

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Populacijski modeli

4. naloga pri Modelski Analizi 1

Avtor: Marko Urbanč (28232019)
Predavatelj: prof. dr. Simon Širca
Asistent: doc. dr. Miha Mihovilovič

1.11.2023

Kazalo

1	Uvod	2
1.1	Picnic model (SIR model)	2
1.2	Extended picnic model	2
1.3	Rabbits and foxes model (Lotka-Volterra model)	3
1.4	Laser model	3
2	Naloga	3
3	Opis reševanja	4
3.1	Iskanje boljše metode za reševanje sistema ODE	4
3.1.1	Cellular automata	4
3.1.2	Parallel Jacobi Waveform relaxation method	4
4	Rezultati	5
4.1	Picnic model	5
4.2	Extended picnic model	9
4.2.1	Primer rešitve	11
4.3	Rabbits and foxes model	12
4.4	Laser model	17
5	Komentarji in izboljšave	20
	Literatura	21

1 Uvod

Populacijski modeli so modeli, ki opisujejo zasedbo definirane populacije ob danih pogojih. Matematično gledano, lahko populacijske modele predstavimo s sistemom navadnih diferencialnih enačb, ki opisujejo spremembo populacije v odvisnosti od časa. Vsaka diferencialna enačba predstavlja en razred posameznikov znotraj populacije, vsebina sistema diferencialnih enačb samih pa pravzaprav opiše prenašanje posameznikov med razredi.

1.1 Picnic model (SIR model)

Glede na to da ptički že čivkajo, v znak kako malo časa še imam, bo lažje če matematične konstrukte opišem na konkretnem primeru. Pri tej nalogi si bomo pogledali klasičen primer SIR modela (angl. *Susceptible, Infected, Recovered*), ki opisuje širjenje nalezljive bolezni v populaciji, razen da sem jaz okužbo z boleznijo, zaradi anksioznosti, ki mi te povzročajo, zamenjal z navalom piknikov. Osnovni model vsebuje tri razrede posameznikov, ki jih označimo z S , I in R . To so torej posamezniki, ki so dovzetni za piknik, tisti ki bodo šli na piknik in tisti, ki so že bili na pikniku. Enačbe, ki opisujejo prehajanje posameznikov med razredi so sledeče:

$$\dot{S} = -\alpha SI, \quad (1)$$

$$\dot{I} = \alpha SI - \beta I, \quad (2)$$

$$\dot{R} = \beta I. \quad (3)$$

Tu smo uvedli nekaj parametrov. α predstavlja verjetnost, da se bo oseba, ki je dovzetna za piknik, odločila sama iti na piknik, ko vidi nekoga, ki je na pikniku. Temu sem rekel *Picnic influence*. β pa predstavlja verjetnost, da se bo oseba, ki je na pikniku, odločila, da bo šla domov oz., da piknika naslednji dan ne bo več ponovila. To sem poimenoval *Picnic burnout rate*.

1.2 Extended picnic model

Pri tej nalogi sem si že na vsem začetku otežil delo in sem ustvaril nadgrajen model, ki vsebuje še dodatke. Zdelo se mi je malo nesmiselno, da bi vsi pikniki potekali na istem mestu, zato sem uvedel še nekaj lokacijskih razredov, ampak verjetnost za prehod v njih ni konstantna. Za vsak kraj sem dodal še odvisnost od letnega časa, poleg tega pa še odvisnost od vremena. Kakšno vreme je zaželeno je odvisno od lokacije. Dodatno imamo še možnost spontanega piknika in možnost, da se oseba, ki je že imela piknik, odloči, da bo šla še enkrat. Enačbe, ki opisujejo prehajanje posameznikov med razredi so sledeče:

$$\dot{S} = -\vec{\alpha} \cdot S\vec{I} - \vec{\gamma} \cdot \vec{I}, \quad (4)$$

$$\dot{\vec{I}} = \vec{\alpha} \cdot S\vec{I}, \quad (5)$$

$$\dot{R} = \vec{I}\beta \cdot \vec{I} - \psi R. \quad (6)$$

Tu smo uvedli nekaj novih parametrov. $\vec{\alpha}$ predstavlja vektor verjetnosti, da se bo oseba, ki je dovzetna za piknik, odločila za posamezno lokacijo. $\vec{\gamma}$ predstavlja vektor verjetnosti, da se bo oseba spontano odločila za piknik na posamezni lokaciji. $\vec{I}$ predstavlja vektor enic, β pa predstavlja verjetnost, da se bo oseba, ki je na pikniku, odločila, da bo šla domov oz., da piknika naslednji dan ne bo več ponovila. ψ predstavlja verjetnost, da se bo oseba, ki je že imela piknik, odločila, da bo šla še enkrat. Lokacije, ki sem jih uvedel so: *plaža, park, gozd, nekje notraj*.

O reševanju tega modela kasneje, ampak bottom line je, da je zelo neprijetno.

1.3 Rabbits and foxes model (Lotka-Volterra model)

Nobena naloga iz populacijskih modelov ne bi bila popolna brez nekega Lotka-Volterra modela. Ta model opisuje dinamiko populacije plenilcev in plena. V našem primeru bodo plenilci predstavljali lisice, plen pa zajci. Enačbe, ki opisujejo prehajanje posameznikov med razredi so sledeče:

$$\dot{R} = \alpha R - \beta RF - \sigma R, \quad (7)$$

$$\dot{F} = \gamma RF - \delta F. \quad (8)$$

α predstavlja stopnjo rodnosti zajcev, β predstavlja stopnjo smrtnosti zajcev zaradi lisic, σ predstavlja stopnjo smrtnosti zajcev zaradi starosti ali bolezni, γ predstavlja stopnjo rodnosti lisic, δ predstavlja stopnjo smrtnosti lisic.

