

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

1. naloga pri Modelski analizi 1

Avtor: Marko Urbanč (28232019)
Predavatelj: prof. dr. Simon Širca
Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

11.10.2023

Kazalo

1	Uvod	2
2	Naloga	3
3	Opis reševanja	4
3.1	Funkcional višjih potenc	4
3.2	Omejitev še z velikostjo hitrosti	5
3.3	Periodične rešitve	5
4	Rezultati	6
5	Komentarji in izboljšave	13

1 Uvod

Za uvod v predmet modelska analiza 1 smo dobili tematiko variacijske metode, ki jo sicer študentje le malokrat srečamo v študijskem programu. Naša fizikalna motivacija je optimizacija vožnje skozi semafor, kjer je cilj priti skozi semafor *optimalno*. S tem mislimo na to, da bi bila vožnja čimbolj udobna, torej brez sunkovitih pospeškov in zaviranj.

Za začetek kratek matematični uvod v variacijsko računstvo. Variacijska metoda je metoda, ki nam omogoča, da poiščemo ekstrem funkcionala. To pomeni, da iščemo funkcijo, ki minimizira ali maksimizira funkcional. V našem primeru je funkcional definiran kot:

$$\int_0^{t_0} a^2(t) dt = \int_0^{t_0} v^2(t) dt, \quad (1)$$

kjer je $a(t)$ pospešek vozila. S tem funkcionalom želimo minimizirati sunkovitost vožnje in jo narediti čimbolj udobno. Preprost način, da se analitično lotimo reševanja tega problema je preko Lagrangeove metode multiplikatorjev. Ker si želimo čimbolj smiselne rešitve, si želimo, da so rešitve našega modela pozitivno definitne. To lahko poskusimo doseči z uporabo neenakosti $v(t) \geq 0$, kar nam bo v Lagrangianu dodalo dodaten člen. Verjetno tu nima smisla več razglabljanj in lahko kar zapišemo Lagrangian kot:

$$\mathcal{L} = \dot{v}^2(t) - \lambda v(t), \quad (2)$$

kjer je λ Lagrangeov multiplikator. To zdaj damo skozi mehanizem Euler-Lagrangeovih enačb in dobimo diferencialno enačbo drugega reda:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{\lambda}{2} = 0. \quad (3)$$

Tu kot memory refresh bralcu zapišem še Euler-Lagrangeove enačbe. Takole je treba storiti:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 0. \quad (4)$$

Skratka dobimo enačbo, ki jo moramo rešiti. To je enačba drugega reda, zato potrebujemo še dva pogoja. Prvi je začetni pogoj, kjer želimo opisati, da se vozilo že giblje z neko hitrostjo v_0 in drugi je, da želimo priti ob ekstremni hitrosti. Potrebni pogoj za naš problem je, da prispemo do semaforja ravno v času, ko se bo prižgala zelena luč. Ta pogoj si lahko predstavljamo kot neke sorte normalizacija, saj je čas, ki ga porabimo za vožnjo, odvisen od razdalje do semaforja. Razdaljo bomo pa dobili kot integral hitrosti po času, kot da bi normirali. Torej označimo potem t_0 kot čas, ko se prižge zelena luč in l kot razdaljo do semaforja. Dobimo:

$$\int_0^{t_0} v(t) dt = l. \quad (5)$$

za naš nujni pogoj in

$$v(0) = v_0 , \quad (6)$$

$$\dot{v}(t_0) = 0 , \quad (7)$$

za robna pogoja. Rešitev te enačbe je v splošnem:

$$v(t) = -\frac{\lambda}{4}t^2 + At + B , \quad (8)$$

za neko konstanto A in B . Za naše specifične pogoje dobimo:

$$A = \frac{\lambda t_0}{2} , \quad (9)$$

$$B = v_0 , \quad (10)$$

$$\lambda = \frac{6}{t_0^3}(l - v_0 t_0) , \quad (11)$$

kar nam skupaj da rešitev:

$$v(t) = v_0 + \frac{3(l - v_0 t_0)}{2t_0^3}(2t_0 t - t^2) . \quad (12)$$

Zaradi lažje obravnave je smiselno če rešitev prevedemo v brezdimenzijsko obliko. To storimo tako, da uvedemo nove spremenljivke:

$$\tau = \frac{t}{t_0} , \nu = \frac{v}{v_0} , \gamma = \frac{l}{v_0 t_0} . \quad (13)$$

