Matematika II

Rang matrike

Rang matrike $A \in Mat(m \times n, \mathbb{F})$ je število neničelnih vrstic v Reducirani vrstični kanonični formi matrike A (oz. število pivotov), ki ga označimo $rank(A)$

Bolj teoretično je to dimenzija vektorskega prostora, ki ga generirajo stolpci matrike $\dim(Im(A))$ (oz. max stevilo linerarno neodvisnih stolpcev v matriki)

Za poljubno kvadratno matriko $A \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$ so si ekvivalentne naslednje trditve,

(i) A je **obrnljiva**
(ii) $rank(A) = n$
(iii) A lahko zapišemo kot produkt elementarnih matrik
(iv) RVKF matrike A je identična matrika

Naj bo $A \in Mat(m \times n. \mathbb{F})$ poljubna nenicelna matrika in naj bo r njen rang. Tedaj velja:

(i) Obstaja $(r \times r)$ poddeterminanta matrike A, ki je različna od 0
(ii) $k \in \mathbb{N}, \forall k > r$ so vse $(k \times k)$ poddeterminante matrike enake 0.

Sistem linearnih enačb

Je sistem enačb oblike $AX = B$
Dva sistema enačb za n neznank sta si med sabo **ekvivalentna** če imata enaki množici rešitev.
Sistem enačb je **homogen** če je $B = 0$

Sistem enačb sestavljajo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{32} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad C = [A \quad B]$$

Kjer je A **matrika sistema**, B **stolpec desne strani sistema**, X **stolpec neznank** in C **razširjena matrika sistema.**

Naj bo $AX = 0$ homogen sistem linearnih enačb.

(i) Ta sistem ima vsaj eno rešitev $X = 0$
(ii) Ce sta $X' in\, X''$ rešitvi sistema, je $\alpha' X' + \alpha'' X''$ tudi rešitev sistema za $\forall \alpha', \alpha'' \in \mathbb{F}$
(iii) Ce ima sistem kakšno neničelno rešitev ima **neskončno rešitev.**

Naj bo $AX = B$ sistem *m* linearnih enačb za *n* naznak in naj bo $C = [A \quad B]$ razširjena matrika tega sistema. Tedaj je bodisi $rank(C) = rank(A) + 1\ ali\ rank(C) = \leq n$

(i) Ce je $rank(C) = rank(A) + 1$ potem sistem $AX = B$ **nima** rešitev
(ii) Ce je $rank(C) = rank(A) = n$ potem ima sistem **natanko eno** rešitev
(iii) Ce je $rank(C) = rank(A) < n$ potem ima sistem **neskončno** rešitev, ki jih lahko parametriziramo z $(n - rank(A))$ neodvisnimi parametri.

Determinanta

Determinanta matrike $A \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$ je število:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Sym(n)} A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} A_{3,\sigma(3)} \dots A_{n,\sigma(n)} \ sgn(\sigma)$$

Bolj domače:

Determinanta je vsota vseh različnih možnih izbir elementov matrike. (Tako da iz vsake vrstice in stolpca vzameš en element)

Lastnosti determinante

$$A, B = Mat(n \times n, \mathbb{F})$$

1. $\det(I) = 1$
2. $\det(A^T) = \det(A)$
3. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
5. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
6. Za trikotno ali pa diagonalno matriko je $\det(A) = \det\big(diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\big) = \lambda_1 \dots \lambda_n$

Kvadratna matrika je obrnljiva, če in samo, če je **njena determinanta neničelna.**

Razvoja determinante po vrstici ali stolpcu

Determinanto pod matrike $\det\left(sub^{ij}(A)\right) \in \mathbb{F}$ imenujemo tudi **(i,j)-ti minor matrike A**. Ce ga pomnožimo z $(-1)^{i+j}$ dobimo **(i,j)-ti kofaktor matrike A**: $co_{ij}(A) = (-1)^{i+j}\det(sub^{ij}(A))$. Iz njih lahko sestavimo matriko kofaktorjev matrike A $co(A) \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$

Naj bo $A \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$ kvadratna matrika:

(i) Za vsako naravno število $i \leq n$ velja (**razvoj determinante po vrstici)**:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} co_{ik}(A)$$

(ii) Za vsako naravno število $j \leq n$ velja **(razvoj determinante po stolpcu)**:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} co_{kj}(A)$$

Gaussova metoda

$$\det(A) = \frac{\det(A')}{\det(E^{(p)}) \dots \det(E^{(1)})}$$

Z uporabo vrstični operacij (pazi, kako se spreminja determinanta pri njih) spremeni matriko v trikotno obliko(A') in zmnoži njene diagonalne elemente.

Poddeterminane

Determinantam kvadratnih podmatrik ne nujno kvadratne matrike A pravimo poddeterminante matrike A.

Elementarne vrstične operacije in elementarne matrike

1. $(V_i \leftarrow \alpha V_i)$ i-to vrstico pomnožimo z neničelnim skalarjem $\alpha \in \mathbb{F}\backslash\{0\}$

   To je matrika, ki zgleda kot identična matrika ampak ima vi i-ti vrstici α

2. $(V_i \leftarrow V_i + \beta V_j)$ i-ti vrstici pristejemo β-kratnik j-te vrstice $\beta \in \mathbb{F}, i \neq j$

   To je matrika, ki zgleda kot identična matrika ampak ima v j-tem stolpcu na i-ti vrstici β

3. $(V_i \leftrightarrow V_j)$ zamenjamo i-to in j-to vrstico $i \neq j$

   To je matrika, ki zgleda kot identična matrika ampak ima na diagonali na i-tem in j-tem mestu 0 in na i,j in j,1 mestu 1 (npr. za 4x4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Naj bosta $A, B \in Mat(m \times n\,, \mathbb{F})$. B je **<u>vrstično ekvivalentna</u>** matriki A, če obstajajo elementarne matrike $E^{(1)}, \dots, E^{(p)}$ velikosti $m \times n$ da je $B = E^{(p)} \dots E^{(1)}A$

Sprememba determinante pri elementarnih vrstičnih operacijah

$$A \in Mat(n \times n, \mathbb{F}), \alpha \in \mathbb{F} - \{0\}, \beta \in \mathbb{F}$$

