197 \text{ MeV fm}$

$$V_{fi} = G_F \frac{1}{V_N} \int_{V_N} \psi_f^* \psi_i e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r$$

Naredimo multipolni razvoj eksponenta !

Ocena skale problema ?

$k \cdot r < 1$

G.K. $\rightarrow \frac{1 \text{ MeV}}{197 \text{ MeV fm}} \underbrace{10 \text{ fm}}_{r \simeq R} \simeq 0{,}1 \Rightarrow$ Lahko naredimo multipolni razvoj

Torej:

$$V_{fi} = \frac{G_F}{V_N} \int_{V_N} \psi_f^* \psi_i \left(1 - i\vec{k}\cdot\vec{r} + \frac{(i\vec{k}\cdot\vec{r})^2}{2!} + \dots\right) d^3r$$

$$= \frac{G_F}{V_N} \Big[\underbrace{\int_{V_N} \psi_f^* \psi_i d^3r}_{\substack{\text{Ni odvisnosti od } \vec{k}\cdot\vec{r} \\ \text{če je } \neq 0 \text{ imamo} \\ \text{dovoljeni razpad}}} - \underbrace{i \int_{V_N} \psi_f^* \psi_i (\vec{k}\cdot\vec{r}) d^3r}_{\substack{\text{če prvi člen ničelen in tale} \\ \neq 0 \text{ imamo:} \\ \text{enkrat prepovedan (once forbidden)} \\ \text{razpad}}} + \dots \Big]$$

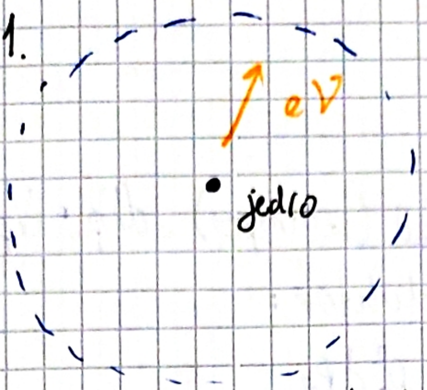
... dvakrat prepovedan →...

Pokaže se, da členi:

$\frac{(\vec{k}\cdot\vec{r})^l}{l!} \rightarrow l = 0, 1, 2, 3$

Ustrezajo izsevanju para $e\nu$ z vrtilno (obhodna) količino $\Gamma = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. $Y_{lm}(\theta, \phi)$ za "par"

To pomeni, da je dovoljeni razpad izotropen $Y_{lm} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, ostali členi pa ustrezajo $l \geq 1$.



$$Y_{00} \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Integralni prispevki so skoraj konstantni (neodvisni od $E_e, E_\nu, \ldots$). Bistven prispevek je prispevek faznega prostora. $\rho_f(E_i)$!

npr. dovoljeni $l = 0$ razpad.

$$V_{fi} = \frac{G_F}{V_N} M_{fi} \; ; \quad M_{fi} = \int \psi_f^* \psi_i \, d^3r = \underbrace{\int \psi_f^* \tau \psi_i \, d^3r}_{\text{Včasih v literaturi}}$$

Sedaj nam manjka le še prispevek faznega prostora.

Splošno: Fazni prostor N delcev v končnem stanju

$$\int \frac{d^3p_1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi\hbar)^3} \cdots \frac{d^3p_N}{(2\pi\hbar)^3} \, \delta^{(3)}\Big(\underbrace{\vec{p}}_{\text{začetni}} - \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\Big) =$$

Ohranitev gibalne količine

Torej delci niso čisto "neodvisni" med seboj

$$= \int \frac{d^3p_1}{(2\pi\hbar)^3} \cdots \frac{d^3p_N}{(2\pi\hbar)^3} \, \delta^{(3)}\Big(\vec{p}_N - \big(\vec{p} - \sum_{i=1}^{N-1} \vec{p}_i\big)\Big) =$$

enega delca smo se znebili

$$= \int \frac{d^3p_1}{(2\pi\hbar)^3} \cdots \frac{d^3p_{N-1}}{(2\pi\hbar)^3}$$

To če sta 2 delca pomeni, da si en res poljubno izbere G.K., drugi pa pristane v točno določeni točki faznega prostora z verjetnostjo 1

