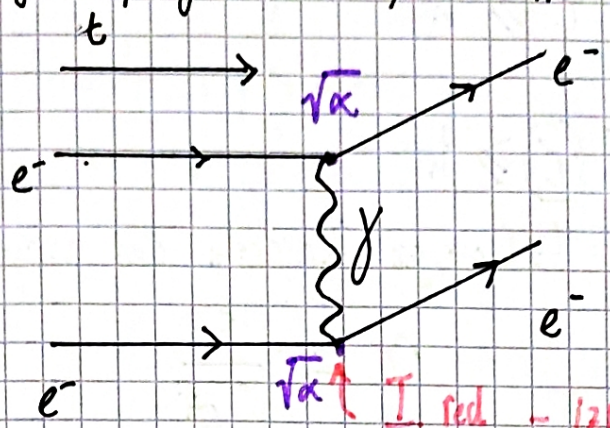
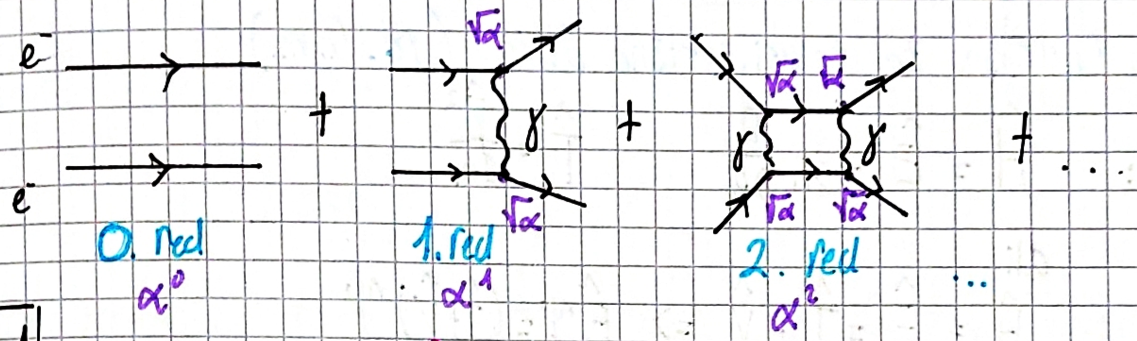
Osnovni delci

Shematično interakcije opisujemo z Feynmanovimi diagrami:

EM sipanje npr.:



I red - izmenjava enega fotona

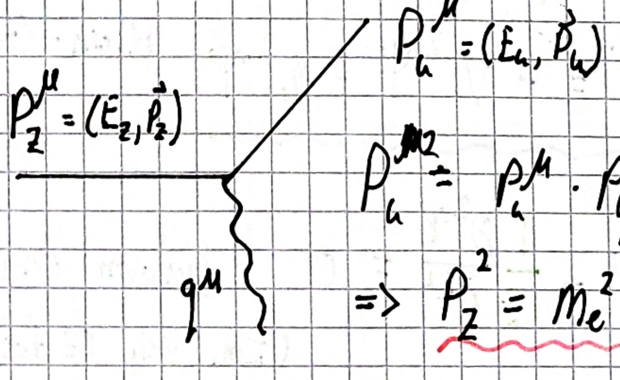


$\boxed{\hbar = c = 1}$

$$|V_{fi}| \sim \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = \alpha \hbar c$$

$$\alpha = \alpha_{EM} = 1/137$$

V vsak vertex (oz. vozlišče) pripišemo $\sqrt{\alpha}$. Za matrični element jih zmnožimo.



$$p_u^2 = p_u^\mu \cdot p_{u\mu} = E_u^2 - p_u^2 = m_e^2$$

$$\Rightarrow p_z^2 = m_e^2$$ na masni lupini (on mass shell)

Prosta - realna delca

$$q^\mu = (E_\gamma, \vec{p}_\gamma)$$

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{p}_\gamma| \overset{?}{=} E_\gamma \\ q^2 \overset{?}{=} m_\gamma = 0 \end{array}\right\} ?$$

$$q^2 \neq 0 \Rightarrow \text{Virtualen, off-mass shell}$$

$$= Q^2$$

To lahko razumemo iz načelom nedoločenosti, da si "maso/virtualnost" za kratek čas sposodi iz vakuuma.

$$\Delta E \, \tau \geq \hbar$$

$$\sqrt{|Q^2|}\,\tau \geq \hbar$$

↳ Dovoljen življenski čas virtualnega delca

$$\tau \simeq \frac{\hbar}{\sqrt{|Q^2|}}$$

Virtualnega delca ne moremo izmeriti

Valovna enačba za relativistične delce (rel. k.m.)

Klasično: $\hat{H} = \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ $\quad \hat{T} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}$

ali

$$\hat{H} = \hat{E} = \hat{T} + \hat{V} \Rightarrow \hat{E}\Psi = (\hat{T} + \hat{V})\Psi$$

Schrödingerjeva enačba

Relativnost:

$(\hbar = c_0 = 1)$

$$E^2 = p^2 + m^2$$

$$\hookrightarrow \hat{E}^2 = \hat{\vec{p}}^2 + m^2 \Rightarrow \hat{E}\Psi = (\hat{\vec{p}}^2 + \hat{m}^2)\Psi$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = -\nabla^2\Psi + m^2\Psi$$

Klein-Gordonova enačba

Če je ~~m~~ $m = 0$:

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

Valovna enačba!

(Em. val. oz fotoni za $m_\gamma = 0$)

3D: $\nabla^2 = \Delta$

4D: $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box$ d'Alembertov operator

$$\Rightarrow (\Box + m^2)\Psi = 0$$

Klein-Gordonova enačba

K-G enačba ne upošteva spin ("spin 0" rešitev/enačba). Čez nekaj časa bomo prišli do Diracove enačbe, ki to popravi. Dodatno ker smo v relativističnem velja:

$$E^2 = p^2 + m^2$$

$$E = \pm\sqrt{p^2+m^2}$$

Kaj je z rešitvami $E<0$?

=> Diracova enačba to upošteva, K-G pa ima rešen problem z $E<0$ rešitvami.

Kontinuitetna enačba (podpoglavje?)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

V kvantni mehaniki je verjetnostna gostota $|\psi|^2$. Iz tega in SE bi radi kontinuitetno enačbo.

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\nabla^2\psi; \quad V=0 \;/\cdot(-i\psi^*)$$

$$\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} = +\frac{i}{2m}\psi^*\nabla^2\psi$$

in analogno naredimo za kompleksno konjugacijo

$$\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{i}{2m}\psi\nabla^2\psi^*$$

To seštejemo skupaj in dobimo:

$$\underbrace{\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t}}_{\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)} = \frac{i}{2m}\left[\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*\right]$$

$\uparrow$

$|\psi|^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = -\frac{i}{2m}\vec{\nabla}\cdot(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi) \quad \vec{j}$$

Verjetnostni tok

Če je $\psi \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{j} = 0 \rightarrow$ Vezana stanja

Poskusimo sedaj ponoviti vajo v relativnosti z K-G enačbo:

K-G pomnožena z -1, da je lepše

$$\left(\nabla^2\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - m^2\psi\right) = 0 \quad / \cdot -i\psi^*$$

$$-i\psi^*\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2\right)\psi = 0$$

in še za konjugirano

$$-i\psi\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2\right)\psi^* = 0$$

~~Damo odvod vse od konst. enačbe + tok~~ Enačbi ~~seštejemo?~~ odštejemo?

$$-i(\psi^*\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\psi^*) = -i\left(\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2}\right)$$

$$\underbrace{-i\nabla\cdot(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)}_{\nabla\cdot\vec{j}} = -i\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

$$= -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \rho = i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

Poglejmo delovanje na ravnem valu:

$$\psi = N e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$= N \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\left(Et - \vec{p}\cdot\vec{r}\right)\right)$$

$$= N e^{-i/\hbar\, p\cdot x}$$

$$p^\mu \cdot x_\mu = p\cdot x$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c_0}, \vec{p}\right)$$

$$x^\mu = (c_0 t, \vec{r})$$

Če $c_0 = \hbar = 1$ dobimo ravni val:

$$\psi = N e^{-ipx} \quad \text{... ravni val}$$

To lahko reši K-G enačbo in dobimo ven Einsteinovo enačbo za prosti delca.

$$E^2 = p^2 + m^2$$

Kompleksno konjugirano pa je

$$\psi^* = N e^{ipx} \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -iE\psi \qquad \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = +iE\psi^*$$

Damo v ~~Schrödinge~~ enačbo za ρ:

$$\rho = i\left(|N|^2(-iE)\cdot 2\right) = 2E|N|^2$$

$E < 0$!