(i) $\det([V_i \leftarrow \alpha V_i]A) = \alpha \det(A)$
(ii) $\det([V_i \leftarrow \beta V_j]A) = \det(A)$
(iii) $\det\big([V_i \leftrightarrow V_j]A\big) = -\det(A)$
(iv) Ce je ena od vrstic A večkratnik (oz. sta enaki) druge njene vrstice je $detA = 0$
(v) Ce je eden od stolpcev A skalaren večkratnik drugega (oz. sta enaka) $detA = 0$

Končno-dimenzionalni vektorski prostor

Vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ je mnozica V, opremljena z operacijo **seštevanja** in **množenja s skalarji**:

$$V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w \qquad \mathbb{F} \times V \to V \quad (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

Velja:

(i) $u + (v + w) = (u + v) + w$
(ii) $v + w = w + v$
(iii) $\exists 0 \in V: \quad v + 0 = v$
(iv) $\forall v \in V \quad \exists(-v) \in V: \ v + (-v) = 0$
(v) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
(vi) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
(vii) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
(viii) $1v = v$

Vektorski podprostor

Naj bo$V$ vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Vektorski podprostor prostora V je neprazna podmnožica U prostora V, za katero velja:

(i) Za poljubna $u, u' \in U$ je $u + u' \in U$
(ii) Za vsak $u \in U$ in vsak $\alpha \in \mathbb{F}$ je $\alpha u \in U$

Linearno neodvisni vektorji, ogrodje in baza vektorskega prostora

Ogrodje

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Podmnožica $O \in V$ je **ogrodje** vektorskega prostora V, ce velja:

$$Span(O) = V$$

Vektorji $v_1, \dots, v_k \in V$ **sestavljajo ogrodje** vektorskega prostora V, če je:

$$Span\{v_1, \dots, v_k\} = V$$

Takrat rečemo da množica O oz. vektorji $v_1, \dots, v_n$ **generirajo** cel prostor V.

Vektorji $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{F}^n$sestavljajo ogrodje prostora $\mathbb{F}^n$, če in samo, če velja: $rank[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_k] = n$

Linearna odvisnost in neodvisnost

Vektorji $v_1, \dots, v_k \in V$ so med seboj **linearno odvisni**, če obstajajo taksni skalarji $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$, da je vsaj eden od teh skalarjev neničelen in da velja: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$

Vektorji $v_1, \dots, v_k \in V$ so med seboj **<u>linearno neodvisni</u>**, če niso linearno odvisni. (En vektor se ne da zapisati kot linearna kombinacija drugih). Oz. so linearno neodvisni če velja:

$$rank[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_k] = k \quad k \leq n$$

Baza vektorskega prostora

Vektorji $v_1, \dots, v_k \in V$ sestavljajo **<u>bazo</u>** vektorskega prostora V, če sestavljajo ogrodje prostora in so linearno neodvisni.

Vektorji $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{F}^n$ sestavljajo bazo, če in samo, če $rank[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_k] = k = n$

Redukcija ogrodja do baze

Ce vektorji $v_1, \dots, v_s \in V$ sestavljajo ogrodje vektorskega prostora V, potem lahko izberemo naravna stevila $i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq s$ tako da vektorji $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$sestavljajo bazo prostora V.

Inverz

Naj bosta $A, B \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$. Matrika B je **<u>inverz</u>** matrike A, če velja:

$$AB = I_{n \times n} = BA$$

Ce ima matrika A inverz (obojestranski) pravimo, da je **obrnljiva.**
Za poljubni $A, B \in GL(n, \mathbb{F})$ je $AB \in GL(n, \mathbb{F})$ in $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{F})$ in velja:

(i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

Cramerjevo pravilo:
Za poljubno obrnljivo matriko $A \in GL(n, \mathbb{F})$ velja:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\big(co(A)\big)^t$$

Gauss-Jordanov algoritem
Matriki bločno pripišemo se identiteto enake velikosti in potem spremenimo matriko v RVKF z vrstičnimi operacijami E in tisti blok (ki se zaradi vrstičnih operacij spremeni) je inverz.

$$P = [A \quad I_{n\times n}] \in Mat(n \times 2n, \mathbb{F})$$

$$E[A \quad I_{n\times n}] = [I \quad E] = [I \quad A^{-1}] \;\; zato\; I = A' = EA \to E = A^{-1}$$

Linearna preslikava
Naj bosta V, W vektorska prostora nad $\mathbb{F}$. Preslikava $T: V \to W$ je **linearna**, če velja:

(i)	$T(v + v') = T(v) + T(v')$	Aditivnost
(ii)	$T(\alpha v) = \alpha T(v)$	Homogenost

Linearna preslikava je enolično določena s svojimi vrednostmi na bazi.

Slika, praslika, jedro, rang, defekt
Za vsak vektorski podprostor $U \subset V$ je slika $T(U) = \{Tu\,; u \in U\}$ vektorski podprostor W
Za vsak vektorski podprostor $Z \subset W$ je praslika $T^{-1}(Z) = \{v \in V; Tv \in Z\}$ vektorski podprostor V

Jedro linearne preslikave T je vektorski podprostor $\ker(T) = T^{-1}(\{0\}) \subset V$

Slika linearne preslikave T je vektorski podprostor $im(T) = T(V) \subset W$

Rang preslikave T je $rank(T) = \dim(im(T))$

Defekt linearne preslikave T je $null(T) = \dim(\ker(T))$

$T \in Lin(V, W)$ je monomorfizem, če in samo, če je $\ker(T) = \{0\}$

Vsaka matrika nam da linearno preslikavo in ker se izkaze, da je to bijekcija, je vsaka linearna preslikava dana z neko matriko.

$$Mat(m \times n, \mathbb{F}) = Lin(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$$

Presek, vsota in direktna vsota vektorskih prostorov
Presek: $(U \cap W) \subset V$
Vsota: $U + W = Span(U \cup W) = \{u + w; u \in U, w \in W\} \subset V$

Presek je največji vektorski podprostor, ki je podprostor vsakega
Vsota *je najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje unijo.*

<u>Direktna vsota:</u> V vektorski pr. In $U, W \subset V$

Ce velja, da je $U + W = V$ in hkrati, da je $U \cap W = \{0\}$ pravimo, da je vektorski prostor V **direktna vsota** podprostorov U in W, in to zapišemo:

$$V = U \oplus W$$

Tedaj pravimo, da sta si podprostora U in W **<u>komplementarna v V</u>**

Dimenzija vektorskega prostora

Vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$ je **končno dimenzionalen**, če ima kakšno končno urejeno bazo ali pa če ima le en element. **Dimenzija** vektorskega prostora V je stevilo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, da je:

$$V \cong \mathbb{F}^n$$

Oz. je *število vektorjev v poljubni bazi vektorskega prostora.*

Ce sta $U, W \subset V$ velja: $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$