1.4 Laser model

Da pokažemo, da ni treba, da so populacijski modeli vedno povezani z neko biološko populacijo, si za konec pogledamo še model, ki opisuje dinamiko populacije fotonov v laserskem resonatorju. Imamo zoper dva razreda, število fotonov in število atomov v vzbujenem stanju. Enačbe, ki opisujejo prehajanje med razredi so sledeče:

$$\dot{P} = Bpa - \alpha p, \quad (9)$$

$$\dot{A} = R - Bpa - \beta a, \quad (10)$$

Tu je B koeficient stimulirane emisije, R črpanje atomov v vzbujeno stanje, α koeficient izgub fotonov, β pa koeficient spontanega sevanja vzbujenih atomov.

2 Naloga

Naloga od nas želi, da rešimo prej omenjene modele in jih raziščemo. Zanimiva vprašanja/naloge so lahko, recimo:

- Kako se spremeni SIR model če stanje bolezni razdelimo na več razredov?

- Kako cepljenje vpliva na SIR model?
- Kakšni so fazni diagrami?
- Oglej si obhodne dobe v odvisnosti od začetnega stanja za Lotka-Volterra model.
- Določi ravnovesno stanje v odvisnosti od moči črpanja za laser model.

3 Opis reševanja

Oh boy tokrat je bilo reševanje res pestro in spet nisem dobil nekaj fizikalno zanimivih rezultatov, ker sem poskušal ukrotiti numerične metode. Kot je navada sem se lotil programiranja v Pythonu. Sisteme diferencialnih enačb sem reševal z Runge-Kutta 4 metodi, kar iz `scipy.integrate` knjižnice. Poleg tega pa je seveda zraven bil še standardni nabor knjižnic za numerično računanje, `numpy` in `matplotlib`. V nadaljevanju pa sem uporabljal tudi `mpi4py` in `pandas`, ker sem močno poskušal paralelizirati reševanje diferencialnih enačb, da bi lahko bolj učinkovito rešil razširjen piknik model.

3.1 Iskanje boljše metode za reševanje sistema ODE

Kot sem že omenil, sem za reševanje sistemov ODE uporabil Runge-Kutta 4 metodo. Problem je tudi ta, da se po klasičnem pristopu rešuje sisteme enačb zaporedno, kar je zelo počasno če imaš zakompliciran sistem. Zato sem se odločil, da bom poskusil paralelizirati reševanje sistema ODE, ker you know.. sem očitno hellbent na paralelizacijo.

3.1.1 Cellular automata

Prva ideja, ki mi je prišla na misel je bila, da bi sistem ODE predstavil kot celico v nekem celularnem avtomatu. Torej bi imel mrežo celic, ki bi predstavljale posamezne razrede, vsaka celica pa bi imela svojo diferencialno enačbo. Tako bi lahko reševanje sistema ODE paraleliziral tako, da bi avtomat razdelil na več procesov. Problem v tem je komunikacija mejnih celic med procesi. Čeprav zdaj ko pišem poročilo in ko vem, koliko časa sem uporabil za nadaljne metode, mi je zelo žal, da nisem tej posvetil več časa, ker imam upanje, da bi pa mogoče le lahko delovala. Postopek je opisan v članku [1].

Predvsem sem imel tu probleme z implementacijo pravil, ki bi predstavljale naše diferencialne enačbe. Kot rečeno, in hindsight bi mogoče lahko temu posvetil več časa, ker se vseeno zdi preprostejše kot naslednja metoda.

3.1.2 Parallel Jacobi Waveform relaxation method

Mislil sem si, okay, manjši podvigi ne uspejo, čas je za nekaj večjega. Med iskanjem po spletu o paralelnih metodah za reševanje sistemov ODE sem naletel na članek [2]. Ta opisuje zanimivo metodo za reševanje sistemov ODE, ki uporablja

Jacobijevo iteracijo v kombinaciji z waveform relaxation metodo, kjer razvijamo matriko koeficientov linearnega sistema. Zadeva se sliši precej praktična za paralelizacijo z MPI, zato sem se odločil, da jo poskusim implementirati.

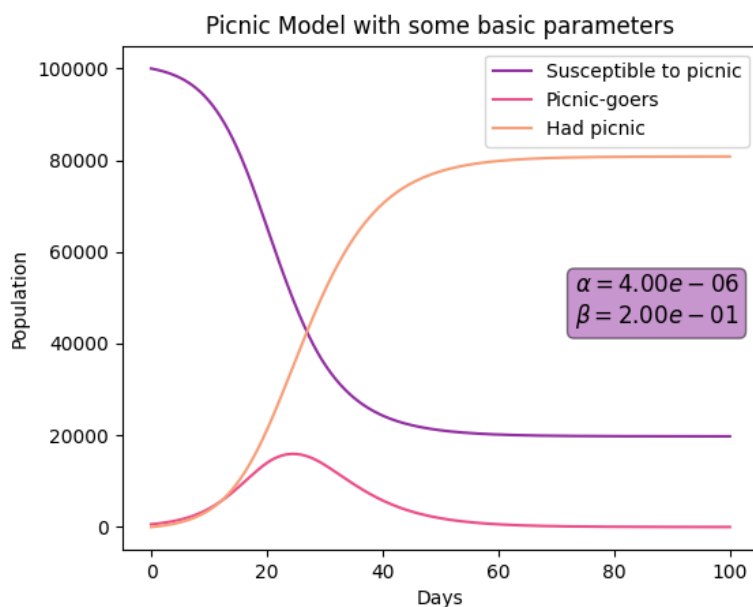
Porabil sem dobrih 14 ur, da sem spravil vse skupaj v neko obliko. Pravim v neko obliko, ker pravzaprav, je prava umetnost, da po 700 vrsticah kode, dobim nazaj rezultat, ki je v času konstanten. Izkaže se, da je precej zahtevno spremljati časovno evolucijo sistema pri tej metodi, če je stvar paralelizirana. Kakorkoli, puščam kot odprt problem in upam, da bo kdo za mano uporabil to kot inspiracijo in naredil res nekaj fantastičnega.

4 Rezultati

Okay, to je bilo dovolj o mojih neuspehih, zdaj pa k rezultatom.

4.1 Picnic model

Najprej si pogledjmo kako zgleda tipična rešitev, za neke osnovne parametre. Začetno stanje je $S(0) = 100000$, $I(0) = 600$, $R(0) = 0$. Rezultat je prikazan na sliki 1.