To nam da normalizacijo rel. faznega prostora.

$$\int \frac{d^3p}{2E}$$

$\Downarrow$

$\boxed{\rho < 0 \;!}$

To je problem K-G enačbe

Lani pri mafiji:

$$\int d^4p \, \delta(p^2 - m^2)$$

$$dE\, d^3p\, \delta(E^2 - \vec{p}^2 - m^2)$$

$$\downarrow \quad E - \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$\int \frac{d^3p}{2E} \to E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

To so popravili z Diracovo enačbo. Ugotovili so da $\rho < 0$ za K-G pomeni nabite delce. Rešimo če interpretiram ρ = verjet. gost. · naboj

Stacionarne rešitve K-G enačbe

$m = 0$; rotacijska simetrija ($\sim$ točkast izvor)

$\Delta u = \nabla^2 u$ za r v sferičnih

$\Rightarrow$ Sf. koordinate: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$

$u(r) = g/r$ $\rightarrow$ Dolg doseg

Recimo foton (el. interakcija) $m_\gamma = 0$ ima: $g = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = \alpha$ $(\hbar = c = 1)$

Funkcija stanja $\equiv$ Potencial za druge delce

ψ predstavlja kar potencial, ki ga "vidijo" drugi delci

Iz tega sledi, da imamo zvezo med $m_\gamma = 0$ in dosegom interakcije $\sim 1/r$ (dolg doseg)

Recimo $m \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = m^2 u \quad ; \quad u = u(r)$$

$$\rightarrow u(r) = \frac{g}{r} e^{-r/R} \; ; \; R = \frac{1}{m}\left(= \frac{\hbar}{m c_0}\right) \sim \underbrace{\lambda_c = \frac{h}{m c_0}}_{\text{tudaj razlaga za doseg}}$$

$\downarrow$

Kratek doseg sile

Zgodovina: Sila med nukleoni (?) je odkril Hideki Yukawa

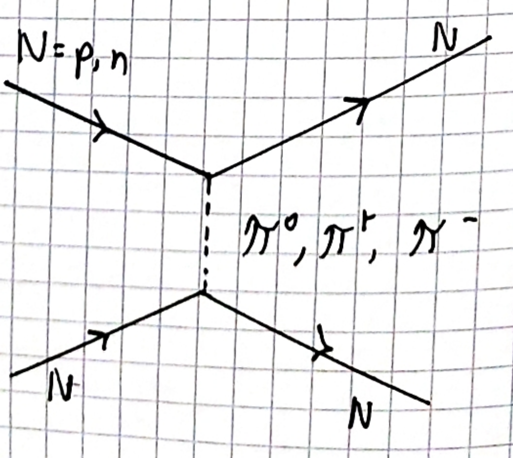
Celo oceno za maso nosilcev sile:

Masivni nosilci interakcije

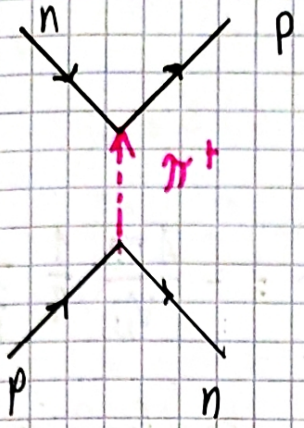
$$m = \frac{1}{R} \Rightarrow m c_0^2 = \frac{\hbar c_0}{R} = \frac{200\,\text{MeV fm}}{2\,\text{fm}} = 100\,\text{MeV}$$

π pion $m_\pi \approx 100\,\text{MeV}$

(*)



Npr.



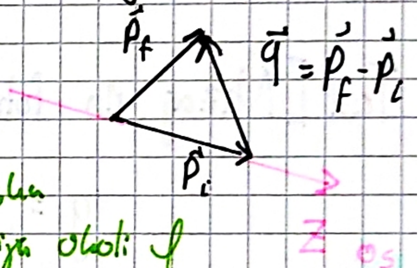
"Who ordered that?"
Isidor Isaac Rabi
ob odkritju miona

Pogledali so več interakcij in so odkrili še en lepton μ $m_\mu = 104$, kasneje pa za res odkrijejo pion $m_\pi \sim 139\ MeV/c_0^2$. Vedli so da je to že "efektivna" interakcija

Ocena preseka za reakcijo z Yukawinim potencial

Zanima nas presek za Slika (*). Recikliramo EM sipanje:

$$V_{fi} = \frac{1}{V_N} \int_{V_N} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, V_\pi(\vec{r})\, d^3 r$$



$\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

$$d^3 r = r^2 dr \sin\theta\, d\theta \cdot 2\pi$$ → Rotacijska simetrija okoli φ

Postavimo koordinatni sistem, da je

$$\vec{q}\cdot\vec{r} = qr\cos\theta$$

Potencial pa je:

$$V_\pi(r) = u(r) = \frac{g}{r} e^{-r/R}$$

Moramo zmleti izraz

$$V_{fi} = \frac{2\pi g}{V_N} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\, e^{iqr\cos\theta} \cdot \frac{1}{r} e^{-r/R}$$

Integrirajmo:

$$V_{fi} = -\frac{4\pi g}{V_N}\int_0^\infty r e^{-r/R}\,\frac{\sin(qr)}{qr}\,dr$$

$$= -\frac{4\pi g}{V_N}\underbrace{\int_0^\infty e^{-r/R}\,\frac{\sin(qr)}{q}\,dr}_{\text{Laplaceova transformacija}} = -\frac{4\pi g}{V_N}\,\frac{1}{q}\,\frac{q}{\frac{1}{R^2}+q^2}$$

$$\Rightarrow V_{fi} \sim g\,\frac{1}{m^2+q^2}$$

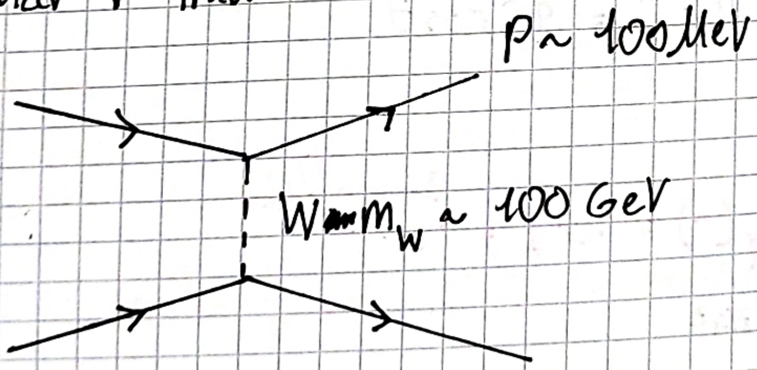
Torej velja:

$$\sigma(NN \xrightarrow{\pi} NN) \sim |V_{fi}|^2 \sim \frac{g^2}{(m^2+q^2)^2}$$

Test [Nazaj na foton $m=0$ in EM]

$$g = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma \sim \frac{(e^2)^2}{q^4}$$ ✓ Se sklada z Rutherford ipd.

Poglejmo si še limito $|q^2| \ll |m^2|$ masiven nosilec interakcije glede na kinetične energije delcev v trku.



To se dejansko dogaja (Šibka sila!). Torej:

$$\sigma_W = \frac{g_W^2}{(m_W^2)^2} = G_F^2$$

iz standardnega modela dobimo (slepo bomo vrjeli):

$$g_W = e(\sin\theta_W)^{-1}$$

$$g_W^2 = e^2(\sin^2\theta_W)^{-1} \sim \alpha(\sin^2\theta_W)^{-1} \sim \frac{1}{137}\underbrace{(0{,}23)^{-1}}_{\text{Izmerjeno}} = 4\alpha$$

Ni Maghen

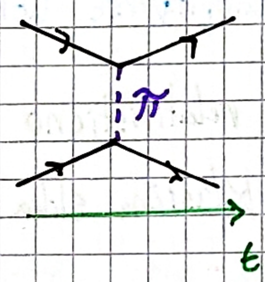
$$g_W^2 \sim 0{,}1$$

$m_W = 80{,}3$ GeV merjeno torej:

$$\frac{0.1}{(80'3)^4} \ll 1 \Rightarrow G_F^2$$

Torej je šibka sila šibka, ker se "žoga" z težkimi nosilci.

Ker smo reciklirali em interakcijo: Šipanje (odboj)



Dodatno smo privzeli elastično sipanje $E_i = E_f$

$$\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$\left.\begin{aligned} p_f^\mu &= (E_f, \vec{p}_f) \\ p_i^\mu &= (E_i, \vec{p}_i) \end{aligned}\right\} q^\mu = (0, \vec{q})$$

Virtualni nosilec interakcije

$$q^\mu q_\mu = Q^2 = 0 - \vec{q}^{\,2}$$

$$Q^2 = -\vec{q}^{\,2} < 0 \; !$$

Torej je potencial

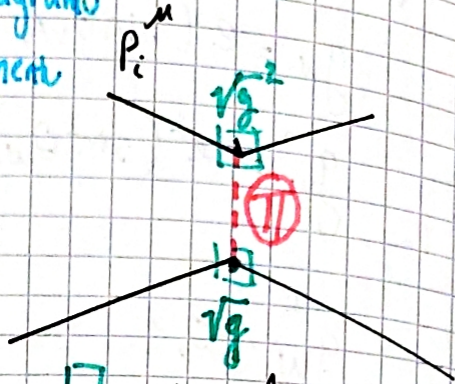
$$V_{fi} = \frac{g}{-Q^2 + m^2}$$

Oz lepše (definiramo tako):

$$V_{fi} = \frac{g}{Q^2 - m^2}$$

Lorentz invariantno in pripravljeno za relativnost

$\frac{1}{Q^2 - m^2}$ – Propagator v Feynmanovem diagramu in matričnem elementu



Propagatorju se pravi tudi:

t-channel

$$t = (P_f^\mu - P_i^\mu)^2 = Q^2$$

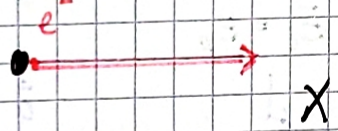
$$V_{fi} = (\sqrt{g})^2 \left(\frac{1}{Q^2 - m_\pi^2} \right)$$

Propagator je ekvivalent Greenovi funkciji, ki pove časovni razvoj iz začetnega v končno stanje

Nekaj več o sklopitvenih konstantah $(\alpha, \alpha_W, \alpha_S)$

$\alpha \sim \frac{1}{100}$, $\alpha_W \sim \frac{1}{10}$, $\alpha_S \sim 1$ Za nižje En.