Endomorfizmi

$$End(V) = Lin(V, V) \quad oz. \quad End(\mathbb{F}^n) = Lin(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n) = Mat(n \times n, \mathbb{F})$$

Podobnost matrik

$A, B \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$ Matrika B je **<u>podobna</u>** matriki A, če obstaja obrnljiva matrika $P \in GL(n, \mathbb{F})$ da velja: $B = P^{-1}AP$
Oz. Matrika B je podobna matriki A, če in samo ,če obstaja taksna baza $\mathcal{B}$, da je $B = [A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$
Ce sta si matriki podobni potem velja: $detA = detB \quad trA = trB \quad p_A = p_B$

Za vsak endomorfizem $T \in End(V)$ so si ekvivalentne trditve:

(i) T je avtomorfizem
(ii) $rank(T) = \dim(V)$
(iii) $null(T) = 0$
(iv) $\det(T) \neq 0$

Karakteristični polinom

Naj bo $T \in End(V)$, V koncno-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, $dimV = n \geq 1$. **<u>Karakteristični polinom</u>** endomorfizma T je polinom p_T s koeficienti v $\mathbb{F}$, dan s predpisom:

$$p_T(t) = \det(T - t \cdot id_V) \qquad \forall t \in \mathbb{F}$$

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ jw **<u>lastna vrednost</u>** endomorfizma T ce obstaja tak nenicelen vektor $v \in V$, da je:

$$Tv = \lambda v$$

Za vsak $T \in End(V)$ in vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ so si ekvivalentne naslednje trditve:

(i) λ je lastna vrednoti endomorfizma T
(ii) $\ker(T - \lambda \cdot id_V) \neq \{0\}$
(iii) $T - \lambda id_V$ ni avtomorfizem
(iv) $p_T(\lambda) = 0$

Lastni vektor endomorfizma T, za lastno vrednost $\boldsymbol{\lambda}$ so nenicelni vektorji iz $E_T(\lambda)$ oz. neničelni vektorji v, ki zadoščajo enačbi $Tv = \lambda v$

Lastni vektorji so med sabo *linearno neodvisni*.

Algebraična in geometrična kratnost

Algebraična kratnost: $kr_{p_T}(\lambda) = akr_T(\lambda)$ Stopnja ničle v karakterističnem polinomu
Geometrična kratnost: $\dim(\ker(T - \lambda id_V)) = gkr_T(\lambda)$ Dimenzija lastnega podprostora

$$1 \leq gkr_T(\lambda) \leq akr_T(\lambda)$$

Invariantnost

$T \in End(V)$. Vektorski podprostor $U \subset V$ je **T-invarianten**, če velja $T(U) \subset U$

Diagonalizabilnost

$T \in End(V)$ je **diagonalizabilen**, če obstaja taksna baza $\mathcal{B}$ vektorskega prostora V, da je $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ diagonalna matrika.

Pogoj za diagonalizabilnost:

$T \in End(V)$ V koncno-dimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ $\quad n = \dim_{\mathbb{F}} V \geq 1$

(i) Za vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ je $gkr_T(\lambda) \leq akr_T(\lambda)$
(ii) Ce je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, potem je T **diagonalizabilen**, če in samo, če velja:
$$akr_T(\lambda) = gkr_T(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$
(iii) Ce je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, potem je T **diagonalizabilen**, če in samo, če velja:
$$akr_T(\lambda) = gkr_T(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{F}$$
Poleg tega mora pa se veljati, da je karakteristični polinom p_T razcepen na realne linearne faktorje (nima kompleksnih ničel)

Ekvivalentne so si naslednje trditve:

(i) T je diagonalizabilen
(ii) Obstaja baza prostora V, ki je sestavljena iz lastnih vektorjev endomorfizma T
(iii) $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}} E_T(\lambda) = V$
(iv) $\sum_{\lambda \in \mathbb{F}} gkr_T(\lambda) = \dim_{\mathbb{F}} V$

Schurov izrek

Naj bo V **kompleksen** končno-dimenzionalen vektorski prostor dimenzije $n = \dim V \geq 1$ in naj bo $T \in End(V)$. Tedaj obstaja taksna baza $\mathcal{B}$ vektorskega prostora V, da je koordinatna matrika $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ **zgornje trikotna** matrika.

Pomembna posledica:
$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ vse paroma različne lastne vrednosti endomorfizma T (ni nujno diagonalizabilen). Tedaj velja:

(i) $\det(T) = \lambda_1^{akr_T(\lambda_1)} \cdot \lambda_2^{akr_T(\lambda_2)} \cdot \dots \cdot \lambda_m^{akr_T(\lambda_m)}$
(ii) $tr(T) = akr_T(\lambda_1)\lambda_1 + \cdots + akr_T(\lambda_m)\lambda_m$

Jordanova kanonična forma oz. Jordanova kletka je skoraj diagonalna oblika matrike.

Cayley-Hamiltonov izrek

Naj bo $T \in End(V)$, kjer je V kompleksen končno-dimenzionalen vektorski prostor pozitivne dimenzije. Tedaj velja:

$$p_T(T) = 0$$

Prevedeno: Vsaka kvadratna matrika zadostuje lastnemu karakterističnemu polinomu.

Cayley-Hamiltonov izrek nam omogoča, da potenco A^n izrazimo s potencami $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$oz. računanje eksponentov in omogoči nam tudi način, da izračunamo inverz matrike.