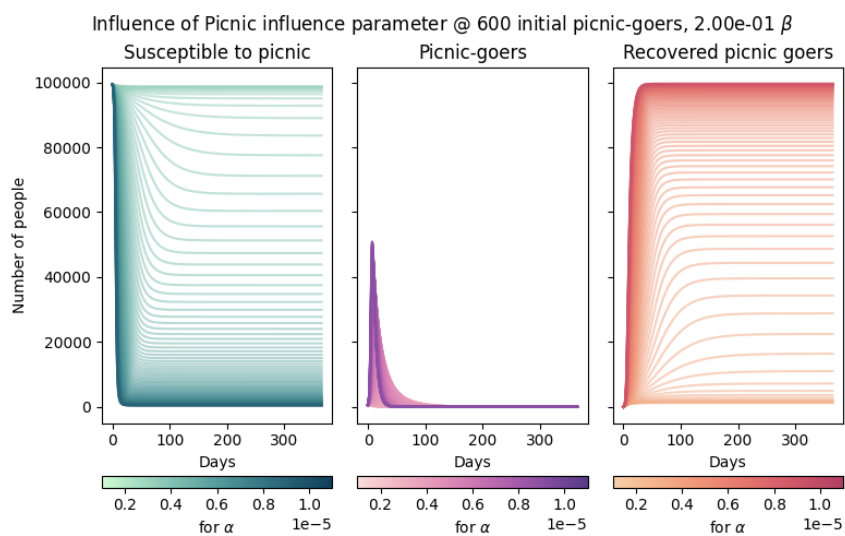


Slika 1: Rezultat reševanja SIR modela.

Kot pričakovano od nekega epidemiološkega modela, se število okuženih najprej povečuje, dokler ne doseže maksimuma, nato pa se začne zmanjševati. Med tem ustrezno prehajata število dovzetnih in ozdravljenih (že imeli piknik). Meni se

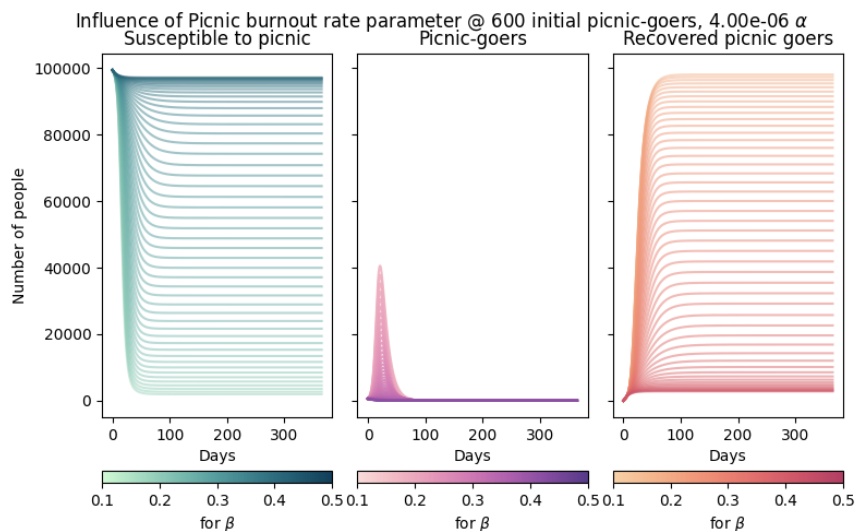
je zdelo zabavno, da bi poskušali imeti v nekem mestu čim večji piknik. Sprva sem želel uporabiti kakšno naprednejšo metodo za optimizacijo, ampak glede na to da sem imel že pripravljene podatke za fazni diagram, sem se odločil, da bom kar to uporabil.

Pred tem pa si pogledjmo kako se spreminjajo krivulje v odvisnosti od parametra α . Na sliki 2 je prikazan rezultat za različne vrednosti parametra α .



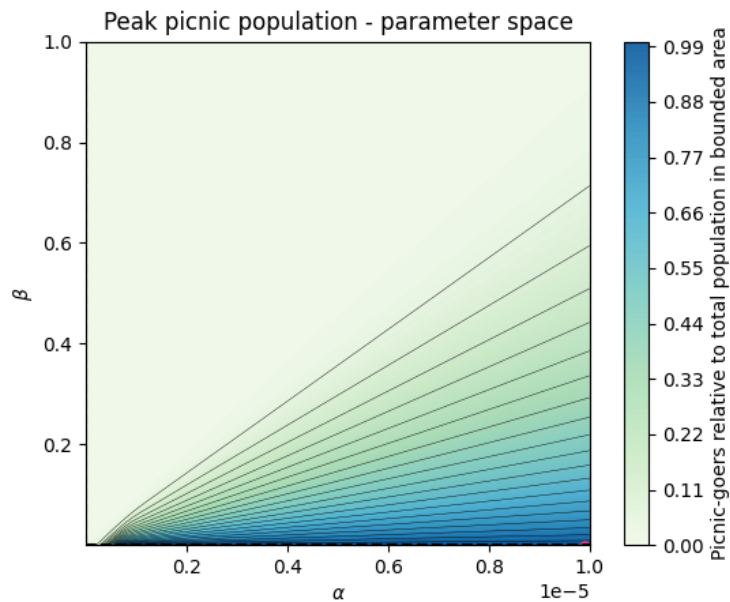
Slika 2: Rezultat reševanja SIR modela za različne vrednosti parametra α .

Podobno lahko naredimo tudi za parameter β . Rezultat je prikazan na sliki 3.