Preko tega se naša rešitev prevede na:

$$\nu(\tau) = 1 + \frac{3}{2}(\gamma - 1)(2\tau - \tau^2) . \quad (14)$$

S tem bomo lažje preučevali razlike v oblikah krivulj za različne kombinacije parametrov, brez da bi se nam bilo treba ukvarjati z njihovimi dimenzijami oz. da bi krivulje skakale po grafu.

2 Naloga

Naloga od nas zahteva par stvari, a smo jih nekaj pravzaprav že naredili. Najprej moramo problem prevesti v brezdimenzijsko obliko, kar smo že storili ravno prej. Naprej nam naloga daje navodilo, da si pogledamo kakšna je optimalna rešitev pri poljubni končni hitrosti, kar je ta rešitev, ki smo jo izpeljali. Nato pa sledijo nadgradnje osnovne ideje. Prva stvar, ki si jo lahko ogledamo je, da vzamemo za funkcional še kaj drugega. Naj bi bilo zanimivo še gre potenca odvoda hitrosti proti neskončno. Zanimivo je tudi, da si pogledamo, kaj se zgodi, če dodamo še dodaten pogoj in minimiziramo tudi velikost hitrosti s kvadratičnim členom v funkcionalu. Za konec pa je možno si ogledati še periodne rešitve a la vozimo skozi več zaporednih semaforjev.

3 Opis reševanja

Reševanja sem se tokrat lotil nekoliko drugače kot ponavadi. Od prejšnjih sorodnih predmetov sem bil navajen takoj prijeti za Python and company (ustrezne knjižnice), ampak se je tu izkazalo reševanje analitično na list papirja bolj smotno. Kot predstavljeno v uvodu sem šel skozi izpeljavo rešitve in jo prevedel v brezdimenzijsko obliko. Nato sem si pogledal, kako se spreminja oblika krivulje za različne kombinacije parametrov. Grafe bom predstavil v naslednjem poglavju. Pravzaprav sem večino svojega tedna porabil na koncu za risanje in predstavo faznih prostorov za različne kombinacije parametrov. Za to sem uporabil Python in knjižnico `matplotlib`. Tudi animacijo sem naredil in se mi zdi, da je kar lepo uspela.

3.1 Funkcional višjih potenc

Nato na naslednji del naloge. Lotil sem se izpeljave rešitve za funkcional, ki sem ga zapisal takole:

$$\int_0^{t_0} a^n(t) dt = \int_0^{t_0} v^n(t) dt. \quad (15)$$

V takem primeru pridemo do malo bolj zahtevne diferencialne enačbe:

$$\ddot{v} + \frac{\lambda}{n(n-1)} \dot{v}^{2-n} = 0. \quad (16)$$

kar se v splošnem razreši v takle izraz:

$$v(t) = -\frac{\lambda}{n^2(n-1)^2} \int v^{1-n} dt + At + B. \quad (17)$$

Tu se zdaj spomnimo našega originalnega namena in sicer pošljemo $n \rightarrow \infty$. Preostane nam:

$$v(t) = At + B. \quad (18)$$

Torej v tem posebnem primeru optimalne rešitve predstavljajo enakomerno pospešeno gibanje. Če zahtevamo enake robne pogoje kot prej, dejansko dobimo enolično določeno konstantno rešitev, ki nam da kar ravno trajektorijo od začetne do končne točke. V tem primeru velja:

$$v_0 = \frac{l}{t_0}. \quad (19)$$

Če se pa odločimo, da v temu primeru ne bomo zahtevali tega, da prečkamo pri ekstremni hitrosti, potem pa so dovoljene res še ostale premice. V tem primeru velja:

$$v(t) = \frac{2}{t_0^2}(l - v_0 t_0)t + v_0. \quad (20)$$

Tudi v tem primeru preprosto dobimo brezdimenzijsko obliko, ki se glasi:

$$\nu(\tau) = 2\tau(\gamma - 1) + 1. \quad (21)$$

3.2 Omejitev še z velikostjo hitrosti

Lotimo se še predzadnjega dela naloge. V Lagrangian dobimo zaradi dodatnega pogoja oz. minimizacije še cv člen. To nam po Euler-Lagrangeovih enačbah da:

$$2\ddot{v} + -2Cv + \lambda = 0 . \quad (22)$$

Zaradi mojega poor time management-a sem bil primoran pogledati za rešitev na internetu. K sreči je Wolfram Alpha znal lepo rešiti. Pravi, da je splošna oblika:

$$v(t) = 2A \cos(\sqrt{C}t) + 2B \sin(\sqrt{C}t) - \frac{\lambda}{2C} . \quad (23)$$

Zdaj pa.. pot do izpeljave teh koeficientov je komplicirana in dolga. Robne pogoje ohranimo takšne kot prej. Po veliko dela in poenostavljanja sem prišel do rezultatov:

$$A = \cot(\sqrt{C}t_0) \left(l\sqrt{C} + \frac{\lambda t_0}{2\sqrt{C}} \right) , \quad (24)$$

$$B = l\sqrt{C} + \frac{\lambda t_0}{2\sqrt{C}} , \quad (25)$$

$$\lambda = 2C \left(\cot(\sqrt{C}t_0) \left(l\sqrt{C} + \frac{\lambda t_0}{2\sqrt{C}} \right) - v_0 \right) . \quad (26)$$

Tu imamo zaradi tega kako smo problem opisali še en dodaten parameter C . Poskusil sem ročno rešiti za koeficiente ampak je problem, ker dejansko naletim na neskončnost, ki je ne znam odpraviti. Nisem prepričan kako je najbolj smiselno postaviti dodatno vez. Poskusil sem iti čisto do konca, ampak sem naletel na protislovje, ki se ga tudi na silo ni dalo odpraviti. Tudi ročno ne. V splošnem se problem lahko povzame kot

$$\cos(\sqrt{C}t_0) = 1 . \quad (27)$$

kjer sta oba C in t_0 neničelna in to ne more veljati. Posledica tega je bila, da so integracijski koeficienti divergirali, kar se tudi nikakor ne zdi prav.

3.3 Periodične rešitve

Zadnji del naloge je bil, da si pogledamo še periodične rešitve. To pomeni, da se vozimo skozi več zaporednih semaforjev. To storimo tako, da v Lagrangian dodamo člene, ki dodatno motivirajo, k zveznim in periodičnim rešitvam. V tem primeru se Lagrangian glasi:

$$\mathcal{L} = \dot{v}^2(t) - \lambda_1 v + \lambda_2 \delta(t - nt_0) + \lambda_3 \frac{d}{dt}(\delta(t - nt_0)) \quad (28)$$

kjer je δ Diracova delta funkcija. Vidimo, da smo ob dodatku več vezi dobili tudi več Lagrangeovih multiplikatorjev. Posledično bomo potrebovali tudi več robnih pogojev. V tem primeru v bistu kar periodične:

$$v(0) = v(2t_0) = v_0 , \quad (29)$$

$$\dot{v}(0) = \dot{v}(2t_0) = 0 , \quad (30)$$

$$(31)$$

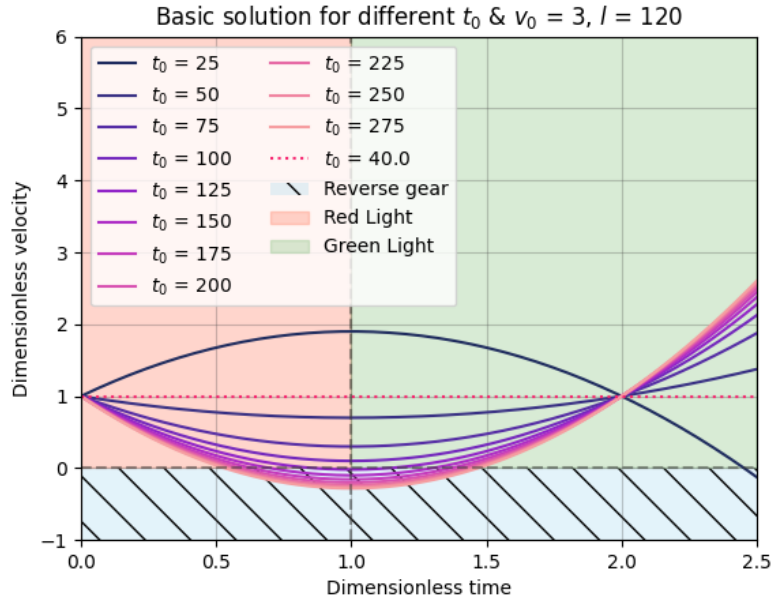
Pomembna razlika tu je, da moramo eksplicitno upoštevati dodatne delta vezi pri Euler-Lagrangeovih enačbah. Takole:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} + \lambda_2 \delta(t - nt_0) + \lambda_3 \delta(t - nt_0) = 0 . \quad (32)$$

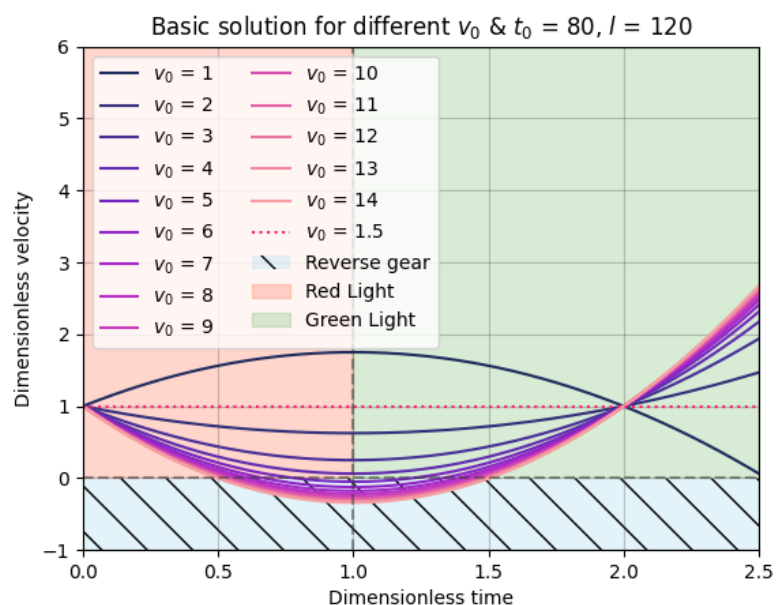
V tem primeru pa iskreno nisem znal priti do rešitve. Poskušal sem z različnimi načini, ampak pri nobeni nisem znal priti do konca. V glavnem se mi zatakne pri integriranju delta funkcije tako velikokrat zapored. Druga matematična orodja tudi niso znala dati smiselni odgovor. Sicer je bilo že na tem, da definiram svojo periodično stopničasto funkcijo, njene integrale in odvode etc., kar zelo naporno.

4 Rezultati

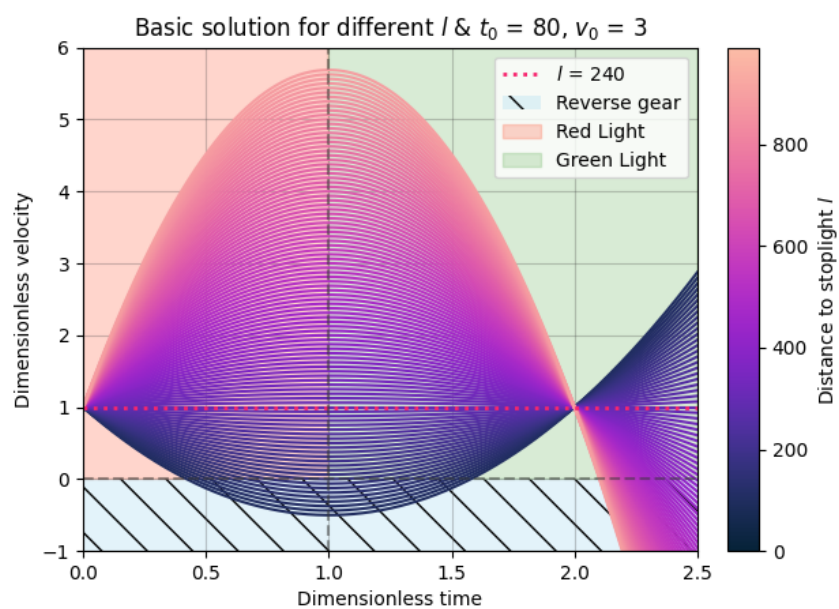
Poglejmo si zdaj dobljene rezultate. Najprej si pogledjmo, kako se spreminja oblika krivulje za različne kombinacije parametrov. Začnimo z osnovnim primerom.