V resnici počnemo relativistično kvantno mehaniko. Klasična slika da je elektron kroglica, ki leti ni okay.

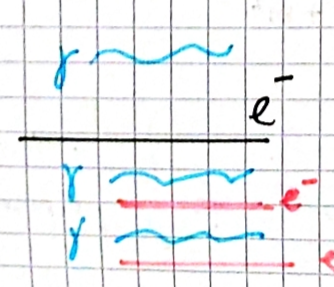


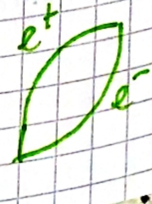
V relativistični kvantni mehaniki:

Virtualni foton; $m_\gamma^2 = Q^2 \neq 0$ Živi čas $\tau \sim \frac{\hbar}{\sqrt{Q^2}}$

Ob času t je elektron "skrit" v oblaku γ in e^+e^-

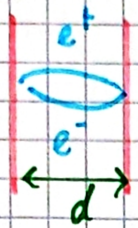
Za zraven: tudi v vakuumu



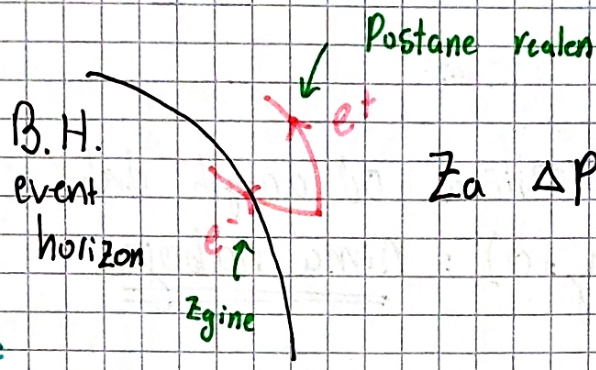


Nastajanje parov v vakuumu lahko dejansko izmerimo preko Casimirjevega

Casimirjevega pojava



Drugi način je pa preko Hawking sevanja. Črne luknje sevajo



Za Δp^μ poskrbi BH.

$$E^f_{BH} = E^i_{BH} - E_{e^+}$$

Back to dressed particles. Virtualne delce lahko zaznamo, ko hočemo zadeti elektron in trčimo v nek npr. foton. Delec bi trči da fotonu dovolj E in GK, da gre on-shell in postane realen. Teorija je DGLAP.

Oblačenje v virtualne delce: Polarizacija/Senčenje vakuuma

↳ Bližje ko pridemo, večji bo vidni naboj

↳ Izstrelek z večjim p^μ (oz. Q^2) nam omogoči priti bližje.

Izmerimo running coupling odvisnost $\alpha(E)$

Sklopitvena konstanta ni konstanta

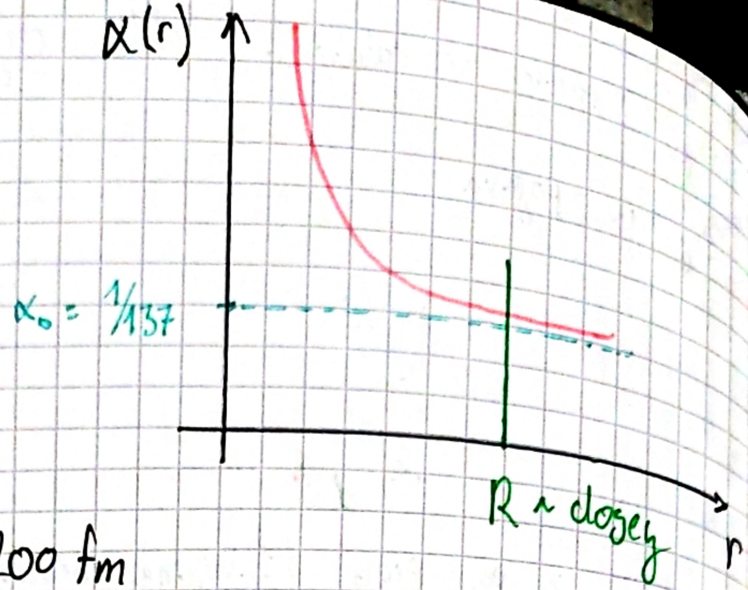
I

$$\tau \doteq \frac{\hbar}{\Delta E}$$

$$R \doteq c \cdot \tau = \frac{c\hbar}{\Delta E} \;;$$

$$\Delta E = 2 m_e c_0^2 \simeq 1\,\mathrm{MeV}$$

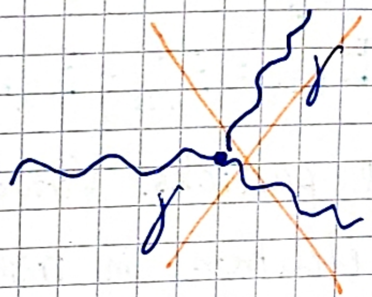
$$\Rightarrow \; R = \frac{200\,\mathrm{MeV\,fm}}{1\,\mathrm{MeV}} \sim 200\,\mathrm{fm}$$



Naprej 'sklopitvene "konstante"

1.) EM interakcija je ~~ne~~ različna od drugih dveh v tem, da nosilec foton γ ($m_\gamma = 0$) : nima naboja

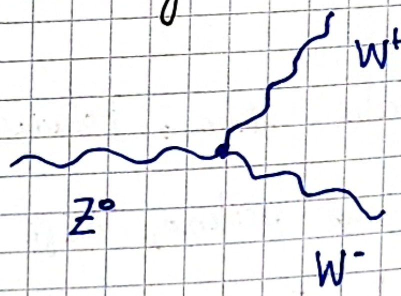
Niso možne reakcije:



QED

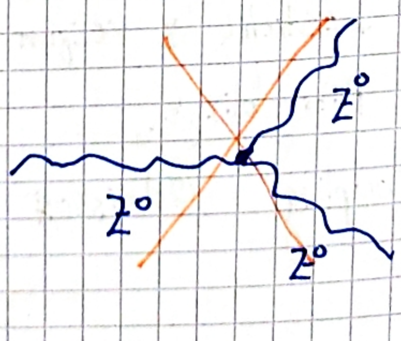
2.) Šibka sila ima za nosilce šibke bozone (W^+, W^-, Z^0), ki imajo maso ($m_W = 80{,}3$ GeV, $m_Z = 91.1$ GeV) in nosijo šibki naboj.

Torej je možno:

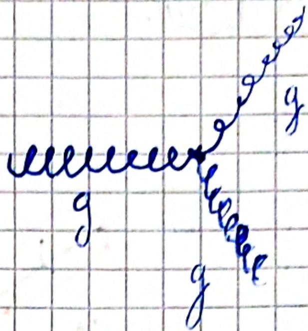


EW (electro weak)

ni pa dovoljena:



3.) Močna sila ima za nosilce gluone g ($m_g = 0$), ki imajo barvni naboj.

Možne so take interakcije: 

QCD

Feynmanovi diagrami

Ponovitev: Kontinuitetna enačba relativistično

$$\partial^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \rightarrow \partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu \,; \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla}\right) \nearrow$$

To velja za K-G enačbo!

$$\Rightarrow \quad j^\mu = (\rho, \vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Delta = \nabla^2 \Rightarrow \Box \,, \quad \Box^2 \equiv$$

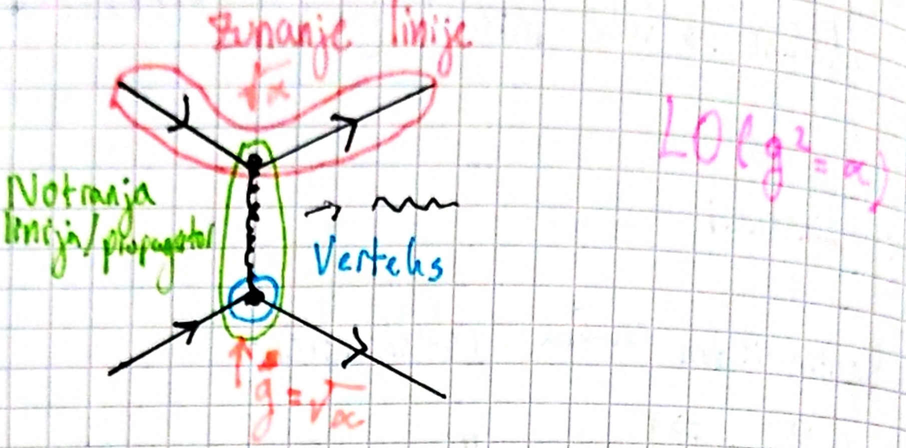
Za ravni val:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= N e^{-ipx} \\ p \cdot x &= p^\mu x_\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{r} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} j^\mu &= 2|N|^2 p^\mu \\ &= 2|N|^2 (E, \vec{p}) \end{aligned}$$

$$(V_{fi}) = M_{fi} = M_1(\alpha^1 = g^2) + M(\alpha^2 = g^4) + M_3(\alpha^3 = g^6) \ldots$$

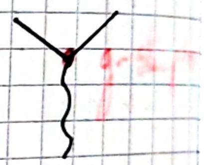
Hočemo tako perturbativno vrsto in upamo, da je potenčna vrsta (kjer višji redi vedno padajo). To pomeni, da hočemo, da konvergira za $\alpha < 1$. Prvi vodilni red (prva neničelna vrednost) se označi LO (Leading order), naslednja dva sta (Next to leading order) NLO in NNLO (next to next to leading order).