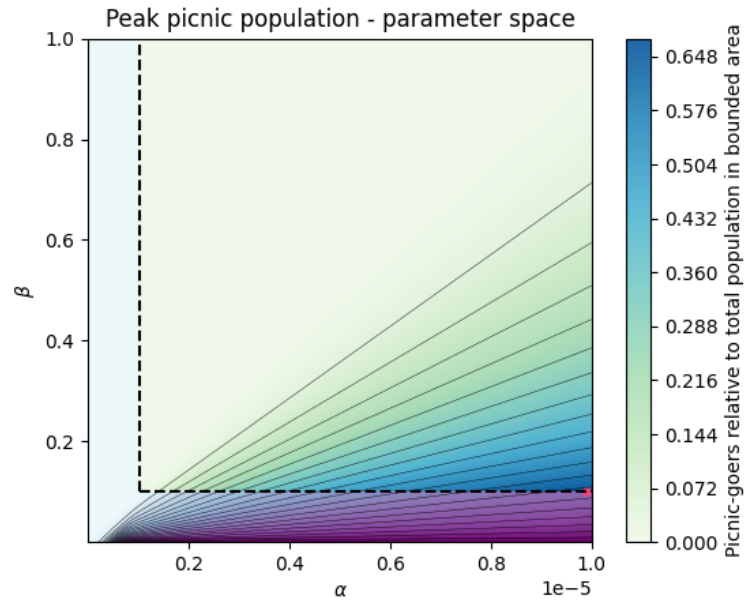
Slika 3: Rezultat reševanja SIR modela za različne vrednosti parametra β .

Mogoče bolj zanimiv prikaz pa je fazni diagram, ki je prikazan na sliki 4. Kot z vrednost sem vzel največje število piknikarjev v enem dnevu za dane parametre.



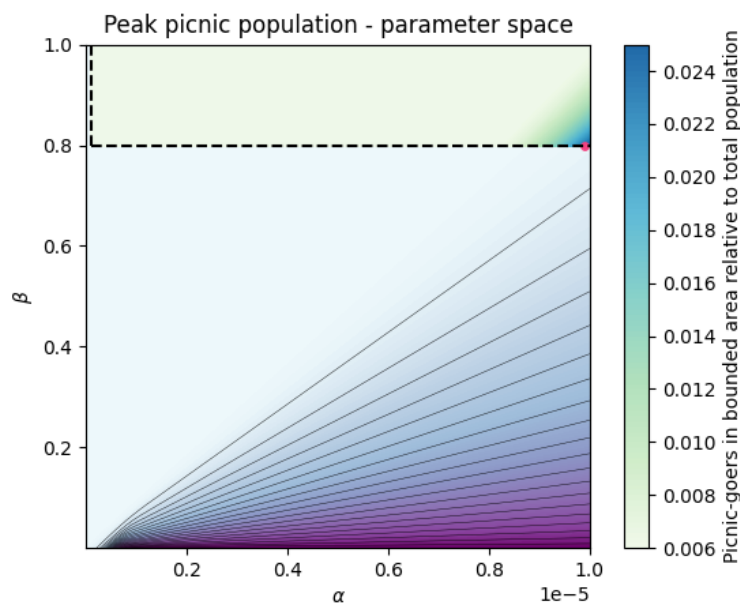
Slika 4: Fazni diagram za SIR model.

Na tem faznem diagramu zdaj iščemo največji piknik. Zdelo se mi je dodatno zanimivo, če bi lahko še omejil parametre α in β na neka območja in tam poiskal največji piknik. To je prikazano na sliki 5.



Slika 5: Fazni diagram za SIR model z omejenimi parametri.

Poskusil sem se omejiti na bolj realistično območje parametrov. S tem mislim, da bi se ljudje hitro naveličali piknikov in je zato β večji hkrati pa je treba tudi več, da se nekdo odloči iti na piknik, kar pomeni, da je α manjši. Tako sem dobil sliko 6 za parametre, ki so recimo da bolj realistični.



Slika 6: Fazni diagram za SIR model z omejenimi parametri.

Na koncu sem dobil za maksimume naslednje vrednosti parametrov:

Scenario	α	β	Rel. peak
Realistic	10e-6	0.80	0.025
Near-Perpetual	10e-6	0.10	0.666
Unbounded	10e-6	0.0001	0.999

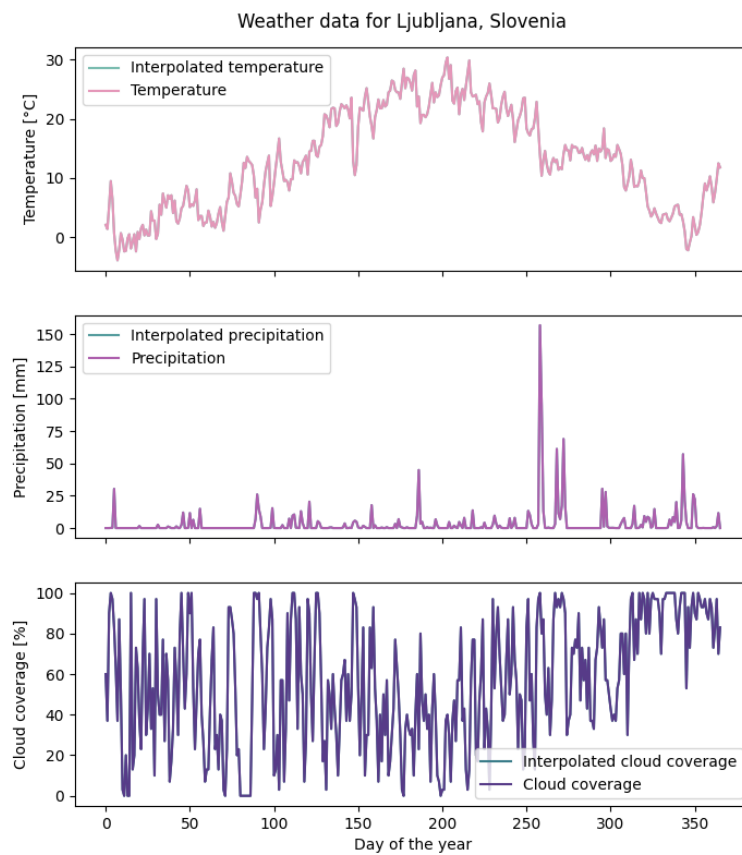
Tabela 1: Maksimumi za različne scenarije.