Slika 1: Primeri optimalne rešitve za različne t_0 .



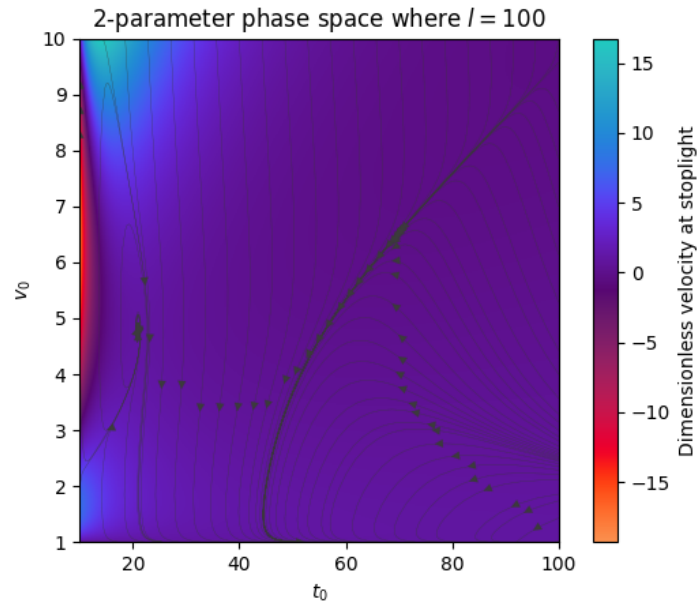
Slika 2: Primeri optimalne rešitve za različne v_0 .



Slika 3: Primeri optimalne rešitve za različne l .

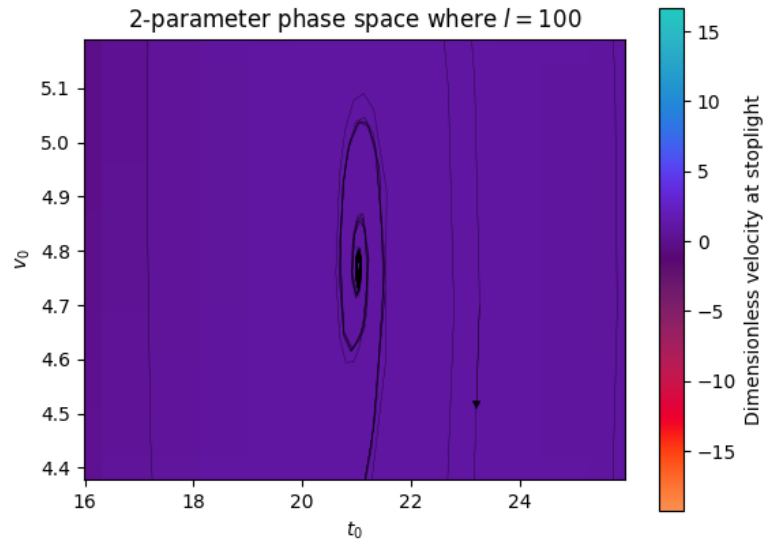
Zagotovo lahko rečemo, da so rešitve iz iste družine funkcij. Zelo dobro se vidi njihova pričakovana parabolična odvisnost, kot smo pričakovali. Zanimivo mi

je, kako preprosto model zaide v negativne hitrosti, kljub zahtevi o pozitivnosti. Kar se mene tiče, te trajektorije ne predstavljajo nekaj zelo smiselne rešitve. Želim si, da bi imel več energije komentirati te grafe, ker sem se potrudil, da sem jih narisal, ampak je ura že tako pozna, da sem komaj še buden. Kot zanimivost pa lahko na hitro še o fazne diagrame.



