Odgovori na vprašanja, ki so menda najbolj pogosta

Vektorski produkt

Vektorski produkt je operacija med dvema vektorjema v prostoru $\mathbb{R}^3$. Rezultat vektorskega produkta je vektor, ki je pravokoten na oba prejšnja vektorja. Operacija je **antikomutativna**, če zamenjamo vrstni red vektorjev, bo rezultat vektor z enako dolžino, vendar bo usmerjen v nasprotno smer. Geometrijsko je $|\vec{u} \times \vec{v}|$ ploščina paralelograma, ki ga oklepata vektorja. Če je kot med vektorjema enak 0 oz. π potem je vektorski produkt enak nič.

$$\vec{u},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Lastnosti

$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja:

(i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \qquad \vec{u} \times \vec{u} = 0$

(ii) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ **Distributivnost**

(iii) $\alpha\vec{u} \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times \alpha\vec{v}$

(iv) $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ Vekt. Prod. Je pravokoten na vektorja

(v) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

(vi) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

(vii) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{0}$ **Jacobijeva identiteta**

(viii) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sin\phi$

Tangentna ravnina (funkcije 2 spremenljivk):

Funkcijo odvajamo, da dobimo $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $\frac{\partial f}{\partial y}$. Nato izbrano točko vstavimo v odvode, tako, da dobimo dva smerna vektorja:

$$s_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \qquad s_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

Normala ravnine bo vektorski produkt med tema dvema: $n = \vec{s_2} \times \vec{s_1} = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1)$

Enačba ravnine se potem glasi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0; \qquad z_0 = f(x_0, y_0)$$

Enačba normalne premice pa je:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Mešani produkt

Mešani produkt je operacija med tremi vektorji v prostoru $\mathbb{R}^3$. Geometrijsko je dolžina mešanega produkta, volumen paralelepipeda. Mešani produkt je večji od nič, če si vektorji v njem sledijo po pravilu desnega vijaka. Mešani produkt je enak nič, če so si trije vektorji koplanarni.

$$\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \qquad (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \vec{u}\cdot\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Lastnosti

Veljajo ker je skalarni produkt komutativen, vektorski produkt pa antikomutativen.

(i) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = (\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = (\vec{w},\vec{u},\vec{v})$
(ii) $-(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{w},\vec{v})$

Razdalja med dvema premicama

Če sta premici vzporedni

Potem je razdalja med njima enaka, kot če bi imeli razdaljo med točko in eno premico. Ta razdalja je višina paralelograma.

$$d(p_1,p_2) = \frac{|\vec{s_2}\times(\vec{r_1}-\vec{r_2})|}{|\vec{s_2}|}$$

Če premici nista vzporedni

Potem je razdalja med njima višina paralelepipeda. Volumen paralelepipeda delimo s površino njegove osnovne ploskve.

$$d(p_1,p_2) = \frac{|(\vec{s_1},\vec{s_2},\vec{r_2}-\vec{r_1})|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}$$

Zaporedja števil in limite, Leibnizev kriterij

Zaporedje kompleksnih števil je funkcija iz naravnih števil v kompleksna.

$\mathbb{N}\to\mathbb{C},\ \ n\mapsto a_n\ (a_n\in\mathbb{C})$ taksno zaporedje označimo $(a_1,a_2,\dots) = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_n)_n = a_n$

Aritmetično zaporedje

$a,d\in\mathbb{C}$ zaporedje zapišemo $a_n = a+(n-1)d;\ \ a_1 = a$ lahko pa tudi rekurzivno $a_{n+1} = a_n + d$

Geometrijsko zaporedje

$a,q\in\mathbb{C}$ zaporedje zapišemo $a_n = aq^{n+1};\ \ a_1 = a$ lahko pa tudi rekurzivno $a_{n+1} = a_n q$

Omejenost zaporedja (naraščajoče in padajoče ipd.)