Naš primer: N= 3

$$\int \frac{d^3 p_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi\hbar)^3}$$

OZ. Bolj točno za dovoljeni razpad (izotropni) $dN_f = V_f^2 \frac{d^3 p_e \, d^3 p_\nu}{(2\pi\hbar)^6}$

Predpostavimo izotropnost vseh produktov:

$$dN_f = V_F^2 \frac{(4\pi)^2 p_e^2 \, dp_e \, p_\nu^2 \, dp_\nu}{(2\pi\hbar)^6}$$

izotropno $\iint d\Omega_e \, d\Omega_\nu$ nimamo kotne odvisnosti

Dodamo sedaj še ohranitev energije:

$$E_i = m(Z,A)c_0^2 = E_f = m(Z-1,A)c_0^2 + \overbrace{E_e + E_\nu}^{E}$$

razpoložljiva energija $\Delta m c_0^2$

$$\left.\begin{aligned} dE_i &= dE_f = dE \\ E_e^2 &= p_e^2 c_0^2 + m_e^2 c_0^4 \\ E_\nu &= p_\nu c_0 \quad ; \quad m_\nu \simeq 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} p_\nu &= \frac{E - E_e}{c_0} \\ dp_\nu &= \frac{dE}{c_0} \end{aligned}$$

Torej:

$$dN_f \sim p_e^2 \, dp_e (E - E_e)^2 \, dE$$

$$d\rho(E) = \frac{dN_f}{dE} \sim p_e^2 \, dp_e (E - E_e)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dp_e}(E) \sim \underline{p_e^2 (E - E_e)^2}$$

Merljivo

To nam da zvezni spekter

Oz. točneje:

$$\frac{d\rho}{dp_e} = \frac{16\pi^2 V_F^2}{(2\pi\hbar)^6 c_0^3} p_e^2 (E-E_e)^2$$

To lahko končno damo v Fermijevo zlato pravilo (za $l=0$)

$$\frac{d\lambda}{dp_e} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{G_F^2 |M_{fi}|^2}{\hbar^7 c_0^4} p_e^2 (E-E_e)^2 \xrightarrow{\int dp_e} \lambda \propto E^5$$

Velikokrat se to zapiše brezdimenzijsko $W = \frac{E_e}{m_e c_0^2}$ $\quad p = \frac{p_e}{m_e c_0^2}$

$\Rightarrow p = \sqrt{W^2 - 1}$

$W_0 = E / m_e c_0^2$

$$\Rightarrow \frac{d\lambda}{dp} = \frac{1}{2\pi^3} G_F^2 |M_{fi}|^2 \frac{m_e^5 c_0^4}{\hbar^7} p^2 (W_0 - W)^2$$

$\parallel$

$N(p)$ - zgodovinska oznaka

(št. dogodkov pri p na enoto časa)

Lahko tudi reparametriziramo v energijo:

$$\Rightarrow \frac{d\lambda}{dW} = \frac{1}{2\pi^3} G_F^2 |M_{fi}|^2 \frac{m_e^5 c_0^4}{\hbar^7} pW (W_0 - W)^2$$

Običajno rišemo:

Energija na voljo

$$\left[\frac{N(p)}{p^2}\right]^{1/2} \propto W_0 - W \propto E_0 - E$$

$\downarrow$

Fermi-Kurie graf

$\downarrow$

ne Curie

Dodajo se Fermi faktor $F(Z,P)$. V bistvu je to popravek zaradi Coulombskih sil (Coulomb correction).

$\hookrightarrow G_F^2 \to G_F^2 F(Z,P)$

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi^3} G_F |M_{fi}|^2 \frac{m_e^5 c_0^4}{\hbar^7} F(Z,P)$$

Običajno rišejo v bistvu, a popravek zamolčijo

$$\left[\frac{N(p)}{p^2 F(Z,p)}\right]^{1/2} \propto (W_0 - W) \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{\Gamma}{\hbar}$$

razpadna širina

Korekcija

Izbirna pravila za β razpade:

Sledijo iz tega, da se mora vrtilna količina jeder se ohranjat.