Feynman ugotovi, da se lahko M_i dobi člene vrste dobi z diagrami + pravili.

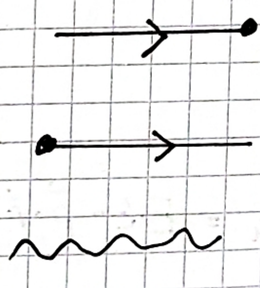


Zunanje linije določajo začetno in končno stanje. LO dobimo z zmožkom vseh verteksov.

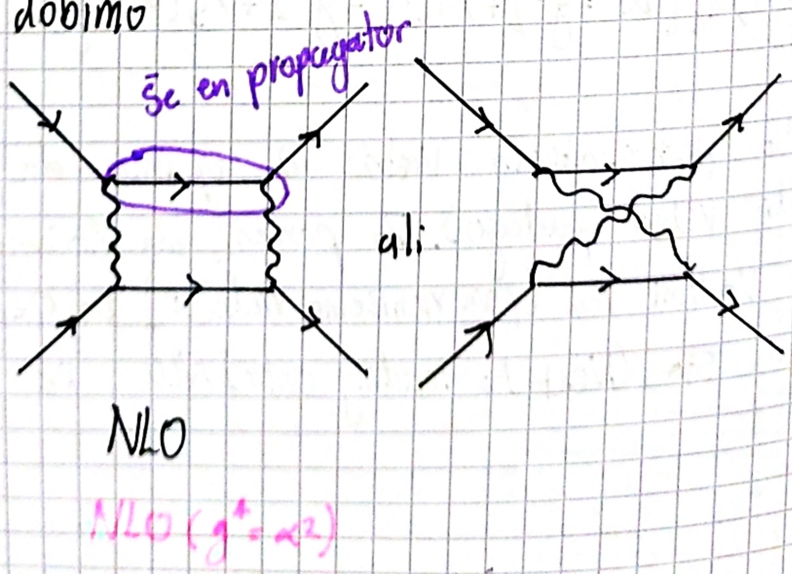
Teorija določa dovoljene vertekse in pravila za njih, propagatorje in zunanje linije in pravila za vse te.



- Zunanja linija v verteks
- Zunanja linija iz verteksa
- Propagator



V naslednjem redu dobimo



V vsakem verteksu se ohranja $p^\mu = (E, \vec{p})$

$$\delta^{(4)}\left(\sum_{in} p^\mu - \sum_{out} p^\mu\right)$$

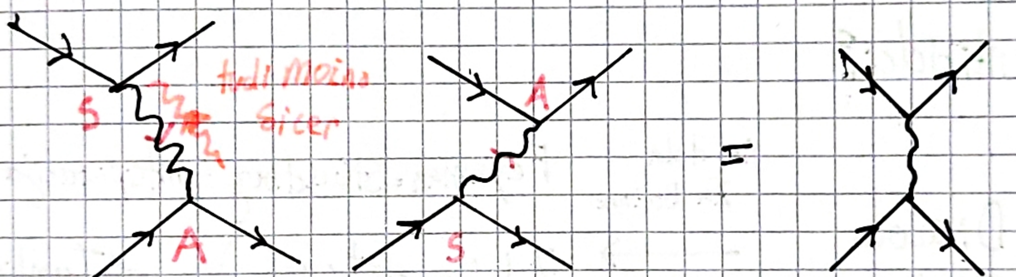
Na tiho to pomeni, da imamo v vsakem verteksu še en virtualen delec.

Vse zunanje linije predstavljajo realne (on-shell) in proste delce (~ravni val).

Tipično so notranje linije / propagatorji virtualni delci.

Smer časa pri diagramih ali → ali ↑. Bodi pozoren, ker lahko napačno prebrano os predstavlja potem drugo reakcijo.

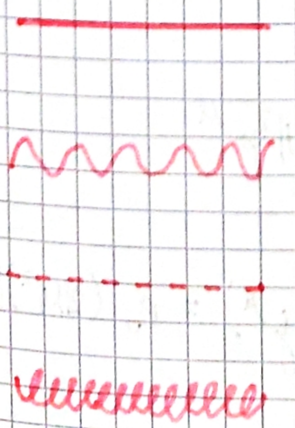
Virtualni delci / propagatorji so že vsota možnih časovnih potekov (sevanje / absorpcija)



Sočasnost je itak relativna

Lorentz invariantno ! LINV

Standardne oznake glede na SM



Spin $\frac{1}{2}$: Fermion

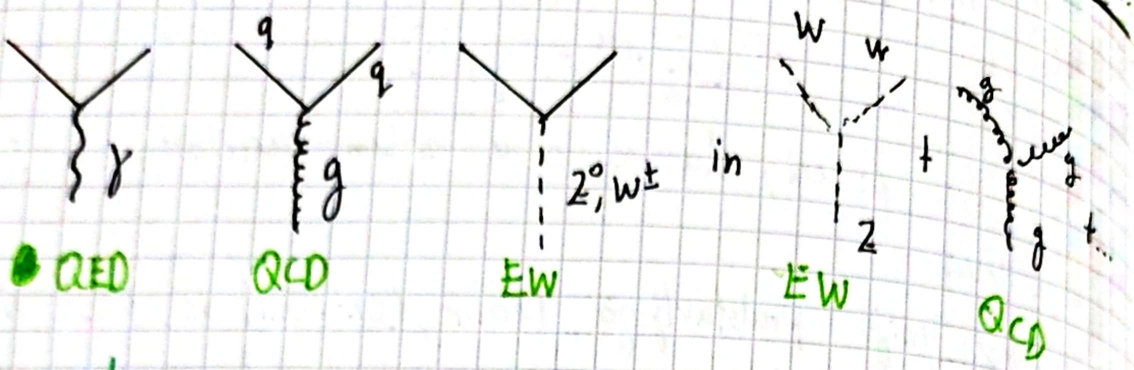
Spin 1: Foton [včasih tudi drugi bozoni]

Spin 1,0: šibki bozoni ($S=1$), Higgsov bozon ($S=0$)

Gluoni

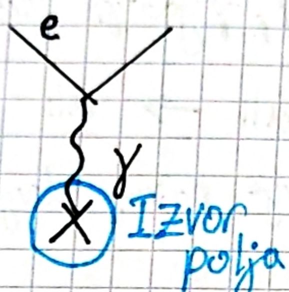
Paket TIKZ za risanje v Latexu

Vertehsi:



Interakcija z poljem:

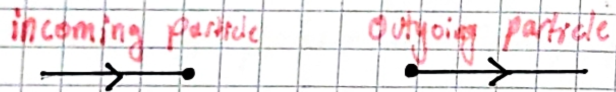
Izvor polja
(zunanjega polja)



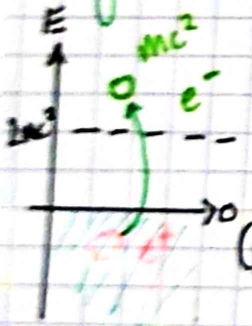
MADGRAPH
za kombinatoriko
in matrični element

Zunanji delci:

Usmerjene linije



Kaj z Antidelci?



Diracovo morje
(polprevodniška interpretacija)

$\xrightarrow{\text{ne dela za bozone}}$ Feynman-Stückelberg interpretacija

Zgled: π^+ (delec) $\quad$ π^- (antidelec)

$u\bar{d}$ $\quad$ $\bar{u}d$

K.G. rešitev $\psi = N e^{-ipx}$; $p^\mu = (E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p})$

Verjetnostni tok:

$$j^\mu = 2|N|^2 p^\mu$$

$\downarrow$ električni tok

$$j_e^\mu(\pi^+) = (+e_0) j^\mu = 2e_0 |N|^2 p^\mu$$

Za π^- pa:

$$j_e(\pi^-) = (-e_0) j^\mu = (+e_0)(j^\mu) = e_0 (2|N|^2)(-p^\mu)$$

$$= 2e_0 |N|^2 (-E, -\vec{p})$$

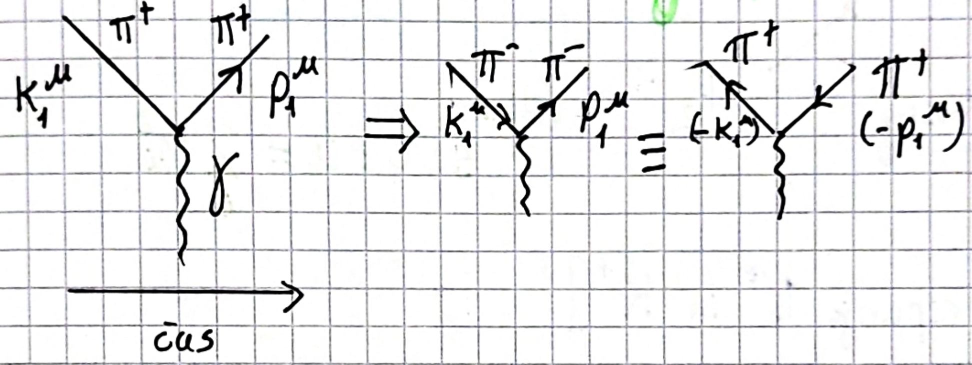
Sevanje (absorpcija) anti delca z G.K. p^μ je fizikalno ekvivalentna absorpciji (sevanju) delca z G.K. $(-p^\mu)$

oz.