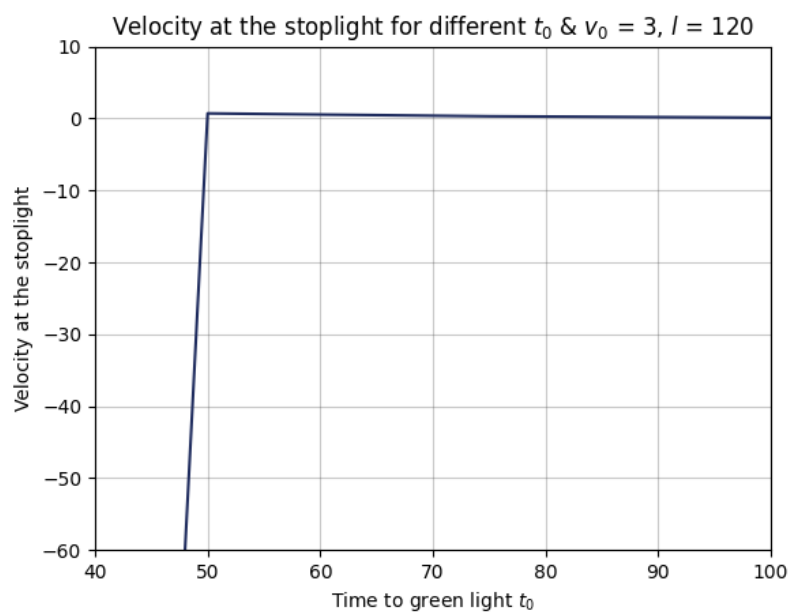
Slika 4: Fazni prostor parametrov t_0 in v_0 .

Opazil sem tudi to zanimivo strukturo, ki se rada širi navzgor.

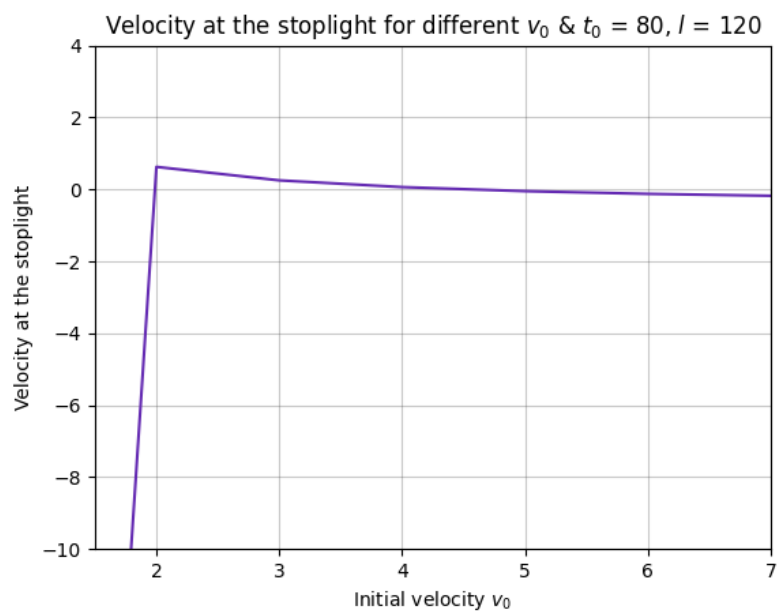


Slika 5: Zanimiva struktura opažena v faznem prostoru parametrov t_0 in v_0 .