$$\hat{\vec{J}}_i = \hat{\vec{J}}_f + \hat{\vec{J}}_{(e\nu)}$$

Sistem eν

$$\vec{J}_{e\nu} = \vec{l} + \vec{S}_{e\nu}$$

obhodni del

Spinski del

$S_e = \frac{1}{2}$ $S_\nu = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow S_{e\nu} = 0, 1$

Kategorije:

Singletno stanje: $S_{e\nu} = 0$ (Fermijevi razpadi)

Tripletno stanje: $S_{e\nu} = 1$ (Gamow-Teller razpadi)

Trik neenakost $\hat{\vec{J}}_{e\nu}$

Fermi: $J_{e\nu} = l$

G-T: $J_{e\nu} = l \pm 1, 0$

Npr: $J_i = J_f \Rightarrow$ F: $l = 0$

GT: $l=1$, $S_{e\nu} = 1$

Za razna stanja jeder se parnost ohranja:

$$\left.\begin{aligned}\hat{P}\,\Psi_i(\vec{r}) &= P_i\,\Psi_i(\vec{r})\\ \hat{P}\,\Psi_f(\vec{r}) &= P_f\,\Psi_f(\vec{r})\end{aligned}\right\} P_i = P_f \cdot P_{e\nu}$$

$\rightarrow P_{e\nu} = (-1)^l$

$\hookrightarrow$ iz Y_{lm_l}

$$\hat{P}\,Y_{lm_l} = (-1)^l\,Y_{lm_l}$$

Konino Lunfigorodstvo:

$\Delta l = 0 \rightarrow$ ni spremembe parnost

$$\left.\begin{aligned}&\Delta J = 0 \text{ za Fermi}\\ &\Delta J = 0, \pm 1 \text{ za G-T}\end{aligned}\right\} \text{"dovoljeni prehodi"}$$

$\Delta l = 1 \rightarrow$ Sprememba parnosti

$$\left.\begin{aligned}&\Delta J = 0, \pm 1 \text{ za (F)}\\ &\Delta J = 0, \pm 1, \pm 2 \text{ za G-T}\end{aligned}\right\} \text{Prvi "prepovedan" prehod}$$

Razmislek v obratni smeri:

Recimo $J_i = J_f \Rightarrow \Delta J = 0$

$\hookrightarrow$ $l = 0$, F razpad

$(S_{e\nu} = 0)$ $\Delta p = \frac{p_i}{p_f} = P_{e\nu} = (-1)^l$

$\Delta p = 1$

$\hookrightarrow$ $l = 1$, GT razpad

$S_{e\nu} = 1$ $\Delta p = \frac{p_i}{p_f} = -1$

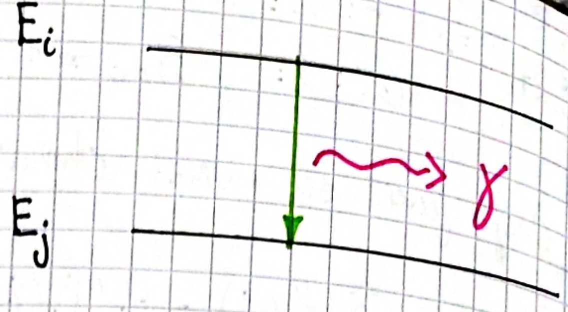
Višji pol sevanja oz prepovedanost pomeni daljši razpadni čas.

Sevanje γ

Električno dipolno sevanje

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega^3 |\langle f|\vec{p}_e|i\rangle|^2}{3\pi \varepsilon_0 c_0^3 \hbar} = \frac{\Gamma}{\hbar} = W_e$$

Verjetnost za prehod na časovno enoto



$$\omega = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{E_i - E_j}{\hbar}$$

Izsevana moč:

$$P_e = \frac{E_\gamma}{\tau} = \frac{\hbar\omega}{\tau}$$

Včasih tudi z $k = \omega / c_0$

$$W_e = \frac{1}{\tau_e} = \frac{k^3 |\langle f|\hat{\vec{p}}_e|i\rangle|^2}{3\pi \hbar_0 \varepsilon_0}$$

Magnetnodipolno sevanje:

$$W_m = \frac{1}{\tau_m} = \frac{\mu_0 k^3 |\langle f|\hat{\vec{p}}_m|i\rangle|^2}{3\pi\hbar}$$

$$\frac{W_m}{W_e} = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{1/c_0^2} \frac{|\langle \hat{\vec{p}}_m\rangle|^2}{|\langle \vec{p}_e\rangle|^2} \Rightarrow W_m \ll W_e$$

el.