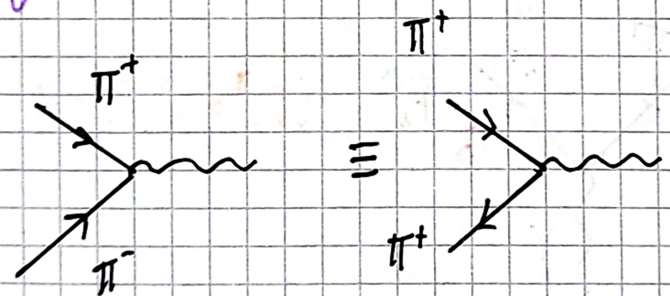
Pozitivne rešitve anti delca ($p^\mu > 0$), ki se giblje naprej po času so ekvivalentne negativnim ($-p^\mu$) rešitvam delca, ki se giblje nazaj v času.

"Antidelci so delci, ki se gibljejo nazaj v času"

Dodatno: Fermioni še transformacija spina

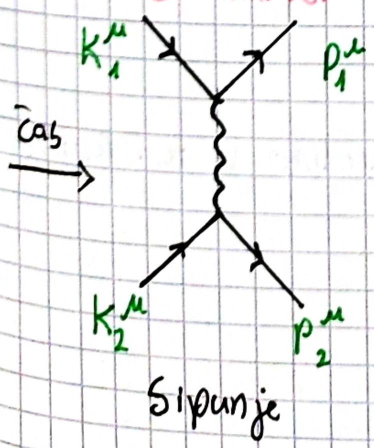


Anihilacija



Osnovne 2→2 topologije

t-channel



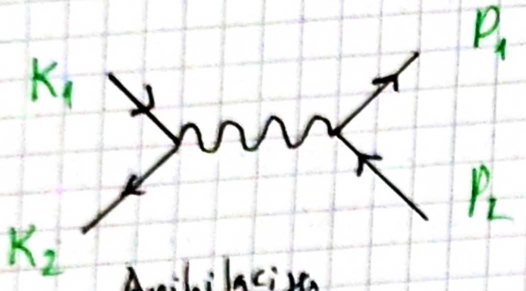
Sipanje

$t = (p_1 - k_1)^2 = (p_2 - k_2)^2$

q^2 ali Q^2

$t < 0$ (sipanje)

S-channel

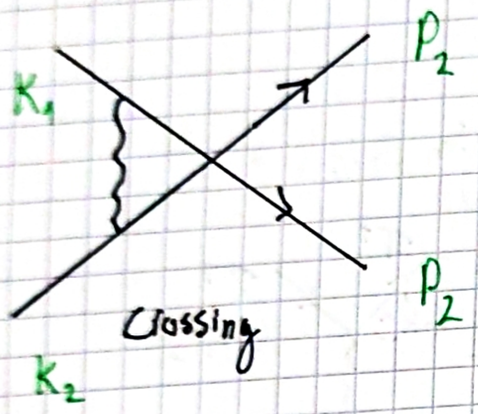


Anihilacija

$S = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$

Center of mass energy CME or $\sqrt{s}$

U-channel



Crossing

$u = (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2$

u, t, s Mandelstam variables

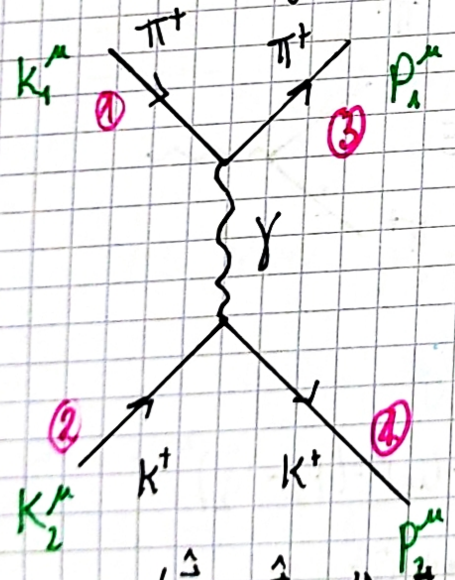
Velja:

$$s + t + u = \boxed{\sum_i m_i^2}$$

masa vseh delcev v [illegible] reakciji

Zgled: [EM sipanje π^+ in K^+]

Ker je ~~[illegible]~~ Spin 0 lahko shajamo z K-G enačbo.



$(\Box + m^2)\Psi = 0$

Podobno kot pri sevanju γ ($\hat{\vec{p}} \Rightarrow \hat{\vec{p}} + e\vec{A}$) ($\vec{\nabla} \to \vec{\nabla} + ie\vec{A}$) naredimo v tem relativističen recept:

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu \to D_\mu D^\mu$$

$$(\square + m^2)\Psi = \underbrace{-ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\Psi}_{-\hat{V}\Psi} + \ldots \cancel{A^2 e^2} \ldots$$

Popravek k prosti rešitvi!

interakcija z poljem

Kot pri γ Višje člene zanemarimo

kot 1. približek v Feynmanovi iteraciji

$$\Rightarrow \quad M_{fi} = \frac{1}{i}\int d^4x\, \Psi_f^* \hat{V} \Psi_i$$

0-ta rešitev: $(\square + m^2)\Psi = 0$

$\hookrightarrow \Psi_1 = N_1 e^{-ik_1 x}, \Psi_2 \ldots, \ldots$ (ravni valovi)

1-red perturbacij: Dobimo M_{fi}

$q^\mu = k_1^\mu - p_1^\mu$

$$M_{fi} = \frac{1}{i}\int \Psi_3^* \hat{V} \Psi_1\, d^4x$$

γ iz K^+

$$M_{fi} = e\int d^4x \left[(-\partial_\mu \Psi_3^*)\Psi_1 + \Psi_3^*(\partial_\mu \Psi_1)\right] A^\mu$$

Podobno verjetnostnemu toku

$$j_\mu(\pi^+) = ie\left[\Psi_3^*(\partial_\mu \Psi_1) - (\partial_\mu \Psi_3^*)\Psi_1\right]$$

$\rightarrow$ Verjetnostni tok med $\Psi_3^* \leftrightarrow \Psi_1$

$\Downarrow$

Transition current / Prehodni tok med začetnim Ψ_i in končnim stanjem Ψ_f.

$$\Rightarrow \quad M_{fi} = -i\int j_\mu(\pi^+) A^\mu\, d^4x$$

Analogno lahko napišemo

$$j^\mu(K^+) = ie\left[\Psi_4^*(\partial^\mu \Psi_2) - (\partial^\mu \Psi_4^*)\Psi_2\right]$$

Manjka nam še zveza z A^μ. Iz elektromagnetizma imamo:

$\Box^2 = \Box$

$$\Box^2 A^\mu = j^\mu \Big\}$$ Nehomogena valovna enačba

$\partial_\mu A^\mu = 0$ $\quad \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (Lorentz gauge)

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j^\mu(K^+) \Leftrightarrow \underline{\Box e^{\pm iqx} = -q^2 e^{\pm iqx}}$$

Preprosto preverit da res velja

Torej:

$$M_{fi} = +i \int j_\mu(\pi^+) \frac{1}{q^2} j^\mu(K^+)\, d^4x$$

$$M_{fi} = ie^2 N_1 N_2 N_3 N_4 (p_1+k_1)_\mu (p_2+k_2)^\mu \cdot \frac{1}{q^2} \underbrace{\int d^4x\, e^{i(p_1+p_2-k_1-k_2)}}_{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_2)}$$

Dajmo eksplicitno zapisati propagator:

$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \to$$

Vsakemu verteksu pripišemo

V splošnem lahko diferencialni sipalni presek zapišemo kot:

$$d\sigma = \frac{\overline{|T_{fi}|^2}}{4[(k_1 k_2)^2 - m_1^2 m_2^2]} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(k_1+k_2-\sum_{i=1}^{N} p_i\right)}_{\text{celotna ohranitev } E \text{ in } \vec{p}} \underbrace{\prod_{i=1}^{N} \frac{d^3 p_i}{2E_i} \frac{1}{(2\pi)^3}}_{\text{dLips}}$$

relativistični zapis

$\overline{|T_{fi}|^2}$ $\quad \rho_i \cdot j_i \sim |N_i \cdot N_i|$

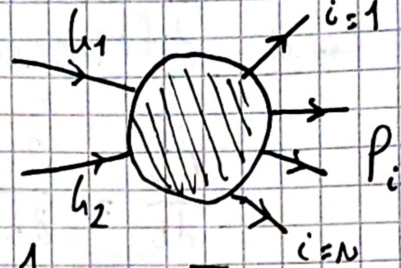
↳ M_{fi} brez normalizacij

dLips Lorentz invariant phase space

dQ

$$\overline{|T_{fi}|^2} = \frac{1}{S} \sum_{\substack{\text{Začetna} \\ \text{stanja}}} \sum_{\substack{\text{končna} \\ \text{stanja}}} |T_{fi}|^2$$

Vsa končna stanja



Povpreči po vseh začetnih stanjih

Tipično: $\frac{1}{(2S_1+1)(2S_2+1)} \sum_{S_1, S_2}$

Kajantie in Byckling: Particle Kinematics

Simetrije in ohranitveni zakoni

Iščemo količine, ki se s časom ohranjajo... Delali bomo nerelativistično (ampak se iste količine ohranjajo tudi relativistično).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

$\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ hermitski

Formalna rešitev je

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\Psi(0)\rangle$$

$\hat{H}$ hermitski $\rightarrow U = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}$; U je unitaren

$U^\dagger U = I$

Opazljivka D z operatorjem $\hat{D}$ se s časom ohranja če velja

$$\langle \Psi(t) | \hat{D} | \Psi(t) \rangle = \begin{cases} \langle \Psi(0) | \hat{D} | \Psi(0) \rangle = D_0 \\ \langle \Psi(0) | U^\dagger \hat{D} \boxed{U | \Psi(0) \rangle} \end{cases}$$

$|\Psi(t)\rangle$

$$\Rightarrow U^\dagger D U = D_0 \quad / U \cdot \text{ in } \cdot U^\dagger$$

$$\hat{D} = U D_0 U^\dagger$$ } Standardna transformacija operatorja

To enačbo diferienciramo:

$$\frac{d\hat{D}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} D_0 U^\dagger + U D_0 \frac{\partial U^\dagger}{\partial t} + 0 = \dots$$

$$= \left(-\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) U D_0 U^\dagger + U D_0 \left(+\frac{i\hat{H}}{\hbar}\right) U^\dagger$$

$$\frac{d\hat{D}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}\underbrace{U D_0 U^\dagger}_{\hat{D}} - U D_0 U^\dagger \hat{H}\right) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{D}] = 0$$

Časovno neodvisno

Torej vse ohranjene količine komutirajo s Hamiltonianom.