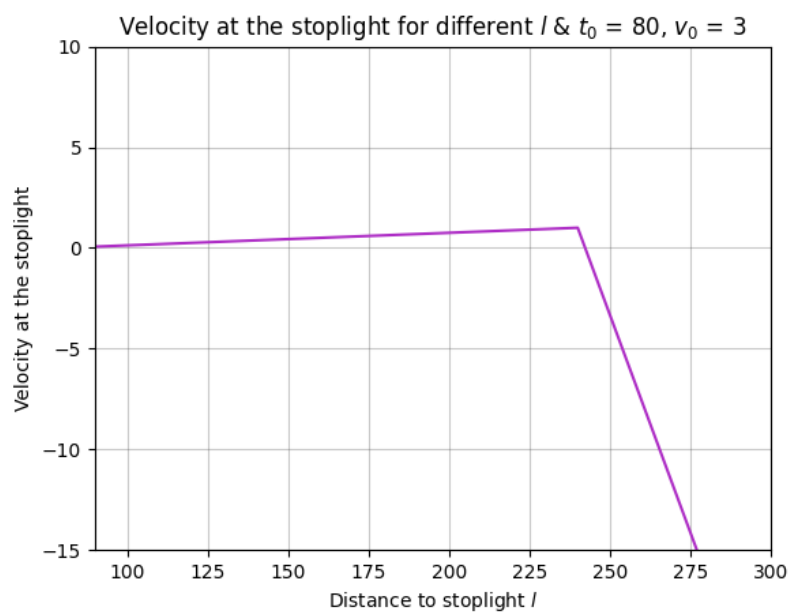
Skratka ta pojav negativnih hitrosti semaforja se mi je zdel zelo zanimiv, zato sem naredil kratko skripto, ki to preuča. Izkaže se, da je območje pozitivnih vrednosti res pravzaprav precej majhno.



Slika 6: Hitrost pri prečkanju semaforja pri različnih t_0 .

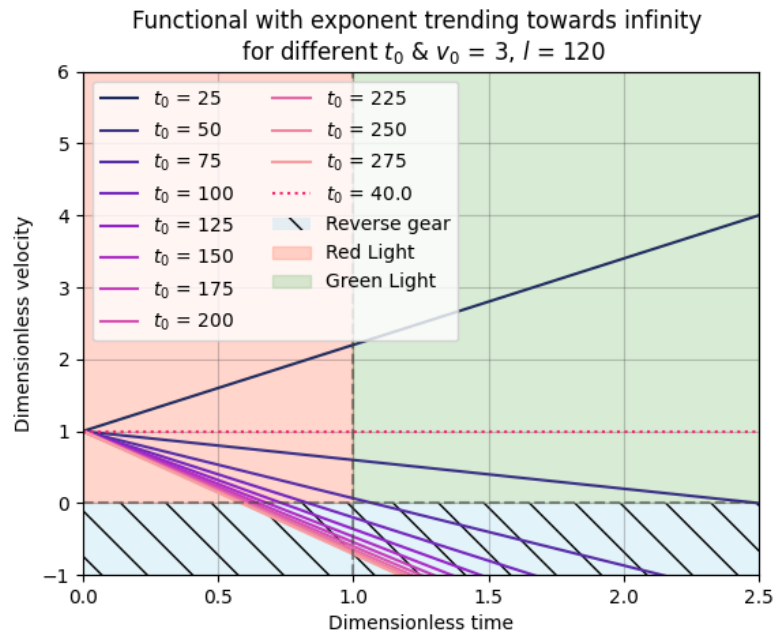


Slika 7: Hitrost pri prečkanju semaforja pri različnih v_0 .