Zaporedje kompleksnih števil je **omejeno**, če obstaja tak $M\in\mathbb{R}$, da velja $|a_n|\le M$

Naj bo (a_n) zaporedje realnih števil

(i) (a_n) je (strogo) **naraščajoče** če velja: $a_{n+1}\ge(>)\,a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$
(ii) (a_n) je (strogo) **padajoče** če velja: $a_{n+1}\le(<)a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(iii) (a_n) je **navzgor omejen**, če je množica vseh $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ navzgor omejena. V temu primeru označimo $\sup(a_n) = sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$

(iv) (a_n) je **navzdol omejen**, če je množica vseh $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ navzdol omejena. V temu primeru označimo $\inf(a_n) = \inf\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$

Stekališče zaporedja

Točka $a \in \mathbb{C}$ je stekalisce zaporedja kompleksnih števil (a_n), če $\forall \epsilon > 0$ je v $K(a, \epsilon)$ neskoncno mnogo clenov (a_n); množica $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in K(a, \epsilon)\}$ je neskončna.

Oz. a je stekališče zaporedja (a_n) če in samo če $\forall \epsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N: |a_n - a| < \epsilon$

Bolzano – Weierstrassov izrek:

Vsako omejeno zaporedje realnih števil ima vsaj eno stekališče. Oz. Da ima vsako omejeno zaporedje, konvergentno podzaporedje.

Dokaz:

Najlažji dokaz je z metodo bisekcije. Zaporedje je omejeno, torej ima na intervalu med zgornjo in spodnjo mejo neskončno členov. $I_1 = [m, M]$ Ta interval lahko razdelimo na dva enako velika pod intervala in izberemo tistega, ki vsebuje neskončno členov zaporedja. Interval spet razdelimo na dva pod intervala. Ker velikost intervala vsakič delimo s 2 je njegova velikost v limiti 0, njegova vrednost pa je ravno vrednost stekališča (npr. x)

Vzamemo lahko okolico U od stekališča x. Ker velikost intervalov konvergira k 0, obstaja interval, da $I_N \subset U$. I_N po definicij vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja. Torej U vsebuje neskončno mnogo členov kar dokaze, da je x stekališče zaporedja in da je podzaporedje intervalov konvergentno podzaporedje tega zaporedja.

Limita zaporedja

Točka $a \in \mathbb{C}$ je **limita** zaporedja kompleksnih števil (a_n), če in samo če

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N: |a_n - a| < \epsilon$$

Prevedeno to pomeni, da je a limita zaporedja, če so v vsaki okolici točke a vsi členi zaporedja z izjemo končno mnogih.

Limita zaporedja je tudi njegovo stekališče. **Zaporedje konvergira, če ima limito.**
<u>Vsako omejeno monotono zaporedje realnih števil je konvergentno!</u>

Leibnizov kriterij za konvergenco alternirajočih vrst (ne zaporedji ampak vrst!)

Naj bo (a_n) vrsta. Ta vrsta konvergira če zanjo veljajo naslednji pogoji:

(i) Vrsta je alternirajoča: Predznaki grejo $+, -, +, -, +, -, \pm \cdots$

(ii) Vrsta je padajoča: $|a_1| > |a_2| > |a_3| > \cdots$

(iii) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Cauchyev pogoj

Zaporedje kompleksnih števil (a_n) je Cauchyjevo, če $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \epsilon$
Zaporedje kompleksnih števil je konvergentno, če in samo če je Cauchyjevo.