Kot pričakovano je največji piknik v primeru, ko je β čim manjši, takrat se noben ne naveliča piknikov in kmalu gredo vsi na piknik.

4.2 Extended picnic model

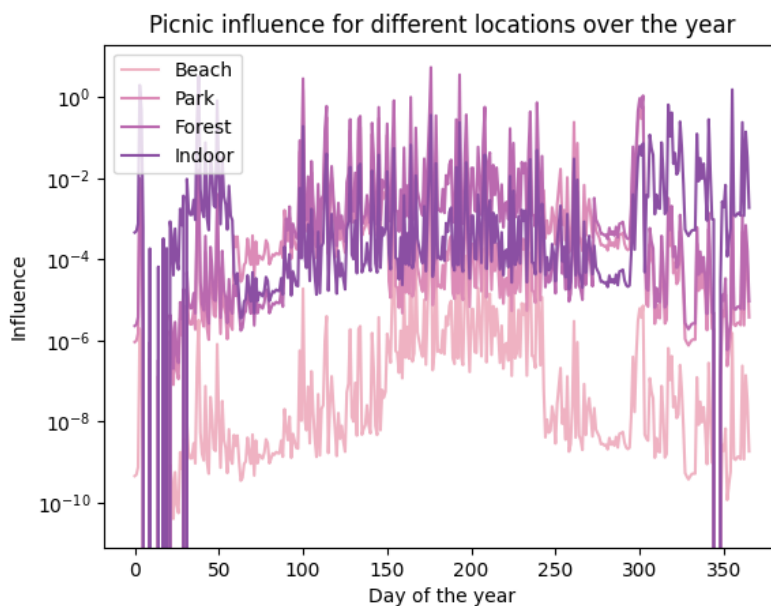
Vremenske podatke sem dobil iz ARSO arhiva. Zaradi preprostosti sem uporabil samo podatke za Ljubljano, čeprav če smo čisto iskreni bi bilo bolj smiselno uporabiti podatke za več lokacij. But I digress, že tako sem model tako zakompliciral, da ne vem če ga znam rešiti. Za verjetno veliko večino parametrov model divergira, čeprav niti tega ne morem nekaj dobro preveriti, ker je toliko prostih parametrov, da težko pogledam kakršen koli fazni diagram.

Če ne drugega za namen dokumentacije, je letno vreme v Ljubljani prikazano na sliki 7. Za namen tega modela sem ekstahiriral dnevne padavine, temperaturo in oblačnost.



Slika 7: Letno vreme v Ljubljani.

Hah, dodaten zaplet tu je bil, da sem moral interpolirati podatke, ker so bili podatki za vreme dani po dnevih, moja integracijska shema pa je želela imeti poljubno ločljivost. Glede na to, da se zelenih črt ne vidi na sliki 7, to pomeni, da je interpolacija uspela. Če potem pogledamo samo komponente vektorja $\vec{a}$, skozi leto vidimo kako divje se je zakompliciral sistem v primerjavi z osnovnim modelom. Rezultat je prikazan na sliki 8.

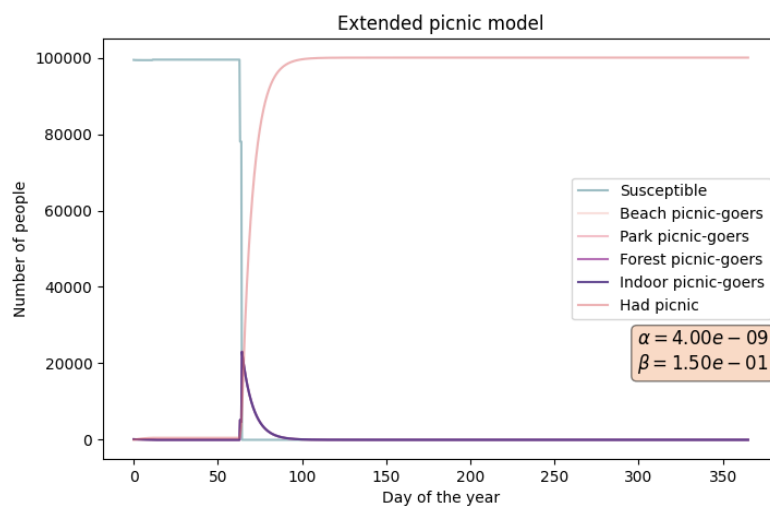


Slika 8: Letno obnašanje komponent vektorja $\vec{\alpha}$. Modelirano po vremenskih podatkih za Ljubljano.

Recimo zelo jasno se vidi, kako je v poletnih mesecih α_1 za stopnico večji, ker je takrat bolj ugodno za njegovo lokacijo (plaža). Glaven faktor pri ustvarjanju špic pa so padavine, ki jih zvezno upoštevam. Več kot je padavin večji je vpliv (lahko pozitiven ali negativen).

4.2.1 Primer rešitve

Predstavim lahko primer rešitve kjer so interakcijski parametri (torej vpliv vremena in letnega časa), postavljeni na 1. Začetno stanje je $S(0) = 100000$, $I(0) = 600$, $R(0) = 0$, kjer je potem $I(0)$ enakomerno razdeljen med razredi. Rezultat je prikazan na sliki 9.

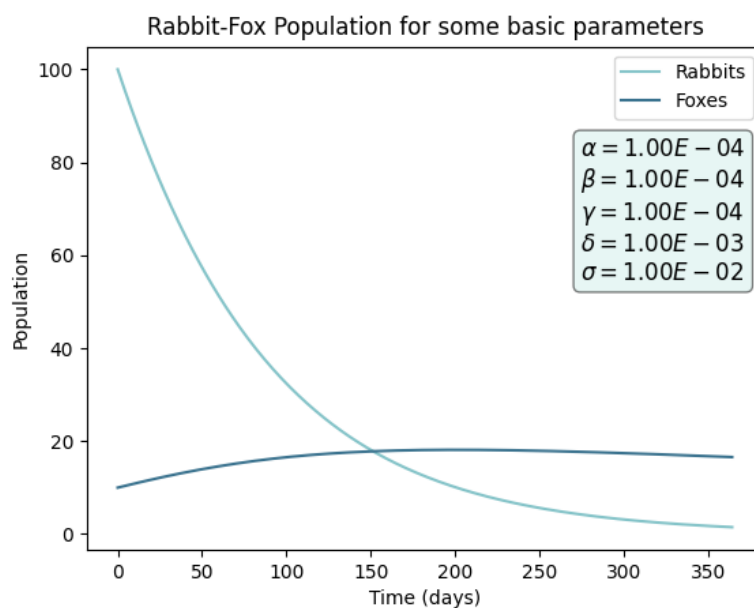


Slika 9: Rezultat reševanja razširjenega piknik modela.