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)}((-T)^{n-1} + tr(T)(-T)^{n-2} + c_{n-2}(-T)^{n-3} + \cdots + c_1 T^0)$$

Kako se izračuna funkcijo nad endomorfizmom ali matriko:
$T \in End(V)$ diagonalizabilen endomorfizem in naj bodo $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ vse paroma razilcne lastne vrednosti endomorfizma T. Za poljubno funkcijo $f: \sigma(T) \to \mathbb{F}$, definiramo **vrednost** $f(T) \in End(V)$ **funkcije** f v endomorfizmu T. s predpisom:

$$f(T) = f(\lambda_1) id_{E_T(\lambda_1)} \oplus \dots \oplus f(\lambda_m) id_{E_T(\lambda_m)}$$

Krajše:

$$[f(T)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = diag\big(f(\eta_1), \dots, f(\eta_n)\big)$$
$$A = PDP^{-1} \qquad f(A) = Pf(D)P^{-1} = P\, diag\big(f(\eta_1), \dots, f(\eta_n)\big)\, P^{-1}$$

Skalarni produkt

Naj bo V vektorskio prostor nad $\mathbb{F}$ Preslikavi:

$$V \times V \to \mathbb{F}, \qquad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

pravimo **skalarni produkt na prostoru V**, če za vse $u, v, w \in V$ in za vsak $\alpha \in \mathbb{F}$ velja:

(i) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ — Konjugirano komutativen
(ii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
(iii) $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$
(iv) $\langle v, v \rangle \geq 0$
(v) Ce je $\langle v, v \rangle = 0$, potem je $v = 0$

Norma vektorja

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

Paralelogramsko pravilo, Trikotniška in Cauchy-Schwartzeva neenakost

Paralelogramsko pravilo: $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$
Trikotniška neenakost: $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
Cauchy-Schwartzeva neenakost: $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\, \|w\|$

Polarizacijska enačba

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom nad $\mathbb{F}$

(i) Ce je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, potem velja:
$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2)$$

(ii) Ce je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, potem velja:
$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - i\|v-iw\|^2)$$

Skratka pravi nam, da je skalarni produkt definiran z normo, ki jo naredi. Oz. da če vemo normo, lahko izračunamo pripadajoči skalarni produkt.

Ortonormirana baza

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom. Vektor $u \in V$ je **normiran**, če je $\|u\| = 1$.
Neničelni vektor $v \in V - \{0\}$ lahko **normiramo**, tako, da ga pomnožimo s skalarjem $\frac{1}{\|v\|}$.
Vektorji $v_1, \dots, v_k \in V$ **sestavljajo ortonormiran sistem** vektorskega prostora V, če velja:

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

Ce vektorji $v_1, \dots, v_k \in V$ sestavljajo ortonormiran sistem in hkrati sestavljajo bazo prostora V, potem pravimo, da sestavljajo **kompleten ortonormiran sistem oz. otronormirano bazo**.

Ce imamo vektorski produkt in bazo, vedno obstaja nek skalarni produkt glede na katerega bo ta baza ortonormirana.

Gram-Schmidtova ortonormalizacija

Naj bo V vektorski prostor s skalarnim produktom. Za poljubne vektorje $v_1, \dots, v_k \in V$, ki so med seboj linearno neodvisni, lahko rekurzivno izracunamo vektorje $u_1, \dots, u_k \in V$ s predpisom:

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$$

$$u_j = \frac{1}{\left\|v_j - \sum_{i=1}^{j-1}\langle v_j, u_i\rangle u_i\right\|}\left(v_j - \sum_{i=1}^{j-1}\langle v_j, u_i\rangle u_i\right)$$

Dobljeni vektorji $u_1, \dots, u_k$ sestavljajo ortonormiran sistem, poleg tega pa velja:
$$Span\{v_1, \dots, v_k\} = Span\{u_1, \dots, u_k\}$$

(Vektorje malo drugače orientirali in skrajšali/podaljšali ampak se vedno generirajo isti prostor)

Ortogonalni komplement

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom. Naj bo $\mathcal{O}$ podmnožica vektorskega prostora V.
Definirajmo:
$$\mathcal{O}^{\perp} = \{v \in V; \langle v, u\rangle = 0 \quad \forall u \in \mathcal{O}\}$$

Podmnožico $\mathcal{O}^{\perp}$ imenujemo **ortogonalni kompliment** množice $\mathcal{O}$. To je množica vseh vektorjev iz V, ki so pravokotni na vse vektorje iz $\mathcal{O}$

Lastnosti:

(i) $\mathcal{O}^{\perp}$ je vektorski podprostor prostora V
(ii) $\mathcal{O} \subset (\mathcal{O}^{\perp})^{\perp}$
(iii) $\mathcal{O}^{\perp} = Span(\mathcal{O})^{\perp}$
(iv) $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ => $(\mathcal{O}')^{\perp} \subset \mathcal{O}^{\perp}$
(v) $V = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}^{\perp}$
(vi) $(\mathcal{O}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{O}$

Linearni funkcional

Linearnim preslikavam $V \to \mathbb{F}$ pravimo tudi **<u>linearni funkcionali</u>** na V.

$Lin(V, \mathbb{F}) = Lin_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F}) = V^*$ <u>Dualni vektorski prostor prostora</u> V

Rieszov representacijski izrek

Naj bo V koncno-dimenzionalen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom. Preslikava:

$$V \to V^* \qquad v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$$

je konjugirano linearna **<u>bijekcija</u>**.
Za poljubni linearni funkcional $\phi \in V^*$ torej obstaja natanko en tak vektor $v \in V$, da je:

$$\phi(u) = \langle u, v \rangle \qquad \forall u \in V$$

Adjungirana preslikava

Naj bosta V, W končno-dimenzionalna vektorska prostora nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom. $T \in Lin(V, W)$
Za poljuben $w \in W$ je preslikava:

$$\langle T\,\cdot, w \rangle : V \to \mathbb{F} \qquad v \mapsto \langle Tv, w \rangle$$

linearen funkcional na prostoru V. (Obstaja natanko en vektor iz V, ki reprezentira ta linearni funkcional)
Ta vektor bomo označili z:

$$T^* w \in V$$

$T^* w \in V$ je enolicno dolocen s pogojem, da je:

$$\langle Tv, w \rangle_W = \langle v, T^* w \rangle_V$$

S tem smo dobili linearno preslikavo:

$$T^*: W \to V \qquad w \mapsto T^* w \qquad T^* \in Lin(W, V)$$

Lastnosti

Naj bodo V, W, Z koncno-dimenzionalni vektorski prostori nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom. Za vse $T, T' \in Lin(V, W)$, za vse $S \in Lin(W, Z)$ in za vse $\alpha \in \mathbb{F}$ velja:

(i) $(T + T')^* = T^* + T'^*$
(ii) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}(T^*)$ (i) in (ii) => Konjugirana linearnost
(iii) $(T^*)^* = T$
(iv) $(ST)^* = T^* S^*$ Antidistributivnost
(v) $(id_V)^* = id_V$
(vi) $\ker(T^*) = \big(im(T)\big)^{\perp}$
(vii) $im(T^*) = (\ker(T))^{\perp}$

Kako se praktično adjungira?