Operator dipolnega ~~sevanja~~ zapišemo kot:

$$\hat{\vec{P}}_e = e\hat{\vec{r}} \Rightarrow \text{Ocena: } \langle P_e\rangle = e_0 R_j$$

Operator magnetnega dipola pa ocenimo kot:

v splošnem lahko komplicirano

$$\hat{\vec{P}}_m = \ldots \Rightarrow \text{Ocena: } \langle p_m\rangle \sim \mu_N = \frac{e_0 \hbar}{2 m_N}$$

↑ masa nukleona

$$\Rightarrow \frac{W_m}{W_e} \approx \frac{\mu_N}{e_0^2 R_j^2} = \frac{(\hbar c_0)^2}{(2 m_N c_0^2 R_j^2)} \sim \underbrace{10^{-3} - 10^{-4}}_{\text{Ocena}}$$

Lekcija: Dipolni magnetni prehodi prispevajo manj.

Natančneje:

$$\langle f|\hat{\vec{p}}_e|i\rangle = \int \psi_f^* \hat{\vec{p}}_e \psi_i \, d^3r \quad ; \quad \hat{\vec{p}}_e = e\hat{\vec{r}}$$

$$\langle f|\hat{\vec{p}}_m|i\rangle = \int \psi_f^* \hat{\vec{p}}_m \psi_i \, d^3r \quad ; \quad \hat{\vec{p}}_m = (g_l \hat{\vec{l}} + g_s \hat{\vec{s}})\mu_N$$

$$g_l = \begin{cases} 1 & ; \text{proton} \\ 0 & ; \text{nevtron} \end{cases}$$

$$g_s = \begin{cases} 5{,}6 & ; \text{proton} \\ -3{,}8 & ; \text{nevtron} \end{cases}$$

Tudi pri sevanju γ dobimo multipolne prehode:

Slika: $\langle \psi_f | \hat{\vec{A}} | \psi_i \rangle$

$\downarrow$

vektorski potencial $\rightarrow \hat{\vec{A}} = A_0 e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$

$q \propto \vec{p}_\gamma$

Razvoj tega nas pripelje v multipolni razvoj

Splošni izraz za multipole:

$$\langle \hat{\vec{p}} \rangle = V_{fi} = \int \psi_f^* \left[\sum_l \left(\hat{O}_l^{(m)} + \hat{O}_l^{(e)} \right) \right] \psi_i \, d^3r$$

magnetni multipolni operatorji

$l = 1$

$$\hat{O}_1^{(m)} = \hat{\vec{p}}_m$$

električni multipolni operatorji

$l = 1$

$$O_1^{(e)} = \hat{\vec{p}}_e = e_0 \hat{\vec{r}}$$

l - red multipola

in hkrati rang tenzorja kot sferični ~~ired~~ ireducibilni (nerazcepni) tenzor

$\hat{T}^{(\ell)}$ - sferični ireducibilni tenzor ranga ℓ: Skupina operatorjev ki se pri rotacijah transformirajo enako kot sferični harmoniki. Y_{ℓ, m_ℓ}

$$\underbrace{\left\{ T_m^{(\ell)} \right\}_{m=-\ell,\ell}}_{2\ell+1}$$

• Y_ℓ so ena od možnih oblik tega zgoraj.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotiran koord. sistem}}}{\bar{Y}_{\ell m_\ell}} = \sum_{m_\ell'} \underbrace{D^{(\ell)}_{m_\ell m_\ell'}}_{\text{Wignerjevi členi}} Y_{\ell m_\ell}$$

ℓ nam torej predstavlja tudi vrtilno količino.