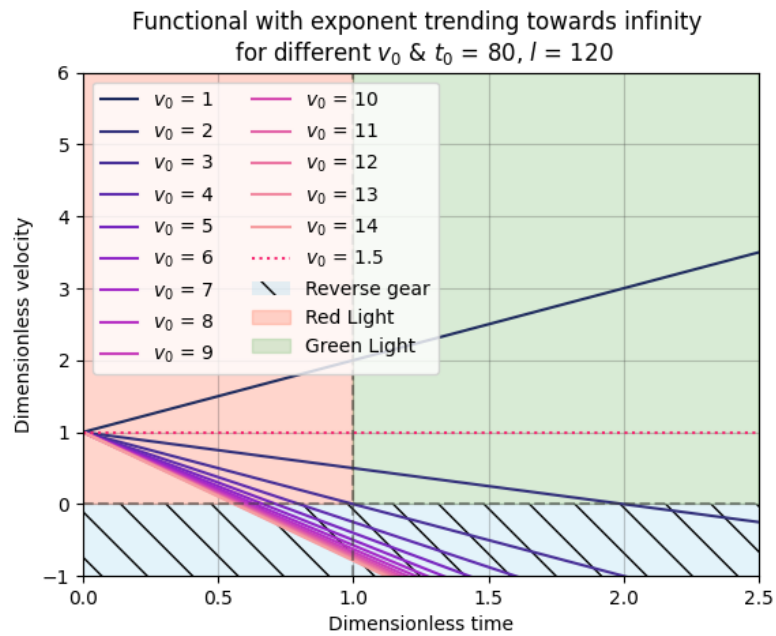


Slika 8: Hitrost pri prečkanju semaforja pri različnih l .

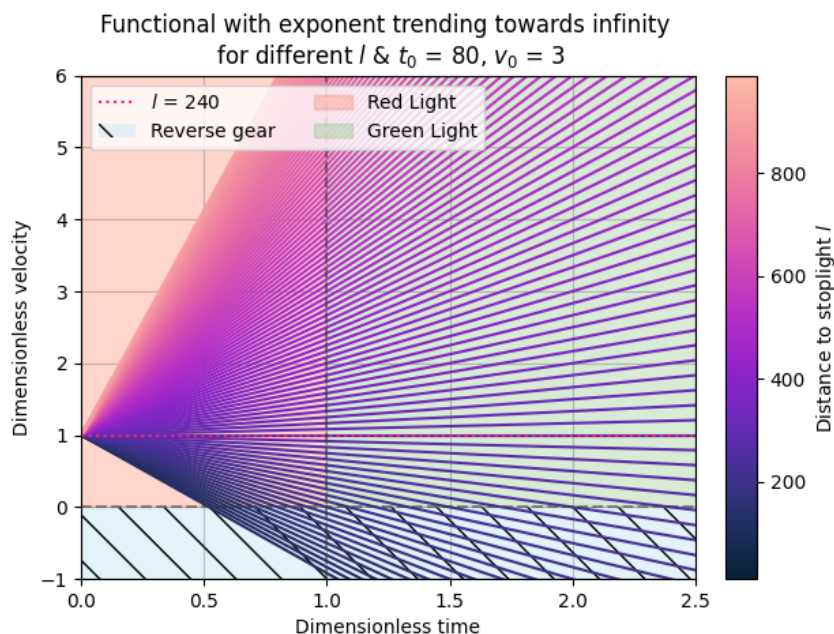
Poglejmo si sedaj še limito, ko gre potenca funkcionala proti neskončnosti. Enako kot prej sem naredil tri grafe, ki prikazujejo odvisnost hitrosti od časa za različne t_0 , v_0 in l .



Slika 9: Primeri optimalne rešitve za različne t_0 v limiti $n \rightarrow \infty$.



Slika 10: Primeri optimalne rešitve za različne v_0 v limiti $n \rightarrow \infty$.



Slika 11: Primeri optimalne rešitve za različne l v limiti $n \rightarrow \infty$.

Rezultati so takšni kot smo jih pričakovali in tako kot sem komentiral že prej. Zanimivo mi je, da sem to posebno rešitev, kjer je trajektorija vodoravna, že pred izračunom tega dela naloge.

5 Komentarji in izboljšave

Iskreno si želim, da bi si ta teden boljše manageiral svoj čas in bi s tem lahko napisal tudi bolj kvalitetno poročilo. Tole je nekako recimo temu, delovna kopija. Precej idej sem še imel za razširitve. V glavnem me zanima kaj se zgodi, če dodaš vir naključnosti v sistem, v smislu negotove vožnje zaradi morebitnih ovir na cesti itd.

Od kar ste nam povedali za Modelsko Analizo 1, ko ste nas še imeli verjetnost za fizike, sem se veselil, da bi mi uspelo prit do sem. Zato mi je še dodatno škoda, da sem le napol buden. Nekako podzavestno pišem to poročilo. Ampak yes.. time management bi bil glavni improvement, ki bi ga naredil.