V, W vektorska prostora nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom, oba končno-dimenzionalna s pozitivno dimenzijo. Naj bo $\mathcal{B}$ ortonormirana baza prostora V in naj bo $\mathcal{B}'$ ortonormirana baza prostora W. Za poljubno linearno preslikavo $T \in Lin(V, W)$ velja:

$$[T^*]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^h$$

Dodatne lastnosti:

(i) $p_{T^*} = \overline{p_T}$

(ii) $\det(T^*) = \overline{\det(T)}$

(iii) $tr(T^*) = \overline{tr(T)}$

(iv) $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\,\overline{\lambda} \in \mathbb{F}; \lambda \in \sigma(T)\}$

(v) $akr_{T^*}(\lambda) = akr_T(\,\overline{\lambda}\,)$

(vi) $gkr_{T^*}(\lambda) = gkr_T(\,\overline{\lambda}\,)$

(vii) $E_{T^*}(\lambda) = \left(im\left(T - \overline{\lambda} id\right)\right)^{\perp}$

Linearna izometrije

V, W vektorska prostora nad $\mathbb{F}$ s skalarnim produktom. Linearna preslikava $T \in Lin(V, W)$ je **<u>linearna izometrija</u>**, če velja:

$$\|Tv - Tv'\| = \|v - v'\|$$

Če je poleg tega T tudi izomorfizem, pravimo, da je <u>izometrični izomorfizem</u>.
Naslednje trditve so si ekvivalentne:

(i) T je linearna izometrija

(ii) $\|Tv\| = \|v\| \quad \forall v \in V$

(iii) $\langle Tv, Tv' \rangle = \langle v, v' \rangle \quad \forall v, v' \in V$

Ugotavljanje ali je preslikava izometrija

(i) T je **<u>linearna izometrija</u>**, če in samo, če velja $T^*T = id$

(ii) T je **<u>izometrični izomorfizem</u>**, če in samo, če je izomorfizem in velja, da je $T^{-1} = T^*$

Unitarne in ortogonalne preslikave

Matrika $U \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$ je **<u>unitarna</u>**, če je $U^h U = I$
Realnim unitarnim matrikam pravimo, da so **<u>ortogonalne</u>**.

(i) Ce je T izometrični izomorfizem $\mathcal{B}$ ortonormirana baza prostora V in $\mathcal{B}'$ ortonormirana baza prostora W potem je $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ unitarna

(ii) Ce obstajata taksna ortonormirana baza $\mathcal{B}$ prostora V in taksna ortonormirana baza prostora W $\mathcal{B}'$, da je $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ unitarna, potem je T izometrični izomorfizem.

Izometrični izomorfizmi med realnimi vekt. Prostori so **<u>ortogonalne preslikave</u>**, med kompleksnimi vekt. prostori pa jim pravimo **<u>unitarne preslikave</u>**.
Velja se:

$$|\det(T)| = 1 \qquad |\lambda| = 1 \qquad \forall \lambda \in \sigma(T)$$

Unitarna/Ortogonalna diagonalizabilnost

$T \in End(V)$ je **unitarno(oz. ortogonalno) diagonalizabilen**, če obstaja ortonormirana baza $\mathcal{B}$ prostora V, da je $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ diagonalna.

A je, kot endomorfizem prostora $\mathbb{C}^n$ unitarno diagonalizabilna, ce in samo, ce obstaja taksna unitarma matrika U, da je $U^h AU$ diagonalna

Unitarna/Ortogonalna podobnost

$B \in Mat(n \times n, \mathbb{C})$ je **unitarno podobna** matriki $A \in Mat(n \times n, \mathbb{C})$, ce obstaja taksna unitarna matrika U, da je $B = U^h AU$

Normalni endomorfizem

Endomorfizem $T \in End(V)$ je **normalen**, če zanj velja $T^*T = TT^*$
$A \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$ je **normalna**, če in samo, če je $A^h A = AA^h$

Pomembno si zapomnit:

(i) Vsaka diagonalna matrika je normalna
(ii) Vsaka unitarna (oz. ortogonalna) matrika je normalna
(iii) Vsak unitaren (oz. ortogonalen) endomorfizem je normalen
(iv) Vsaka realna matrika, ki je ortogonalno podobna normalni matriki, je normalna matrika
(v) Vsaka kompleksna matrika, ki je unitarno podobna normalni matriki, je normalna matrika
(vi) Kvadratna kompleksna matrika je normalna, če in samo, če je unitarno podobna diagonalni matriki.

Dodatek: $T \in End(V)$ normalen endomorfizme. Za vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ je $E_T(\lambda)^\perp$ T-invarianten.

Za poljuben diagonalizabilen endomorfizem $T \in End(V)$ obstaja tak skalarni produkt, na prostoru V, da je T glede na ta skalarni produkt normalen.

Izrek o diagonalizabilnosti normalnih endomorfizmov

Naj bo V končno-dimenzionalen **kompleksen** vektorski prostor pozitivne dimenzije s skalarnim produktom. Vsak normalen endomorfizem vektorskega prostora V, je tedaj **unitarno diagonalizabilen**.

Sebi-adjungirani endomorfizmi

Endomorfizem $T \in End(V)$ je **sebi-adjungiran**, če velja: $T^* = T$
Če je sebi-adjungiran, je tudi normalen.
Matrika $A \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$ je sebi-adjungirana, če je hermitska $A = A^h$
Projektor je vedno sebi-adjungiran:$\ker(P^*) = \left(im(P)\right)^\perp \; im(P^*)(\ker(P))^\perp$

(i) Ce je $T \in End(V)$ sebi-adjungiran, potem je za vsako ortonormirano bazo prostora V matrika $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ hermitska
(ii) Ce je $\mathcal{B}$ taksna ortonormirana baza prostora V, da je $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ hermitska, je T sebi-adjungiran

(i) Za vsak vektor $v \in V$ je $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$
(ii) Vse lastne vrednosti endomorfizma T so realne
(iii) $\det T \in \mathbb{R}$ $\quad tr(T) \in \mathbb{R}$
(iv) Karakteristični polinom p_T endomorfizma T je realen polinom in je razcepen na same realne faktorje.

Izrek o diagonalizabilnosti sebi-adjungiranih endomorfizmov

V končno-dimenzionalen **realen** vektorski prostor s skalarnim produktom, pozitivne dimenzije. Za poljuben sebi-adjungiran endomorfizem $T \in End(V)$ obstaja ortonormirana baza $\mathcal{B}$ vektorskega prostora V, da je matrika $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ **realna diagonalna matrika**.