Zgled: [Ohranitev vrtilne količine]

Vzamemo $\hat{J}_z = \hat{J}_3$. Velja $[\hat{H}, \hat{J}_z] = 0$ (npr. vodikov atom, jedra,...)

Spomni se: $\hat{J}_z$ je generator rotacij. Unitarni zapis je:

$$U(\hat{J}_z, \varphi) = e^{-\frac{i J_z \varphi}{\hbar}} \quad \text{v } \mathbb{C}$$

$$\psi \to \psi' = U\psi$$

Ohranjanje dveh vrst količin:

- Diskretne količine
  - parnost
  - naboj, ...
- Zvezne količine
  - P
  - J
  - E, ...

Ena količina ~~za~~ ki naj bi se ohranjala je Barionsko število.

Zgled [Barionsko število]

Barioni so sestavljeni iz 3 kvarkov. Imajo kvantno število $B = 1$. Temu pripada simetrijska operacija:

$$U = e^{i\hat{B}\theta}$$

↳ Domišljijska količina/kot (ker ni fizikalno ampak je to neka rotacija v prostoru parametrov).

$$|\Psi\rangle$$

$$\hat{B}|\Psi\rangle = B|\Psi\rangle = 1 \cdot |\Psi\rangle$$

Anti delci se lahko vežejo v stanje treh vezanih antikvarkov → antibarion. Te imajo $B = -1$

$$\hat{B}|\bar{\Psi}\rangle = B|\bar{\Psi}\rangle = (-1)|\Psi\rangle$$

Mezoni (vezana $q\bar{q}$) je $B = 0$. Leptoni $B = 0$.

Danes imamo Barionsko število na nivoju kvarkov

$$\left.\begin{aligned} q &: B = +\tfrac{1}{3} \\ \bar{q} &: B = -\tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\} \text{Hadroni: } \underset{3\cdot\frac{1}{3}}{\overset{qqq}{\text{Barioni}}} + \underset{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{\overset{q\bar{q}}{\text{Mezoni}}}$$

$$L : B = 0$$

Gledali so, če so reakcije tipa

$$\underset{\underset{2}{B:\,1+1}}{pp} \rightarrow \underset{\underset{2}{B:\,1+1\;+1-1}}{pp\,p\bar{p}} \quad \checkmark \quad \text{To so izmerili}$$

$$\underset{\underset{2}{B:\,1+1}}{pp} \rightarrow \underset{\underset{0}{B:\,1-1\;+0+0}}{p\bar{p}\,\pi^+\pi^+} \quad // \quad \text{Tega niso izmerili}$$

Intermezzo: Ohranitev leptonskega števila

Leptoni $L = 1$

Antileptoni $L = -1$

Ostali $L = 0$

Eksperimenti s kateri so preverjali

$$\underset{L:\,0+0}{pp} \rightarrow \underset{L:\,-1-1}{e^+e^+} \quad // \quad \text{Te niso opazili}$$

$$\underset{L:\,-1+1}{e^+e^-} \rightarrow \underset{L:\,-1\,+\,1}{\tau^+\tau^-} \quad \checkmark \quad \text{To so opazili}$$

- Stvar se zakomplicira: $\nu_\mu n \to p \mu^-$ } To reakcijo so opazili

$L: 1+0 \quad L: 0+1$ ✓

$B: 0+1 \quad B: 1+0$ ✓

ampak $\nu_\mu n \to p e^-$

L: -||- se ohrani ✓

B -||-

} Ampak te pa niso opazili

Vpeljati moramo še leptonsko število po okusih: L_e, L_τ, L_μ

$$\nu_\mu n \to p e^-$$

$L_\mu: 1+0 \to 0+0$ //

$L_e: 0+0 \to 0+1$ //

} Lahko razloži odsotnost razpada

medtem ko

$$\nu_\mu n \to p \mu^-$$

$L_\mu: 1+0 \to 0+1$

Iskali so še reakcije tipa:

$$\mu^- \to e^- \gamma$$

$\cancel{L_\mu}\ \cancel{L_e} \to$ //

} Je tudi niso ~~zaz~~ opazili

$$\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$$ } To so opazili

$B: 0 \to 0+0$

$L_\mu: 0 \to -1+1$

$L: 0 \to -1+1$

Recimo v GUT je pa $B-L$ "dobro" kvantno število

$$p \to e^+ \pi^0$$ } To reakcijo iščemo

$B: 1 \to 0+0$ //

$L: 0 \to -1+0$ //

$B-L: 1 \to 1+0$ ✓ $\to$ s stališča GUT je to mogoče

$$\tau_p > 10^{34} \text{ let } @95\% \text{ CL}$$

Intermezzo: [Permutacijska simetrija funkcij stanja za več delci]

$N = 2$: Enodelčna stanja f_a, f_b

Sim: $$\Psi_S(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[f_a(1)f_b(2) + f_a(2)f_b(1)\right]$$

$\Psi_S(1,2) = \Psi_S(2,1)$ ----> Nerazločljiva delca 1,2

aSim: $$\Psi_A(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[f_a(1)f_b(2) - f_a(2)f_b(1)\right]$$

$\Psi_A(1,2) = -\Psi_A(2,1)$ ... Fermioni morajo biti v stanju Ψ_A

(če je $a=b \Rightarrow \Psi \equiv 0$) Paulijeva prepoved!

To velja za vsak sistem z N fermioni

$$\Psi_A(1,\dots,N)$$

Izospin

Sestavljajmo zdaj Barione:

$N = 3$ kvarki (u,d,s) : $3^3 = 27$ kombinacij

Uvedemo novo kvantno število (strong) izospin.

Delec Ψ, ki je v stanjih

Izospinorji:

$|I=\frac{1}{2}, I_3=\frac{1}{2}\rangle = |p\rangle$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = |p\rangle$

$|I=\frac{1}{2}, I_3=-\frac{1}{2}\rangle = |n\rangle$ $\quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |n\rangle$

Različna stanja okusa delcev (flavor)

je dobro kvantno število za jedrsko/močno interakcijo.

$I_3 = \frac{1}{2}(Z-N)$ v enačbah jedra

$$[\hat{H}, \hat{I}_3] = 0$$

Za naboj

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}$$

Lahko uporabimo Spinski formalizem (Ladder operators, ...)

$$I_3 |p\rangle = \frac{1}{2} |p\rangle$$

$$I_3 |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle$$

$\rightarrow$

$$I_+ |p\rangle = 0 \qquad I_- |p\rangle = |n\rangle$$

$$I_+ |n\rangle = |p\rangle \qquad I_- |n\rangle = 0$$

To se lahko prevede v kvarkovsko sliko:

$$I_3 |u\rangle = +\frac{1}{2} |u\rangle \qquad u: I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2}$$

$$I_3 |d\rangle = -\frac{1}{2} |d\rangle \qquad d: I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}$$

in seveda

$$I_- |u\rangle = |d\rangle$$

$$I_+ |d\rangle = |u\rangle$$

Uporabimo sedaj to mašinerijo.

Sistematična konstrukcija Barionskih Stanj

Uganemo kaloj $\Psi_{S1} = |uuu\rangle$
$\Psi_{S2} = |ddd\rangle$

$\Psi_{S1} = |uuu\rangle$
$\Psi_{S2} = |ddd\rangle$

$$I_- = \sum_{i=1}^{3} I_{-i}$$

$$\hat{I}_- |uuu\rangle = |duu\rangle + |udu\rangle + |uud\rangle \qquad \Psi_{S3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|duu\rangle + |udu\rangle + |uud\rangle)$$

$$\hat{I}_+ |ddd\rangle = |udd\rangle + |dud\rangle + |ddu\rangle \qquad \Psi_{S4} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|udd\rangle + |dud\rangle + |ddu\rangle)$$

Dodamo še kvark s

$$|s\rangle = |I=0, I_3=0\rangle$$

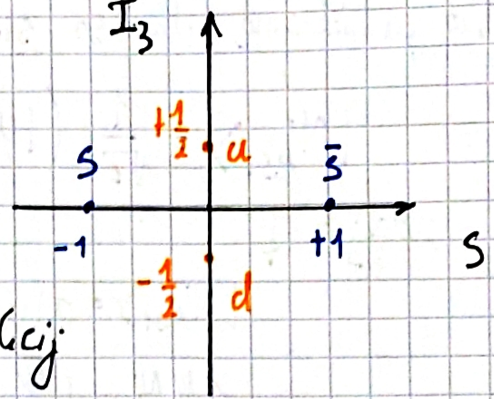
Tega ni šlo obravnavati z izospinom. Vpeljali so čudnost (strangeness)

$$S = -1 \quad \text{za } |s\rangle$$

$$U = e^{i\hat{S}\theta}$$

$$S = +1 \quad \text{za } |\bar{s}\rangle$$

Čudni kvark je bil najden pri reakciji



$$\pi^- p \to K^0 \Lambda^0$$

$$S: 0+0 \qquad S: 1-1$$

Čudnost se ohranja pri močnih in EM interakcij

Ne pa pri šibkih.