Sevanje γ talke 2

Začetek: V elektromagnetnem polju bo: $H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + eV$ in to smo dali v schrödingerjevo enačbo. Umeritev smo izbrali, da velja $\underbrace{\nabla \cdot \vec{A} = 0}_{\text{Coulomb gauge}}$. Dodatno še:

$$V = \underbrace{V_0(\vec{r})}_{\text{nemotení/stacionarni potencial}} + \underbrace{\phi(\vec{r})}_{\text{Zunanji potencial (skupaj z } \vec{A}\text{)}}$$

Lepše/Uporabnejše zapišimo H:

$$H = \frac{\vec{p}^2 - 2e\vec{A}\cdot\vec{p} + e^2\vec{A}^2}{2m} + eV_0 + e\phi$$

Ne pozabite da so to operatorji in velja:

$$\vec{A}\cdot\vec{p}+\vec{p}\cdot\vec{A} = 2\vec{A}\cdot\vec{p}+[\vec{A},\vec{p}]$$

$$\vec{p}\cdot\vec{A}\Psi = \vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\Psi) = \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})}_{\text{Zaradi umeritve}}\Psi+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Psi \sim (\vec{A}\cdot\vec{p})\Psi \Rightarrow [\vec{A},\vec{p}]=0$$

Uporabimo to za opis interakcije z zunanjim EM valovanjem:

Vzemimo najpreprostejše: Lin. polariziran, monokromatski ravni val } Klasični opis EM valovanja

Izberemo $\varphi=0$

$$\vec{A} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{amplituda}}}{A_0}\,\overset{\substack{\text{polarizacija}\\ \downarrow}}{\vec{\varepsilon}}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

A_0 "majhen"

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$$

$$\vec{E} \sim \underbrace{A_0\omega}_{E_0}\vec{\varepsilon}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$$\rightarrow \vec{b} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\times\vec{\varepsilon} = \frac{\omega}{c}\hat{n}\times\vec{\varepsilon}$$

$$\vec{B} \sim 2A_0\frac{\omega}{c_0}\vec{b}\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$$

To bomo sedaj uporabili v Hamiltonianu. Hočemo perturbacijo:

$$H = H_0 + H_{int}$$

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m}+eV_0 \qquad H_{int} = -\underset{\sim A_0}{\frac{e\vec{A}\cdot\vec{p}}{m}} + \overset{\text{Zanemarimo}}{\underset{\sim A_0^2}{\cancel{\frac{e^2A^2}{2m}}}}$$

Zapišimo $\cos()$ v $\mathbb{C}$ zapisu:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\Rightarrow H_{int} = -\frac{eA_0\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}}{2m}\left[\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t)+\exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r}+i\omega t)\right]$$

$$= Ve^{i\omega t}+V^{\dagger}e^{-i\omega t}\ ; \quad V^{\dagger} = -\frac{eA_0\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}}{2m}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

To se izkaže, da je harmonska perturbacija. To motrijo slučima v izpeljavo za Fermijevo zlato pravilo:

$$i\hbar\, a_f(t) = \int_0^t \langle f|H_{int}|i\rangle e^{i\omega_{fi}t'}dt' ; \quad \omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$$

Dobimo:

$$a_f(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \Big[\underbrace{V_{fi}}_{=\langle f|V|i\rangle} e^{i\omega t'} + \underbrace{V_{fi}^{\dagger}}_{=\langle f|V^{\dagger}|i\rangle = \langle i|V|f\rangle^*} e^{-i\omega t'}\Big] e^{i\omega_{fi}t'}dt'$$

$\operatorname{sinc} z = \frac{\sin z}{z}$

⋮

$$a_f(t) = -\frac{it}{\hbar}\Big[V_{fi}\exp\Big(i\frac{(\omega+\omega_{fi})}{2}t\Big)\operatorname{sinc}\Big(\frac{(\omega+\omega_{fi})t}{2}\Big) +$$

$$V_{fi}^{\dagger}\exp\Big(-i\frac{(\omega-\omega_{fi})t}{2}\Big)\operatorname{sinc}\Big(\frac{(\omega-\omega_{fi})t}{2}\Big)\Big] =$$

Vrh pri:
$\omega = \omega_{fi}$
$\hbar\omega = E_f - E_i$
$E_f = E_i + \hbar\omega$
Absorpcija fotona

Vrh bo pri:
$\omega + \omega_{fi} = 0$
$\omega = -\omega_{fi}$
$\hbar\omega = E_i - E_f$
$E_i = E_f + \hbar\omega$
Izsevanje γ (radiation)