Pomeni: Vsak sebi-adjungiran endomorfizem je **ortogonalno diagonalizabilen**. (Velja očitno tudi za $\mathbb{C}$)

Posledica tega:

(i) Vsaka realna **simetrična** matrika, je ortogonalno podobna neki realni diagonalni matriki
(ii) Vsaka kompleksna **hermitska** matrika je unitarno podobna neki realni diagonalni matriki.

Pozitivno definitni endomorfizmi

Endomorfizem $T \in End(V)$ je **pozitivno definiten**, če je **sebi-adjungiran** in velja:

$$\langle Tv, v \rangle > 0 \qquad \forall v \in V - \{0\}$$

V tem primeru označimo $T > 0$

Endomorfizem $T \in End(V)$ je **pozitivno definiten**, če in samo, če je sebi-adjungiran in so poleg tega vse njegove **lastne vrednosti pozitivna realna števila.**

Matrika $A \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$ je **pozitivno definitna**, če je **hermitska** in velja $v^h A v > 0 \quad \forall v \in \mathbb{F}^n - \{0\}$

(i) Vsaka realna/kompleksna matrika, ki je ortogonalno/unitarno podobna realni/kompleksni pozitivno definitni matriki, je pozitivno definitna
(ii) Ce je T pozitivno definiten, potem za vsako ortonormirano bazo $\mathcal{B}$ prostora V velja, da je $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ pozitivno definitna matrika (in vice versa)

Sylvestrov kriterij za pozitivno definitnost

Matrika $A \in Mat(n \times n, \mathbb{F})$ je **pozitivno definitna**, če in samo , če je **hermitska** in velja:

$$\det\left(sub_{\{1,2,\dots,k\}\{1,2,\dots,k\}}(A)\right) > 0 \qquad za\ vse\ k = 1,2, \dots, n$$

(To pomeni, da so glavne poddeterminante pozitivne)

Dodatne »definitnosti«

T je **negativno definiten** ($T < 0$), ce je sebi-adjungiran in velja $\langle Tv, v \rangle < 0 \quad \forall v \in V - \{0\}$
T je **pozitivno semi-definiten** ($T \geq 0$), ce je sebi-adjungiran in velja $\langle Tv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V - \{0\}$
T je **negativno semi-definiten** ($T \leq 0$), ce je sebi-adjungiran in velja $\langle Tv, v \rangle \leq 0 \quad \forall v \in V - \{0\}$

Kvadratne forme

$$\mathbb{F} = \mathbb{R}$$

Naj bo V končno-dimenzionalni **realni** vektorski prostor. **Bilinearna forma** na V je prslikava:

$$g: V \times V \to \mathbb{R}$$

Za katero velja:

(i)	$g(u+v,w) = g(u,w) + g(v,w)$	Aditivnost v 1. faktorju
(ii)	$g(v,u+w) = g(v,u) + g(v,w)$	Aditivnost v 2. faktorju
(iii)	$g(\alpha v,w) = g(v,\alpha w) = \alpha g(v,w)$	Homogenost

Taksni linearni formi g pravimo, da je **simetrična**, če velja se:

(iv) $g(v,w) = g(w,v)$

Preslikava $f: V \to \mathbb{R}$ je **kvadratna forma** na V, ce obstaja taksna **bilinearna simetrična forma** na V, da je:

$$f(u) = g(u,u)$$

Tedaj je f kvadratna forma prirejena simetrični bilinearni formi g.

Vsak skalarni produkt na V je simetrična bilinearna forma na V.

Ne vem kako nujno, ampak mogoče smiselno:

Naj bo V koncno-dimenzionalen realen vektorski prostor s skalarim prodkuktom. Preslikava:

$$\{sebi - adrungirani\ endomorfizmi: V \to V\} \to \{simetricne\ bilinearne\ forme\ na\ V\}$$
$$T \mapsto \Gamma_T$$

je izomorfizem realnih vektorskih prostorov.

Ce je dimenzija $dimV = n \geq 1$ in je g simetricna bilinearna forma:

(i) Obstaja ortonormirana baza prostora V v kater ima simetricna bilinearna forma diagonalno obliko.

(ii) Naj bo $\mathcal{B} = [v_1, \dots, v_n]$ ortonormirana baza prostora V v kateri ima g diagonalno obliko. Ce je $T \in End(V)$ tisti sebi-adjungiran endomorfizem, za katerega je $\Gamma_T = g$ potem:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = diag\big(g(v_1,v_1), \dots, g(v_n,v_n)\big)$$

Vedno obstaja taksna baza, da bo simetrična bilinearna forma v njej imela po diagonali samo elemente $\{-1,0,1\}$ izven diagonale pa vedno 0

Ce najdemo se kakšno taksno bazo kjer to velja, se število pozitivnih, negativnih in ničelnih elementov ne spremeni.

$ind^-(g) = \#\{i \in \{1, \dots, n\}; g(v_i,v_i) < 0\}$	indeks negativnosti forme g
$ind^+(g) = \#\{i \in \{1, \dots, n\}; g(v_i,v_i) > 0\}$	indeks pozitivnosti forme g
$\big(ind^+(g), ind^-(g)\big)$	Signatura forme g
$rank(g) = ind^+(g) + ind^-(g)$	Rang forme g

Velja:

$$ind^+(g) = \sum_{\lambda>0} akr_T(\lambda) \qquad ind^-(g) = \sum_{\lambda<0} akr_T(\lambda) \qquad ind^0(g) = akr_T(0) \quad rank(g) = rank(T)$$

Krivulje, ploskve in hiperploskve drugega reda

Homogeni del realnega polinoma stopnje 2 v n spremenljivkah je kvadratna forma na $\mathbb{R}^n$. Mnozici resitev (mnozici nicel) splosne enačbe 2. reda pravimo **hiperploskev 2. reda**.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c_0 = 0$$

Splošni enačbi 2. reda lahko priredimo simetrično matriko $A \in Mat(n\times n, \mathbb{R})$, kjer je $A_{ij} = a_{ij} = A_{ji}$ Stolpec

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

In vektor neznank:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Tako lahko zapišemo splošno enačbo 2. reda v obliki:

$$X^tAX + B^tX + C_0 = 0$$

Ker je A simetrična realna matrika je **ortogonalno diagonalizabilna**.

Z rotacijo se lahko znebimo morebitnih mešanih kvadratnih členov. S translacijo, pa se lahko znebimo linearnih členov.