Zamenjujemo kvarke z S:

S_3 $d \to s$ $\quad \cancel{\psi_{S5} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|}$ $\psi_{S5} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|suu\rangle + |usu\rangle + |uus\rangle)$

⋮

S_3 $u \to s$ $\quad \psi_{S6} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|sdd\rangle + |dsd\rangle + |dds\rangle)$

S_3 $u \to s$ 2x $\quad \psi_{S7} = \frac{1}{\sqrt{6}}(|dus\rangle + |dsu\rangle + |sdu\rangle + |uds\rangle + |sud\rangle + |usd\rangle)$

$$\psi_{S8} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|sus\rangle + |uss\rangle + |ssu\rangle)$$

To je dekuplet simetričnih stanj okusa

$$\psi_{S9} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|sds\rangle + |ssd\rangle + |dss\rangle)$$

$$\psi_{S10} = |sss\rangle$$

Ostane nam še $27-10=17$ stanj. Ne bomo vseh napisali. Popolnoma antisimetrično stanje je samo eno:

Stanje okusa kvarkov

$$\psi_{A1} = \frac{1}{\sqrt{6}}(|uds\rangle - |dus\rangle + |usd\rangle - |dsu\rangle + |sud\rangle - |sdu\rangle)$$

Note: čisto analogno lahko naredimo za QCD

$$\psi_A(QCD) = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\underset{u}{\overset{}{R}}\,\underset{d}{G}\,\underset{s}{B}\rangle - \dots)$$

Stanje barv kvarkov za vse barione

Ostala so pa mešana stanja. Lahko so simetrični na izmenjavo dveh kvarkov in antisimetrični na izmenjavo drugih dveh:

$$\psi_{MA1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|udu\rangle - |duu\rangle)$$

anti sim anti sim

⋮

$$\psi_{MA8}$$

Lahko pa izberemo, da so si:

$$|\Psi_{MS1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|udu\rangle + |duu\rangle - 2|uud\rangle\right)$$

dobimo kot

$$|\Psi_{MS1}\rangle = a|uud\rangle + b|udu\rangle + c|duu\rangle$$

$$\langle \Psi_{MS1} | \Psi_{MS1}\rangle = 1 : a^2+b^2+c^2 = 1$$

$$\langle \Psi_{MA1} | \Psi_{MS1}\rangle = 0$$

$$\langle \Psi_{S3} | \Psi_{MS1}\rangle = 0$$

$\vdots$

$|\Psi_{MS8}\rangle$

Skupna funkcija stanja bariona potem zgleda tako:

Mora biti antisimetrična

$$\Psi_B \sim \underbrace{\Psi(\vec{r})}_{\text{Tipično simetrično}} \cdot \underbrace{\Psi(spin) \cdot \Psi(okus)}_{\text{Simetrično mora biti}} \cdot \underbrace{\Psi(QCD)}_{\text{antisimetričen vedno}}$$

Možnosti: $\underbrace{\Psi_{S1-S10}(okus)\,\Psi_{S1-S4}(spin)}$ } ustreza spin $\frac{3}{2} = J$

↳ Dekuplet Barionov z $J = 3/2$

$J_z = \frac{3}{2}$
$= \frac{1}{2}$
$= -\frac{1}{2}$
$= -\frac{3}{2}$

Zgodovinsko: $\Delta^{++} = |uuu\rangle$ - simetričen

Eksperiment: $\underbrace{J = 3/2 \quad |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle}$ - simetričen

Od tega je eksperimentalni del Ψ da mora biti $\Psi_A(QCD)$

Mešane kombinacije:

Oktet barionov z spinom $J = \frac{1}{2}$

$$\Psi_{M1} = \Psi_{MS1}(okus)\,\Psi_{MS1}(spin) + \Psi_{MA1}(okus)\,\Psi_{MA1}(spin)$$

$\vdots$

$$\Psi_{M8} = \Psi_{MS8}(okus)\,\Psi_{MS8}(spin) + \Psi_{MA8}(okus)\,\Psi_{MA8}(spin).$$

Hipernaboj

Zgodovinsko se ohrani še to kvantno količino:

$$Y = B + S$$

Hipernaboj

Zgodovinsko se ohrani še to kvantno količino:

$$Y = B + S$$

↑ čudnost, ne spin

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2}$$

↑ običajni naboj

Eksperimentalen test tega sta magnetna momenta n in p. Teoretično lahko izračunamo:

$$\Psi_p = \Psi_{MS1}(okus)\,\Psi_{MS1}(spin) + \Psi_{MA}(okus)\,\Psi_{MA1}(spin) =$$

Spin = 1/2

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|udu\rangle - |duu\rangle\Big]\Big[|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\Big] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[|udu\rangle + |duu\rangle - |uud\rangle\Big]\Big[|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{18}}\Big[2|u\uparrow u\uparrow d\downarrow\rangle - |u\uparrow u\downarrow d\uparrow\rangle + \dots\Big]$$

Rabimo še operator magnetnega momenta:

$$\hat{\vec{\mu}}_i = g_s \frac{e_0 Q_i \hat{\vec{S}}_i}{2m_i}$$

$$\hat{\vec{\mu}} = \sum_i \vec{\mu}_i$$

$g_s = 2$ za spin $\frac{1}{2}$ (Fermioni)

$\hat{\vec{S}}_i$ - spin → gledamo $\hat{S}_{i_z}$

m_i - masa kvarka $\sim \left(m_q \approx \frac{m_N}{3}\right)$ Približno

Q_i - delež / faktor osn. naboja

$$Q_i = \begin{cases} Q_u = \frac{2}{3} \\ Q_d = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Tako dobimo:

$$\mu_z \psi_p = \mu_p \psi_p$$

$$\Rightarrow \quad \mu_p = \frac{e}{2m_q}$$

Analogno:

$$\mu_n = -\frac{2}{3}\,\frac{e_0}{2m_q}$$

Da se nam m_q in nekatere merske napake v povezanem eksperimentu pokrajšajo pogledamo razmerje:

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = -\frac{2}{3}$$

Eksperiment pa nam da:

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} \simeq -0,685$$ $\Rightarrow$ Ni slabo ujemanje!

Mezoni: Vezana stanja $(q\bar{q})$ $B=0$

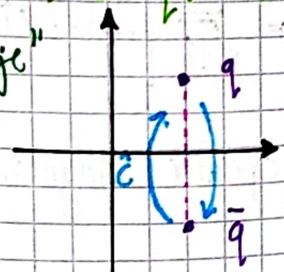
Vpeljemo operator konjugacije naboja:

$$\hat{C}: |q\rangle \rightarrow |\bar{q}\rangle$$

$$\hat{C}|q\rangle = \lambda|\bar{q}\rangle$$

$$\hat{C}^2|q\rangle = \lambda\hat{C}|\bar{q}\rangle = |\lambda|^2|q\rangle$$

"zrcaljenje"



$$|\lambda|^2 = 1$$

Izberemo $\lambda = \pm 1$ (odvisno od primera).

Mi si izberimo:

$$\hat{C}|u\rangle = -|\bar{u}\rangle$$

izbor/dogovor

$$\hat{C}|d\rangle = +|\bar{d}\rangle$$

Kaj je z izospinom?

$$|u\rangle = |I=\tfrac{1}{2}, I_3=+\tfrac{1}{2}\rangle \qquad |d\rangle = |I=\tfrac{1}{2}, I_3=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Spomni se vseh teh zvez:

$$I_3|u\rangle = +\frac{1}{2}|u\rangle$$

$$I_+|u\rangle = 0$$

$$I_-|u\rangle = |d\rangle$$

Za antidelce pa!!:

obrnjen "spin" oz. izospin

$$I_3|\bar{u}\rangle = \left(-\frac{1}{2}\right)|\bar{u}\rangle$$

$$I_3|\bar{d}\rangle = +\frac{1}{2}|\bar{d}\rangle$$

$$I_-|\bar{d}\rangle = -|\bar{u}\rangle$$

$$I_+|\bar{u}\rangle = -|\bar{d}\rangle$$

To je analogno kot za spin

$|\uparrow\uparrow\rangle = |S=1, S_z=1\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = |S=1, S_z=0\rangle$

$|\downarrow\downarrow\rangle = |S=1, S_z=-1\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = |S=0, S_z=0\rangle$ (ortogonal na ostala)

Mezonski spekter:

Začnimo z π $(B=0,\ Y=B+S=S=0)$

Pioni imajo spin 0

$$|\pi^+\rangle = |u\bar{d}\rangle$$

"delec"

$$I_3 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

Spustimo stanje

$$I_-|u\bar{d}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle\right)$$

$$\underbrace{|I=1, I_3=0\rangle}_{\text{To je } \pi^0}$$

Triplet!