Funkcije ene realne spremenljivke

To so funkcije $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Limita funkcije

Naj bo $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija in naj bo $a \in \mathbb{R}$ stekališče množice D. Število $L \in \mathbb{R}$ je **limita funkcije** f v točki a, če:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D - \{a\}: |f(x) - L| < \epsilon$$

V temu primeru označimo: $L = \lim_{x \to a} f(x)$. Ta limita obstaja če in samo če obstajata v točki a in leva in desna limita. Torej da je a stekališče množice $D \cap (-\infty, a)$ in $D \cap (a, \infty)$

V neskončnosti:

Naj bo $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana na navzgor neomejeni množici D. Število $L \in \mathbb{R}$ je limita funkcije v neskončnosti, če in samo če, za vsako zaporedje števil (x_n) iz množice D, za katerega je $\lim_{n \to \infty} (x_n) = \infty$ velja, $L = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$

Zveznost funkcije

Naj bo $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funckija. f je zvezna v tocki $a \in D$ ce:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D: |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Funkcija f je **zvezna**, če je zvezna v vsaki točki $a \in D$

Operacije med funkcijami ohranjujejo zveznost.

Kaj velja za zvezne funkcije:

Zvezna funkcija $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ doseže največjo in najmanjšo vrednost. Oz. obstajata točki $u, v \in [a, b]$ da velja $f(u) = \sup(f) = \sup\{f([a, b])\} \quad in \quad f(v) = \inf(f) = \inf\{f([a, b])\}$

Zvezna funkcija na zaprtem intervalu doseže vse vmesne vrednosti. Naj bo $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funckija: $\forall A \in [\inf(f), \sup(f)] \quad \exists x \in [a, b]: \quad f(x) = A$

*Enakomerna zveznost (isti **δ** dober za vse točke)*

Funkcija $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **enakomerno zvezna** (na D), če velja:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D, |x - y| < \delta: \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Vsaka enakomerno zvezna funkcija je tudi zvezna.

Pomembna trditev o enakomerni zveznosti

Vsaka zvezna funkcija definirana na zaprtem intervalu $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ je **enakomerno zvezna.**

Dokaz:

Eksponentna funkcija

Naj bo $a \in \mathbb{R}^+$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. f je pozitivna monotona in zvezna. Ce je $a = 1$, je f konstanta, $a > 1$ je strogo naraščajoča, $0 < a < 1$ je f strogo padajoča. Poleg tega pa se $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$ in $\forall x, y \in \mathbb{R}$ velja: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad a^x b^x = (ab)^x$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$

Odvedljivost

Odvod v točki

Naj bo $f: D^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcija f je **odvedljiva** če v vsaki točki $a \in D$ obstaja:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

V temu primeru to limito označimo z $f'(a)$ in jo imenujemo **odvod funkcije f v točki a.**

Odvedljivost

Funkcija $f: D^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **odvedljiva** v celoti, če je odvedljiva v vsaki točki $a \in D$. V temu primeru imamo novo funkcijo $f': D \to \mathbb{R}; x \mapsto f'(x)$, ki ji pravimo **odvod funkcije f**.
To lahko v določenih primerih naredimo večkrat. Če se da funkcijo odvajat neskončno krat, je ta funkcija **gladka funkcija**. Ce je n-ti odvod se zvezen je funkcija **n-krat zvezno odvedljiva**.

Ce je funkcija odvedljiva v točki a, je v njej tudi zvezna.

Pravila za odvajanje

Naj bosta $f: D^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g: E^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkciji, ki sta odvedljivi v točki $a \in D \cap E$

(i) $\quad (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

(ii) $\quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

$$(fg)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h}$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\big(f(a+h) - f(a)\big)g(a)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(a)(g(a+h) - g(a))}{h} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

(iii) $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{h\,g(a)\,g(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)g(a)-f(a)\left(\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)}{g(a)\,g(a+h)}$$
$$=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Verižno pravilo

$f: D^{odp}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\;\; g: E^{odp}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\;\; a\in E$ a je notranja tocka domene kompozicije $g^{-1}(D)$, g je odvedljiva v a, f v g(a). Tedaj je kompozicija $(f\circ g)$ odvedljiva v tocki a in velja
$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))g'(a)$

Dokaz:

Lokalni maksimum in lokalni minimum

Naj bo $f: D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\;\; a\in D$

(i) (strogi) **lokalni maksimum** v a, če $\exists\delta>0\;\;\forall x\in(a-\delta,a+\delta)\cap D: |f(x)\leq(<)f(a)|$
(ii) (strogi) **lokalni minimum** v a, če $\exists\delta>0\;\;\forall x\in(a-\delta,a+\delta)\cap D: |f(x)\geq(>)f(a)|$

Rolleov izrek

Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, zvezna funkcija, ki je odvedljiva na (a,b); $a<b, f(a)=f(b)$. Tedaj obstaja točka $c\in(a,b)$ za katero velja$f'(c)=0$

Lagrangeov izrek o srednji vrednosti za odvod (tangenta v c isti naklon kot premica ki povezuje a, b)

Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je odvedljiva na (a,b); $a<b$. Tedaj obstaja $c\in(a,b)$, da je $f'(b)-f'(a)=f'(c)(b-a)$

Dokaz:

$h(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x$ h je zvezna na $[a,b]$ in odvedljiva na (a,b)

$$h(a)=f(a)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)a=\frac{f(a)(b-a)-(f(b)-f(a))a}{b-a}=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}$$

$$h(b)=f(b)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)b=\frac{f(b)(b-a)-(f(b)-f(a))b}{b-a}=\frac{-f(b)a+f(a)b}{b-a}$$

$h(a)=h(b)$ Torej za $h(x)$ velja Rolleov izrek $\exists c\in(a,b): h'(c)=0$

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\implies f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Lagrangeov izrek se uporablja kot pomoč pri dokazovanju drugih trditev, večinoma ko se kaj tice odvodov.

Zadostni pogoj za ekstrem in prevoj 3

Naj bo $f: D^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija ene spremenljivke. Naj bosta $n \in \mathbb{N}$ in $c \in D$ taksna, da velja:
$n \geq 2$, da je f vsaj n-krat zvezno odvedljiva, in da je $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$
$f^{(n)}(c) = 0$ Potem velja:

(i) Ce je n sodo stevilo ima f v a **strogi lokalni ekstrem** in sicer:
   a. **Strogi lokalni maksimum** če je $f^{(n)}(c) < 0$
   b. **Strogi lokalni minimum** če je $f^{(n)}(c) > 0$

(ii) Ce je n liho stevilo ima f v točki a **prevoj**
   a. Prevoj iz konkavnosti v konveksnost če je $f^{(n)} > 0$
   b. Prevoj iz konveksnosti v konkavnost če je $f^{(n)} < 0$

Nedoločeni integral

Naj bo $f: D^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija $F: D \to \mathbb{R}$ je **primitivna funkcija** funkcije f, če je odvedljiva in velja: $F' = f$

Konstanta pri nedoločenemu integralu!

$F: D^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je primitivna funkcija funkcije $f: D \to \mathbb{R}$ Tedaj jeza vsako **lokalno konstantno funkcijo** $C: D \to \mathbb{R}$ tudi funckija $F + C$ primitivna za f

Linearnost nedoločenega integrala

Če imata funkcij $f, g: D^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primirivni funkciji, in ce sta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ potem ima tudi $\alpha f + \beta g$ primitivno funkcijo in sicer:

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Uvedba nove spremenljivke

Naj bo $F: U^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija funckije $f: D \to \mathbb{R}$ in naj bo $g: E^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. $g(E) \subset D$ (vse točke preslika v D). Tedaj ima tudi funkcija $(f \circ g) \cdot g'$ primitivno funkcijo in velja:

$$\int f\big(g(x)\big) g'(x) dx = F\big(g(x)\big) + c$$

Zaradi pravila uvedbe nove spremenljivke, lahko »pozabimo«, da je g odvisen od x

Per partes

Naj bosta $f, g: D^{odp} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljivi ($(fg)' = f'g + fg'$) Če ima $f'g$ primitivno funkcijo, jo ima tudi fg' in velja:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Razlika med določenim in nedoločenim integralom

Nedoločeni integral nam pove primitivno funkcijo, določeni pa ploščino (številka) pod grafom.