Totalni odvod

Naj bo $g: \epsilon \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \quad \epsilon \subset \mathbb{R}^n \quad g(x_1, \dots, x_n)$ vektorska funkcija. Naj bo $a \in \epsilon$ notranja točka množice ϵ. Ce je g totalno odvedljiva v tocki a, matriki:

$$(Dg)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Pravimo **Jacobijeva matrika funkcije g v točki a**

Drugi načini zapisa se:

$$(Dg)(a)=\begin{bmatrix}\left((\nabla g_1)(a)\right)^t\\ \left((\nabla g_2)(a)\right)^t\\ \vdots\\ \left((\nabla g_m)(a)\right)^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\end{bmatrix}$$

Za $w\in\mathbb{R}^n$:

$$(Dg)(a)w=\begin{bmatrix}\left((\nabla g_1)(a)\right)^t w\\ \left((\nabla g_2)(a)\right)^t w\\ \vdots\\ \left((\nabla g_m)(a)\right)^t w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\nabla g_1)(a)\cdot w\\ (\nabla \mathrm{g}_2)(a)\cdot w\\ \vdots\\ (\nabla g_m)(a)\cdot w\end{bmatrix}$$

$$\lim_{w\to 0}\frac{g_i(a+w)-g_i(a)-(\nabla g_i)(a)\cdot w}{|w|}=0$$

$$\lim_{w\to 0}\frac{g(a+w)-g(a)-(Dg)(a)w}{|w|}=0$$

Ce je $h:\epsilon\to\mathbb{R}^m$ in, če je $A\in Mat(m\times n,\mathbb{R})$, da velja da je:

$$\lim_{w\to 0}\frac{h(a+w)-h(a)-Aw}{|w|}=0$$

Potem je h **totalno odvedljiva** v točki a in $A=(Dh)(a)$.

$\epsilon^{odp}\subset\mathbb{R}^n$, $g:\epsilon\to\mathbb{R}^m$ totalno odvedljiva v vseh točkah potem je Dg preslikava:

$$Dg:\epsilon\to Mat(m\times n,\mathbb{R})$$

Verižno pravilo

Naj bosta $g:\epsilon\to\mathbb{R}^m,\epsilon\subset\mathbb{R}^n$ in $f:D\to\mathbb{R}^p, D\subset\mathbb{R}^m$ vektorski funkciji. $a\in\epsilon$ je notranja točka. $g(a)\in D$ pa je notranja točka množice D. Vse komponente kompozituma $f\circ g: g^{-1}(D)\to\mathbb{R}^p$ so totalno odvedljive. Torej je tudi $f\circ g$ totalno odvedljiva v točki a.

$$D(f\circ g)(a)=\left[(\nabla f_k)\big(g(a)\big)^t\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)\right]_{k=1,\dots p\ j=1,\dots,n}$$

$$=\begin{bmatrix}(\nabla f_1)\big(g(a)\big)^t\\ (\nabla f_2)\big(g(a)\big)^t\\ \dots\\ (\nabla f_p)\big(g(a)\big)^t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\end{bmatrix}=(Df)\big(g(a)\big)\cdot(Dg)(a)$$

Ekstremi funkcij več spremenljivk

Stacionarna točka

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}, D^{odp} \subset \mathbb{R}^n$ totalno odvedljiva vektorska funkcija. Točka $a \in D$ je **stacionarna točka** funkcije f, ce velja:

$$(\nabla f)(a) = 0$$

Ce ima f v tocki a lokalni ekstrem potem je a stacionarna točka.

Hessejeva matrika

Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva na množici D. Matriki:

$$(Hf)(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial xj}(a)\right]_{i=1,\dots,n \;\; j=1,\dots n} \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$$

pravimo **Hessejeva matrika funkcije f v točki a**.

Hessejeva matrika je **simetrična**.

Pogoj za ekstrem

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija n spremenljivk definirana na odprti podmnozici $D^{odp} \subset \mathbb{R}^n$, in naj bo $a \in D$ **stacionarna** točka funkcije f. Velja:

(i) Če je $(Hf)(a) > 0$ (pozitivno definitna) potem ima f v točki a **strogi lokalni minimum**
(ii) Ce je $(Hf)(a) < 0$ (negativno definitna) potem ima f v točki a **strogi lokalni maksimum**
(iii) Ce $(Hf)(a)$ ni niti pozitivno semi-definitna niti negativno semi-definitna potem f v točki a **nima** lokalnega ekstrema.

Vezani ekstremi

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$ funkcija definirana na $D^{odp} \subset \mathbb{R}^n$. Naj bo R podmnožica $R \subset \mathbb{R}^n$ poljubna in naj bo $a \in R \cap D$. Ce ima zožitev $f|_{R \cap D}$ lokalni ekstrem v točki a potem pravimo, da ima funkcija f v tocki a **vezan ekstrem na podmnožici R**.

Vez

Navadno R podajamo kot množico ničel neke funkcije $g: \epsilon \to \mathbb{R}^m$, ki je definirana na $\epsilon^{odp} \subset \mathbb{R}^n$, torej:

$$R = g^{-1}(\{0\}) = \{v \in \epsilon; g(v) = 0\} \subset \epsilon \subset \mathbb{R}^n$$

Ce ima zožitev $f|_{R \cap D} = f|_{g^{-1}(0) \cap D}$ lokalni ekstrem v točki $a \in g^{-1}(0) \cap D$, pravimo, da ima f v tocki a **vezan ekstrem pri vezi g**.