Če kdo zna rešiti ta model za splošne parametre naj me prosim kontaktira.

4.3 Rabbits and foxes model

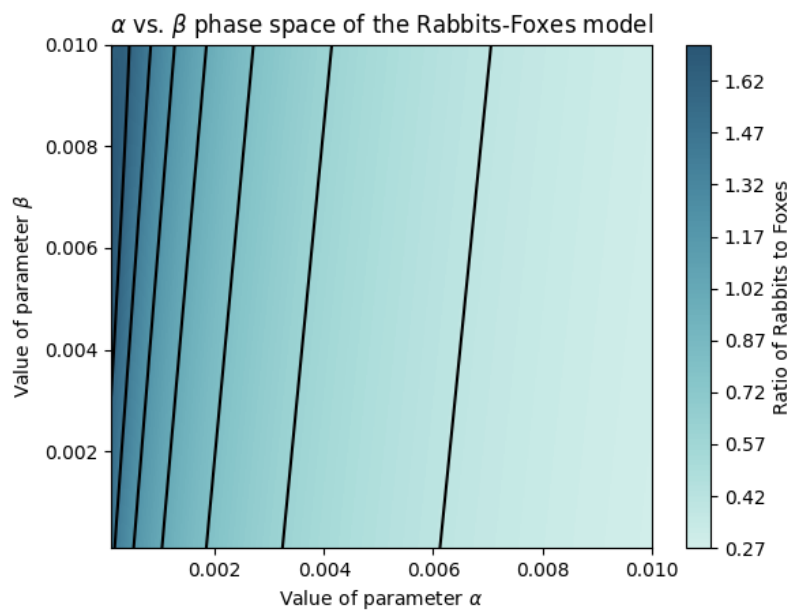
Znova si pogledjmo tipično rešitev. Začetno stanje je $R(0) = 100$, $F(0) = 10$. Rezultat je prikazan na sliki 10.



Slika 10: Rezultat reševanja Lotka-Volterra modela.

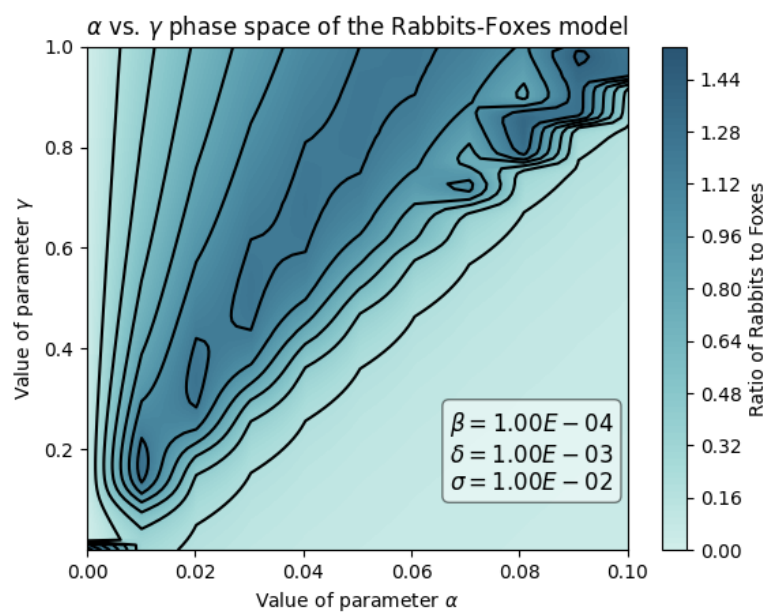
Vidimo, da za te dane parametre, lisice pojedó vse zajce in zato populacija zajcev izumre, populacija lisic naraste in potem začnejo umirati zaradi drugih razlogov.

Glavno kar sem tukaj uspel narediti v kratkem času, ki mi je še preostal je, da sem si narisal fazne diagrame za različne kombinacije parametrov. Na sliki 11 je prikazan fazni diagram za Lotka-Volterra model, kjer sem spreminjal parametra α in β .

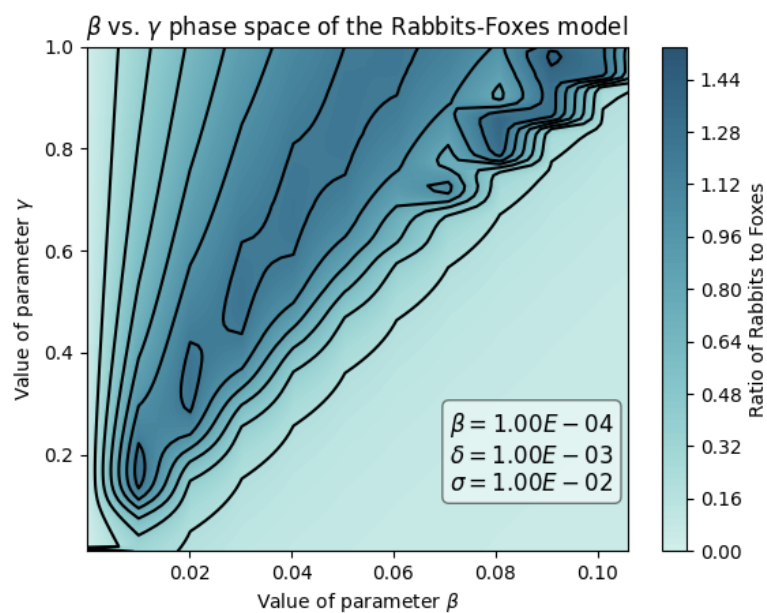


Slika 11: α vs. β fazni diagram za Lotka-Volterra model.