To je to, kar nas zanima

Izbrali bomo samo absorpcijo. Skvadriramo in vstavimo v Fermijevo zlato pravilo:

$$|a_{f_{kvad}}(t)|^2 = \frac{t^2}{\hbar^2}\frac{e^2|A_0|^2}{4m}|\langle f|\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}|i\rangle|^2 \cdot \operatorname{sinc}^2\Big[\frac{(\omega+\omega_{fi})t}{2}\Big] = f(\omega)$$

To damo v zlato pravilo:

$$P_{i\to f}(t) = \int_{\omega(E);\, E=\hbar\omega} |a_f(t)|^2 \rho(\omega) d\omega$$

Gostota en. valovanja je $W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \omega^2 |A_0|^2$

$$P_{i\to f}(t) = \int_\omega \frac{t^2 e^2 W_e}{2\varepsilon_0 \hbar^2 m^2 \omega^2} \rho(\omega) |\langle \dots \rangle|^2 \operatorname{sinc}^2[\dots] d\omega$$

Energijska gostota glede na končna stanja

$$\rho_e(\omega) = \underbrace{\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c_0^3}}_{\text{gostota } E} \underbrace{\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}}_{\text{zasedbeno st.}}$$

Black body radiation

Znebimo se še $\operatorname{sinc}[\dots]$:

$$\int \operatorname{sinc}^2[\alpha z] dz = \int \frac{\pi}{\alpha}\delta(z)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{t} \qquad z = \omega + \omega_{fi} \Rightarrow \text{Vrh/delta pri } \omega = -\omega_{fi} = \omega_\gamma = \frac{E_i - E_f}{\hbar} > 0$$

Ko ko vse "zen" integriramo:

Naredimo multipolni razvoj

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = \frac{P_{i\to f}}{t} = \frac{e^2 \omega_\gamma}{\pi \varepsilon_0 \hbar c_0^3 m^2} |\langle f| \vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} |i\rangle|^2; \qquad |\vec{k}| = \frac{\omega_\gamma}{c_0}$$

Mi smo tu interferenčni člen zanemarili, ker smo seštevali kvadrate amplitud vseh možnih stanj, morali pa bi:

$$|\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \underbrace{2\mathrm{Re}(\Psi_1^* \Psi_2)}_{\text{interferenca}}$$

Kar je smiselno, da vsako jedro seva neodvisno od drugih.

$\Rightarrow$ Nekoherentno sevanje!

Multipolni razvoj:

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1 - i\vec{k}\cdot\vec{r} + \frac{1}{2}(\vec{k}\cdot\vec{r})^2 + \ldots + \frac{(-i\vec{k}\cdot\vec{r})^n}{n!}$$

$$l = 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n+1$$

(vrtilna količina vsakega člena)

El. dipol E_1, E_2, ... El. kvadrupol

Poglejmo samo električno dipolno aproksimacijo:

$$\langle f|\vec{\varepsilon}\cdot\vec{p}|i\rangle = \vec{\varepsilon}\cdot\langle f|\vec{p}|i\rangle$$

Velja
$$[\vec{r}, H_0] = \frac{i\hbar\vec{p}}{m}\;; \quad E_i|i\rangle = H_i|i\rangle$$

$$\langle f|\vec{r}H_0|i\rangle - \langle f|H_0\vec{r}|i\rangle = \langle f|\vec{r}|i\rangle[E_i - E_f] =$$

$$= \langle f|\vec{r}|i\rangle\frac{\omega_\gamma}{\hbar}$$

Torej:

$$\langle f|\vec{p}|i\rangle = -im\omega_\gamma\langle f|\vec{r}|i\rangle$$

Dodamo še e iz polnega kvadrata:

$$\vec{p}_e = e\vec{r} \quad \text{el. dip. mom.}$$

Tako dobimo:

$$\frac{1}{\tau_{dip}} = \frac{\omega_\gamma^3}{\pi\varepsilon_0 c_0^3\hbar}|\vec{\varepsilon}\cdot\langle f|\vec{p}_e|i\rangle|^2$$

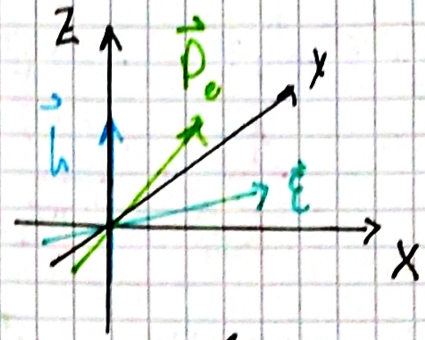
To nas še moti

Naredimo povprečje po polarizacijah $\vec{\varepsilon}$.