$$|\pi^+\rangle = |I=1, I_3=+1\rangle$$

$$|\pi^0\rangle = |I=1, I_3=0\rangle$$

Spet spustimo stanje

$$|\pi^-\rangle = |I=1, I_3=-1\rangle$$

To lahko ponavljamo tudi za ostale (do singleta pridemo kasneje).
$(u,d,s) = 9$ kombinacij

$$|\pi^+\rangle \xrightarrow{d\to s} |u\bar{s}\rangle = |K^+\rangle$$

kaon; izospin 0

$Y = B+S = 1$

$I_3 = 1/2$

Kaoni imajo spin 0

$$|\pi^+\rangle \xrightarrow{u\to s} |s\bar{d}\rangle = |\bar{K}^0\rangle$$

Strangeness -1

Anti K^0

$Y = -1$

$I_3 = \frac{1}{2}$

$$|\pi^-\rangle \xrightarrow{d \to s} |s\bar{u}\rangle = |K^-\rangle \quad S = -1, \; I_3 = -1/2$$

$$|\pi^+\rangle \xrightarrow{u \to s} |d\bar{s}\rangle = |K^0\rangle \quad S = 1, \; I_3 = -1/2$$

Sestavimo sedaj popolnoma simetrično kombinacijo ("singlet") v izospinu:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|d\bar{d}\rangle + |u\bar{u}\rangle + |s\bar{s}\rangle\right) = |\eta_0\rangle$$

in še nanj ortogonalno stanje:

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\left(|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle\right) = |\eta_8\rangle$$

V naravi so stanja mešanica obeh:

$$\left.\begin{aligned} |\eta\rangle &= \sin\theta\,|\eta_0\rangle + \cos\theta\,|\eta_8\rangle \\ |\eta'\rangle &= \cos\theta\,|\eta_0\rangle - \sin\theta\,|\eta_8\rangle \end{aligned}\right\} \text{Kot rotacija}$$

$$\text{Spin } 0: (\pi, K, \underbrace{\eta_0, \eta_8}_{\eta,\,\eta'})$$

$$\text{Spin } 1: (\underbrace{\rho}_{\rho^+,\rho^-,\rho^0}, K^*, \underbrace{\Phi_0, \Phi_8}_{\Phi,\,\omega})$$

$$|\Phi\rangle = \sin\theta'\,|\Phi_0\rangle + \cos\theta'\,|\Phi_8\rangle$$

$$|\omega\rangle = \cos\theta\,|\Phi_0\rangle - \sin\theta\,|\Phi_8\rangle$$

Stvari se še dodatno zapletejo ko dodamo še težke kvarke

Kvark: c (čar/charm $C=1$)

$\bar{c}$ (čar/charm $C=-1$)

$\Rightarrow$ Mezoni D ($D^+, D^-, D^*, D^0, \bar{D}^0, \ldots$)

Kvark: b (beauty Beauty $=+1$)

$\bar{b}$ (beauty Beauty $=-1$)

$\Rightarrow$ Mezoni B ($B^+, B^-, B^0, B^{*+}, \ldots$)

...ista stanja:

J/ψ $|c\bar{c}\rangle$ $m_{J/\psi} = 3{,}1\,GeV$

PDG kot Vir

Υ $|b\bar{b}\rangle$

Upsilon

Diracova enačba

- Aitchinson and Hey
- Ryder

...racova ideja:

Funkcija stanja ($\hat{H}$) linearna v času $\Leftrightarrow$ Verjetnostna $\rho = |\psi|^2$ $\rho \geq 0$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \sim \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi\right)$$

Enačba stanja

Zraven si želi samo $p_0 = E > 0$ rešitve, kjer je $p^\mu = (p_0, \vec{p})$.

Posledice za konstrukcijo:

Linearna v $\frac{\partial}{\partial t}$ $\rightarrow$ Lin $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$ $\rightarrow$ Kovarianca zapisa v relativnosti

...ova enačba:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\underbrace{-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}}_{\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}}} + \beta m)\psi = \hat{H}\psi$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \vec{\beta} m = i\frac{\partial}{\partial t}$$

Kot pogoj rabimo še ohranitev energije, kar je Klein-Gordonova enačba

$$(\Box + m^2)\Psi = 0 \qquad -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t} = (-\nabla^2 + m^2)\Psi \quad ⊛$$

Rešitev oblike:

$$\Psi = \underbrace{N\omega(p)}_{\text{Dirac}}\underbrace{e^{-ip\cdot x}}_{K-G}$$

"Kvadriramo" našo enačbo (operatorje): $\hat{H}^2 = \hat{H}\cdot\hat{H}$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\Psi = (-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta m)\Psi$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = -\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i^2} - \sum_{i>j}(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_i\partial x_j} -$$

$$-im\sum_i(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\frac{\partial\Psi}{\partial x_i} + \beta^2 m^2\Psi$$

⊛ Mora ustrezati modrcmu

Pogoji za $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ in β

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = \{\alpha_i, \beta\} = 0 \qquad i = 1,2,3$$

antikomutator

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \qquad i,j = 1,2,3$$

$$\alpha_i^2 = I$$

$$\beta^2 = I$$

Izkaže se, da je najnižja možno št. dimenzij potrebnih 4.

$\Rightarrow$ Ψ oz. ω je 4-dim vektor

To so dimenzije v Hilbertovem prostoru stanj.

$$\Psi = \begin{bmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{bmatrix}$$

Tem zahtevam ustreza:

2x2 bloki

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

oz.

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

in

$$\beta = \begin{pmatrix} \underline{I}_2 & 0 \\ 0 & -\underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

σ_i - Paulijeve matrike

$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ U... unitarna transf.

Izbira ni enolična

$\alpha_i' = U \alpha U^{-1}$

$\beta' = U \beta U^{-1}$

So tudi rešitve.

V uporabi tudi Weyl-ova baza.

$$\Psi = N \omega e^{-ip\cdot x}$$

Bi-spinor

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\underline{I}$$

Radi bi zapisali Diracovo enačbo v kovariantni obliki. Vpeljemo nov četverec:

$$\gamma^\mu = \begin{cases} \gamma^0 = \beta & \gamma_0^{\,2} = \underline{I} \\ \gamma^i = \beta\alpha_i & (\gamma^i)^2 = -\underline{I} \end{cases}$$

četverec matrik

Dobi zapis tako množimo z $\gamma^0 = \beta$

$\rightarrow$

Dobimo:

$$(i\underbrace{\gamma^\mu\partial_\mu}_{\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}+\gamma^i\frac{\partial}{\partial x_i}} - m)\psi = 0$$

Oznaka

$$\gamma^\mu a_\mu = \not{a}$$

in tako dobimo Diracovo enačbo v končni obliki:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = (i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I$$

Rešitve Diracove enačbe

$p^\mu(p^0, \vec{p})$

Zapis:

Definiramo $E = +\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$ $\quad p^0 = \pm E$

Vzamemo nastavek:

$$\psi = N w(p) e^{-ip\cdot x} \; ; \; w = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$ Bi-spinorji

Vstavimo v enačbo:

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\, w(p) e^{-ip\cdot x} = 0$$

$$[\gamma^\mu p_\mu - m]\, w(p) = 0$$

$$[\not{p} - m]\, w(p) = 0$$

Spet množimo z $\gamma^0 = \beta$ da gremo v klasičen zapis:

$$[\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m]\, w = p_0 w$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} m I_2 & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = p_0 \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

Dobimo dve (sklopljeni) enačbi za spinorja:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\chi = (p_0 - m)\varphi$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi = (p_0 + m)\chi$$

Izrazimo χ in vstavimo v I. enačbo:

$$\chi = \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})\varphi}{p_0 + m}$$

Očitno se Diracu ni uresničila želja. Možna stanja so lahko tudi z negativno energijo

$p_0 = E \quad p_0 = -E$

$$\Rightarrow \underbrace{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}_{\vec{p}^{\,2}}\varphi = (p_0 + m)(p_0 - m)\varphi$$

$$\vec{p}^{\,2}\varphi = (p_0^2 - m^2)\varphi \Rightarrow p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} = \pm E$$

Na primer za $p_0 = E$ in izrazimo

$\varphi^{(1,2)}$ - spinor

$$\omega^{(1,2)} = N \begin{pmatrix} \varphi^{(1,2)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\varphi^{(1,2)} \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_\uparrow$$

$$\varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi_\downarrow$$

$$\varphi^\dagger\varphi = (1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

Normalizacija:

$$\omega^\dagger\omega = |N|^2\left(1 + \frac{(\vec{\sigma}\cdot\vec{p})^2}{(E+m)^2}\right)$$

$$= |N|^2\left(\frac{E^2 + 2Em + m^2 + p^2}{(E+m)^2}\right) = |N|^2\left(\frac{2E^2 + 2Em}{(E+m)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \omega^\dagger\omega = |N|^2\frac{2E}{E+m}$$

[Tipično se uporabi:

$$N = \sqrt{E+m}$$

$$\omega^\dagger \omega = 2E$$

$$\int \rho \, dV = 2E \quad \text{kot ravni val}$$

$$\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in

Torej za $p_0 = +E > 0$

$$\omega \to u(p,s) \equiv (E+m)^{1/2} \begin{pmatrix} \varphi^{(s)} \\ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{E+m} \end{pmatrix} \qquad s = 1,2$$

$$\psi(e^-) = \frac{1}{\sqrt{V}} u(p,s) e^{-ip\cdot x} \; ; \quad p = p_+ = (E, \vec{p})$$

"delec"
Lahko poljuben fermion

in še stanje $p_0 = -E < 0$

Ravno obratno ker ima antidelec
Obrnjen spin

$$\omega(p_0 = -E, -\vec{p}, s) \to v(p,s) \equiv (E+m)^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad s = 1,2$$

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi(e^+) = \frac{1}{\sqrt{V}} v(p,s) e^{ip_+ x}$$

$$p_+ = (E, \vec{p})$$

$$p = -p_+$$