Tu sem se odločil, da bom kot vrednost z risal razmerje med populacijo zajcev in lisic, v smislu koliko zajcev je na voljo za vsako lisico. Poglejmo še fazna diagrama kjer sem spreminjal parametra α in γ ter β in γ . Rezultat je prikazan na slikah 12 in 13.



Slika 12: α vs. γ fazni diagram za Lotka-Volterra model.



Slika 13: β vs. γ fazni diagram za Lotka-Volterra model.

Tu se pojavi ena zanimivost, ki mi ni čisto popolnoma jasna. Sliki 12 in 13 sta pravzaprav enaki. Ne sanja se mi zakaj. Res je da sem jima dal isto generično

območje parametrov, ampak vseeno se mi zdi nenavadno. Pomislek imam tudi na to, da je mogoče nekaj narobe z mojim programom, še posebej ker sem ta del pisal v zadnjem hipu. Nisem uspel odkriti kake napake. Uvesti moramo:

$$f = \frac{\beta}{\alpha} f, \quad (11)$$

$$r = \frac{\delta}{\gamma} r, \quad (12)$$

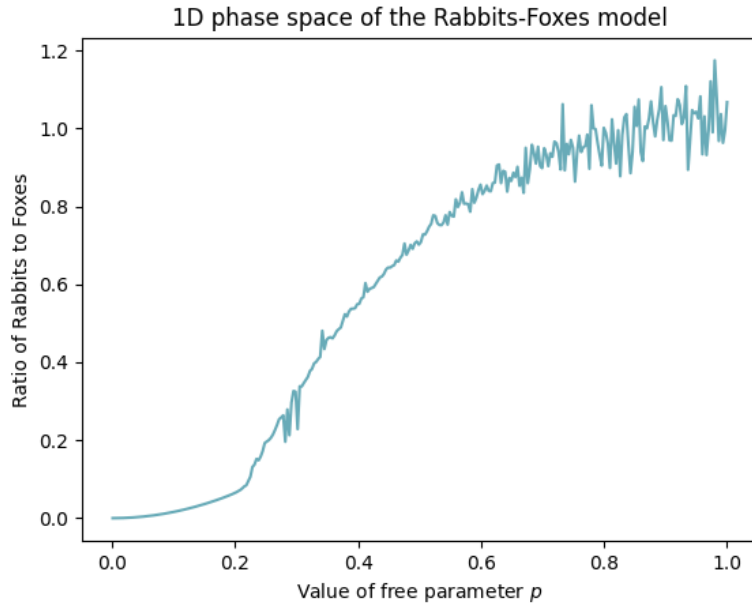
$$\tau = \sqrt{\alpha\gamma} t. \quad (13)$$

Pri tem se sistem enačb prepíše v:

$$\dot{r} = pr(1 - f), \quad (14)$$

$$\dot{f} = \frac{f}{p}(r - 1), \quad (15)$$

kjer je $p = \sqrt{\alpha/\gamma}$ naš novi edini prosti parameter. Pogledal sem, kako je videti fazni diagram v eni dimenziji. Rezultat je prikazan na sliki 14.

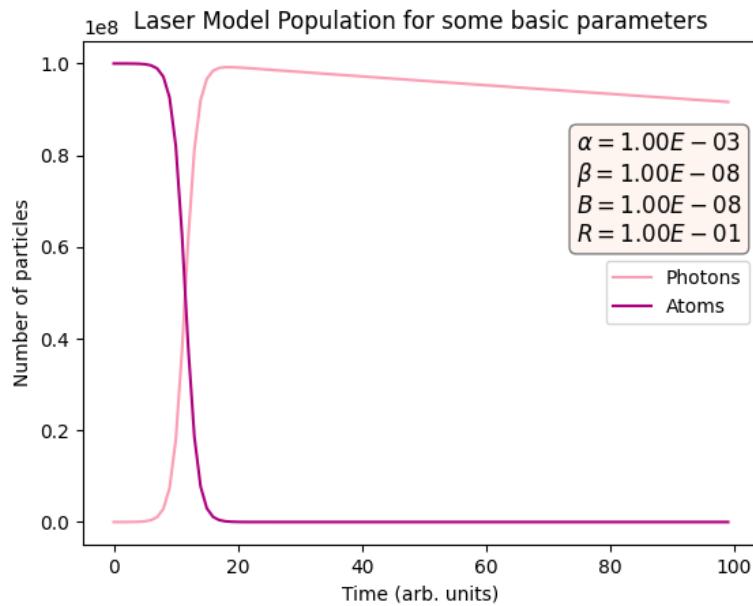


Slika 14: Fazni diagram za Lotka-Volterra model v eni dimenziji.

Sem precej presenečen nad obliko. Do neke vrednosti okoli $p = 0.2$ je krivulja zelo gladka, nato pa se začnejo pojavljati neke oscilacije, kjer amplitude nihanj narašča z večanjem p . Želim si, da bi imel več časa, da bi lahko to bolj raziskal.

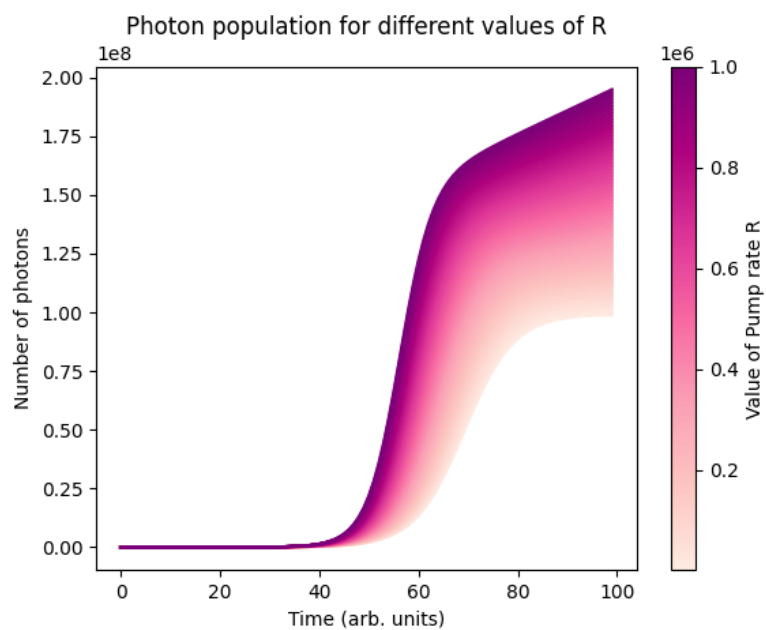
4.4 Laser model

Poglejmo si tipično rešitev. Začetno stanje je $P(0) = 100$, $A(0) = 10^8$. Rezultat je prikazan na sliki 15.