$\vec{k} = (0, 0, k)$

$\vec{p}_e = (p_e \sin\theta, 0, p_e \cos\theta)$

$\vec{\varepsilon} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$



$\Rightarrow |\vec{\varepsilon} \cdot \vec{p}_e|^2 = p_e^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi$

Povprečje po pomeni $\frac{1}{4\pi} \int d\Omega$

Iz povprečenja dobimo $\frac{p_e^2}{3}$; $p_e^2 = |\langle f| ex |i\rangle|^2 + |\langle f| ey |i\rangle|^2 + |\langle f| ez |i\rangle|^2$

Tako dobimo verjetnost za prehod na časovno enoto za el. dip. sevanje:

$$\frac{1}{\tau_{dip}^{(e)}} = \frac{\omega^3 p_e^2}{3\pi \varepsilon_0 c_0^3 \hbar}$$

Poglejmo si še magnetno dipolno sevanje!

Naš račun ni upošteval $\vec{\mu} = \vec{p}_m$ sistema. Spustili smo člen $H_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{2A_0\omega}{c_0} \vec{b} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad ; \quad \begin{aligned} b_1 &= \varepsilon_2 \\ b_2 &= -\varepsilon_1 \\ b_3 &= 0 \end{aligned} \quad \vec{b} \perp \vec{\varepsilon}$$

Spet to zapišemo kot:

$$H_m = V_m e^{i\omega t} + V_m^\dagger e^{-i\omega t} \quad ; \quad V_m = -\frac{i\omega A_0}{c_0} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} (\vec{b} \cdot \vec{\mu})$$

Razlika $V \sim 1/c_0$

$$\langle f | \vec{b} \cdot \vec{\mu} | i \rangle = \vec{b} \cdot \langle f | \vec{\mu} | i \rangle$$

$$\hookrightarrow \vec{\mu} = \frac{e}{2m} \underbrace{\left[g_\ell \vec{l} + g_s \vec{s} \right]}$$

proton/nevtron za γ sevanje

Povprečenje po $\vec{b}$ je tako kot povprečenje po $\vec{\varepsilon}$.

Za magnetno dipolno sevanje ($e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}=1$) dobimo:

$$\frac{1}{\tau_{dip}^{(M)}} = \frac{\omega_\gamma^3}{3\pi\varepsilon_0 c_0^3}\frac{1}{c_0^2}|\langle f|\hat{\vec{\mu}}|i\rangle|^2$$

E1 prehod spremeni parnost jedra

Parnost in momenti:

$$\hat{\vec{p}}_e \xrightarrow{\hat{P}} -\hat{\vec{p}}_e \quad (\vec{r}\to-\vec{r})$$

parnost

Začetno in končno stanje imata nasprotno parnost za el. dip. prehod.

$$\hat{\vec{\mu}} \xrightarrow{\hat{P}} \hat{\vec{\mu}} \quad (\sim\vec{r})$$

Začetno in končno stanje imata enako parnost za mag. dip. moment.

M1 prehod ohrani parnost jedra

Posplošeno na višje rede:

$E\ell$: parnost $(-1)^{\ell}$

$M\ell$: parnost $(-1)^{\ell+1}$

Jedro: $|\vec{j}-\vec{j}'| \leq \ell$ red multipola

Velja pa prepoved $\vec{j}=\vec{j}'=0$ ni mogoč (ker ima foton $J^P=1^-$)

tipično red počasnejši kot E_1

	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	
Hitrost razpada ← Rate	E1	E2 M_1	E3 M_2	E4 M_3	
Sprememba parnosti	✓	X	✓	X	
J^P	1^-	2^+	3^-	4^+	(el)
J^P		1^+	2^-	3^+	(mag)