Lagrangeeva metoda multiplikatorjev

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$ **totalno odvedljiva** skalarna funkcija n spremenljivk, definirana na odprti podmnožici $D \subset \mathbb{R}^n$, in naj bo $g: \epsilon \to \mathbb{R}^m$ zvezno odvedljiva vektorska funkcija n spremenljivk, definirana na odprti podmnožici $\epsilon \subset \mathbb{R}^n$. Naj bo $a \in \epsilon \cap D$ taksna tocka, da je:

$$g(a) = 0$$

in da velja:

$$rank(Dg)(a) = m$$

Ce ima funkcija f v tocki a vezan ekstrem pri vezi g, potem obstajajo taksne realne konstante $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, da velja:

$$(\nabla f)(a) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\nabla g_i)(a)$$

Pomeni, da lahko gradient v okolici točke a izrazimo kot linearno kombinacijo gradientov vezi. To je kot da bi rekli, da je smerni odvod f v poljubni tangentni smer je enak 0.
Na vajah smo napisali $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$ in gledali, da so vsi odvodi te pomozne funkcije enaki nič oz. $\nabla F = 0$

Izrek o inverzni funkciji

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}^n$ **zvezno odvedljiva** funkcija n spremenljivk, definirana na odprti podmnožici $D \subset \mathbb{R}^n$, in naj bo $a \in D$ taksna tocka, da je v njej Jacobijeva matrika obrnljiva:

$$\det(Df)\,(a) \neq 0$$

Tedaj velja:

(i) Obstaja taksna odprta podmnožica $U \subset \mathbb{R}^n$, da je $a \in U \subset D$, da je zozitev funckije $f|_U$ injektivna in da je podmnožica $f(U)$ odprta v $\mathbb{R}^n$ (Zožitev **je bijekcija**)

(ii) Inverz $(f|_U)^{-1}: f(U) \to U$ bijekcije $f|_U: U \to f(U)$ je **zvezno odvedljiva** funkcija in velja:

$$D((f|_U)^{-1})\big(f(a)\big) = (Df)(a)^{-1}$$

Pomeni, da če je funkcija zvezno odvedljiva in injektivna v okolici točke a obstaja v okolici te točke inverz, ki je injektiven(?) in zvezno odvedljiv.

Izrek o implicitni funkciji

Naj bo $g: D \to \mathbb{R}^m$ **zvezno odvedljiva** funkcija, definirana na odprti podmnožici $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Naj bosta $a \in \mathbb{R}^n$ in $b \in \mathbb{R}^m$ taksni točki, da je $(a, b) \in D$, da je $g(a, b) = 0$ in da so vektorji:

$$\frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(a, b), \frac{\partial g}{\partial x_{n+2}}(a, b), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_{n+m}}(a, b)$$

med seboj **linearno neodvisni**. Tedaj obstajata taksni odprti podmnožici $U \subset D$ in $W \subset \mathbb{R}^n$, da je $(a, b) \in U$ ter tocka $a \in W$ in da velja:

(i) Za vsako točko $x \in W$obstaja natanko ena točka $y \in \mathbb{R}^m$ za katero velja

$$(x, y) \in U \qquad g(x, y) = 0$$

To točko y, ki je odvisna od izbire točke x označimo z $f(x)$

(ii) Tako definirana funkcija $f: W \to \mathbb{R}^m$ je **zvezno odvedljiva**, zanjo velja:

$$f(a) = b \quad g\big(x, f(x)\big) = 0$$

$$(Df)(a) = -\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}(a, b) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_{n+m}}(a, b) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(a, b) \end{bmatrix}$$

Pomeni, da lahko iz enačbe $g(x, y) = 0$ lokalno, v okolici neke nicle (a, b) izrazimo spremenljivko y, kot zvezno odvedljivo funkcijo spremenljivke x, ce je izpolnjen pogoj $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$. To pomeni, da lahko rešitev te enačbe lokalno zapišemo kot graf zvezno odvedljive funkcije spremenljivke x

V splošnem nam pa ta izrek pove, kdaj lahko rešitve te enačbe $g(x, y) = 0$ lokalno zapisemo kot graf zvezno odveldljive vektorske funkcije vektorja spremenljivk x.

Iz vaj: Ce je gradient ∇g neničelen vzdolž množice M rešitev enačbe $g(x, y) = 0$, je M gladka funkcija.

Norma in operatorska norma

Norma

Preslikavi $V \to \mathbb{R} \quad v \mapsto \|v\|$, pravimo **norma** na prostoru V, če zanjo velja:

(i) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
(ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
(iii) $\|v\| \geq 0$
(iv) $\|0\| = 0$
(v) $\|v\| > 0 \; if \; v \neq 0$

Operatorska norma

$$\|A\| = \sup\{|Au|; \;\; u \in \mathbb{F}^n, \;\; |u| = 1\}$$

(i) Ta prelikava $\|\cdot\|: Mat(m \times n, \mathbb{F}) \to \mathbb{R}$ je norma
(ii) $|Av| \leq \|A\| |v|$
(iii) $\|A\| = \inf\{\kappa \in \mathbb{R}; \;\; \kappa \geq 0, \; |\mathrm{Av}| \leq \kappa |\mathrm{v}| \;\; \forall v \in \mathbb{F}^n\}$
(iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
(v) $\|A\|_\infty \leq \|A\| \leq \|A\|_2$

Banachovo skrčitve no načelo

Naj bosta $\{M, d\}$ in $\{M', d'\}$ metrična prostora. Preslikava $f: M \to M'$ je **skrčitev**, če obstaja taksna realna konstanta $0 \leq q < 1$, da velja:

$$d'\big(f(x), f(y)\big) \leq q \cdot d(x, y)$$

(točke preslika nekoliko bližje)

Banachov izrek o negibni točki

Naj bo M **poln** neprazen metrični prostor in naj bo $f: M \to M'$ skrcitev. Tedaj obstaja natanko ena točko $b \in M$ za katero velja, da je negibna točka:

$$f(b) = b$$

Bonus terminologija:

Linearna ogrinjača

Pomeni množico vseh linearnih kombinacij neke množice vektorjev

Nilpotent

$T \in End(V)$ je **nilpotenten**, če obstaja taksno število $k \in \mathbb{N}$, da je $T^k = 0$

Projektor

<u>Projektor</u> na podprostoru U, vzdolz podprostora W je endomorfizem $pr_U^W \in End(V)$, ki je enolično določen z:

$$pr_U^w|_U = id \qquad pr_U^W|_W = 0$$

Različni endomorfizmi

(i) Hermitski/Simetrični: $A^* = A$ so **raztegi**

(ii) Unitarni/Ortogonalni: $A^* = A^{-1}$ so **rotacije in zrcaljenja**

(iii) Antihermitski/Antisimetrični: $A^* = -A$ so **infinitezimalne rotacije**

Tipi in izmi

$Q^t Q = I$ Ortogonalna

$U^h U = I$ Unitarna

$T \in Lin(V, W)$

T je **monomorfizem** = T je **injektivna** ($f(x) = f(y)\ if\ x = y$)
T je **epimorfizem** = T je **surjektivna** (vsak element iz kodomene je slika vsaj enega elementa iz domene)
T je **izomorfizem** = T je **bijektivna**
T je **endomorfizem**, če $T: V \to V$
T je **avtomorfizem**, če je **endomorfizem** in **izomorfizem**