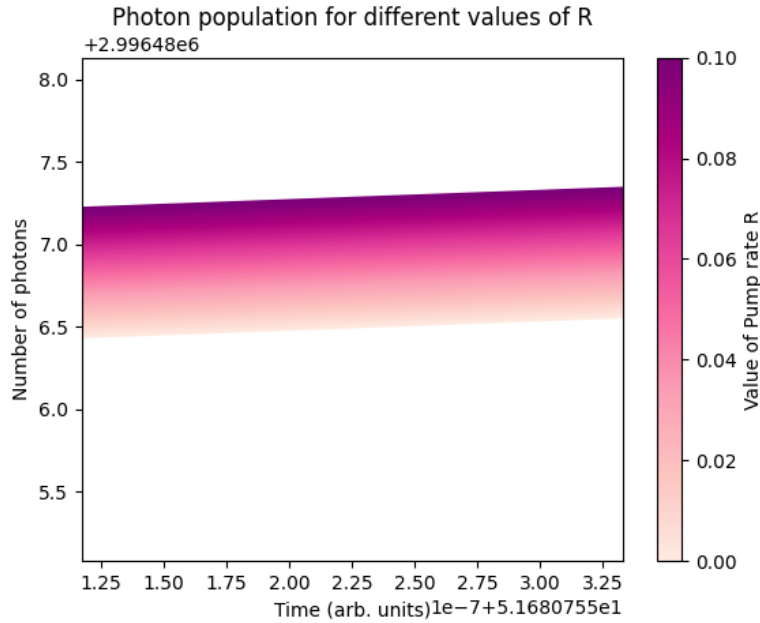
Slika 15: Rezultat reševanja laser modela.

Nič nepričakovanega tu. Populacija fotonov narašča, populacija atomov v vzbujenem stanju pa pada. Nato zaradi izgub fotonov počasi začnejo padati tudi fotoni. Želel sem si pogledati, kako je odvisen rezultat od moči črpanja. Rezultat je prikazan na sliki 16.



Slika 16: Rezultat reševanja laser modela za različne vrednosti moči črpanja.

Nisem pričakoval, da bo potrebno tako veliko črpanje, da se bo sploh poznala razlika. Pred tem sem uporabljal manjše vrednosti moči črpanja, ampak se razlika pozna šele pri šesti decimaliki. To sem skušal prikazati na sliki 17, kjer je prikazan rezultat za manjše vrednosti moči črpanja z zelo veliko povečavo.



Slika 17: Rezultat reševanja laser modela za različne vrednosti moči črpanja z zelo veliko povečavo.

Žal nisem uspel priti do tranzientnih oscilacij in nisem uspel najti ravnovesnega stanja. Tudi priznam, da mi je popolnoma zmanjkalo časa, ker sem ga porabil za paralelizacijo piknik modela, kar je bilo in hindsight verjetno odveč, a po drugi strani bi bilo pa seriously cool, če bi uspelo.

Kar se tiče faznega diagrama, ga for the life of me ne uspem narisati. Nevem zakaj, ampak brezdimenzijski model mi sploh ne konvergira. Samo večno čakam na rezultate, ki jih ni. Če bi imel veliko časa bi se tega lotil, ampak se mi zdi, da sem imel dovolj. Sorry. Ah for posterity, do brezdimenzijskega modela se pride preko uvedbe novih spremenljivk:

$$A = \frac{\beta}{\alpha} a, \quad (16)$$

$$P = \frac{B}{\beta} p, \quad (17)$$

$$\tau = \sqrt{\alpha\beta} t. \quad (18)$$

Takrat se sistem enačb prepiše v:

$$\dot{P} = \frac{P}{q}(A - 1), \quad (19)$$

$$\dot{A} = r - qA(P + 1), \quad (20)$$

kjer sta q , r nova prosta parametra definirana kot:

$$q = \frac{\beta}{\alpha}, \quad (21)$$

$$r = \frac{BR}{\sqrt{\alpha^3 \beta}}. \quad (22)$$

5 Komentarji in izboljšave

Yeah zdaj je ura 7 zjutraj in čez nekaj ur je treba biti na faksu, tako da bom z to nalogo za danes zaključil. So pa populacijski modeli ljuba tema, ker mi je všeč kako se da z njimi opisati marsikaj in kako imaš pri tem precej kreativne svobode.

Kar se komentarjev tiče bi rekel, da sem se ogromno naučil o stvareh, ki so indirektno povezane z to nalogo. Sicer pa me malo skrbi, glede na to, da nisem uspel rešiti čisto vseh nalog, da ne bom dobil kakšne slabe ocene. Ostala mi je pravzaprav bolj podrobna analiza drugih dveh modelov. Ne vem kako naj bi naredil vse kar želim v enem tednu.

Oh yeah pa enkrat bi res lahko optimiziral ves whitespace v svojih poročilih.

Literatura

- [1] S. Hoya White, A. Martín del Rey, and G. Rodríguez Sánchez. Modeling epidemics using cellular automata. *Applied Mathematics and Computation*, 186(1):193–202, 2007.
- [2] Peter Meisrimel and Philipp Birken. Waveform relaxation with asynchronous time-integration. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 48(4):1–22, 2022.