

Vrtarha

V splošni naboji predstavljajo vrtarha eno od najtežjih nalog mehanike. Bistvene lastnosti vrtarhe lahko pokažemo na primeru, ko imamo rotacijsko simetrijo. Vrtarha je po definiciji rotacijsko togo telo, katerega os lahko spreminjamo smer v prostoru in je podprta/vrsta k v eni točki. Definiramo tri osi:

i) Geometrijska os \vec{z}

Kadar v smeri te osi ima vrtarha vztrajnostni moment J_{33} , drugi dve lastni osi sta na to os pravokotni in imata zaradi simetrije enak vztrajnostni moment $J_{11} = J_{22}$.

ii) $\vec{\omega}$ določa trenutno smer osi vrtenja

iii) To os določa $\vec{\Gamma}$, ki je z $\vec{\omega}$ povezan preko vztrajnostnega tenzorja \underline{J} .

$$\vec{\Gamma} = \underline{J} \vec{\omega}$$

Gibanje opazujemo v lastnem sistemu X, Y, Z in v laboratorijskem (x, y, z) . V lastnem sistemu je \underline{J} diagonalen in velja:

$$\Gamma_x = J_{11} \omega_x \quad \Gamma_y = J_{22} \omega_y \quad \Gamma_z = J_{33} \omega_z$$

Za simetrično vrtarho velja, da vsi trije vektorji \vec{z} , $\vec{\omega}$ in $\vec{\Gamma}$ vedno ležijo v eni ravnini (ki je npr. določena $\vec{\omega}$ in \vec{z}).

Na vrtarho, ki ni podprta v težišču deluje težnostni navor

$$M = mgl \sin \theta$$

l ... med težiščem in opornim točko

θ ... kot med osjo vrtarhe in vertikalo

Za simetrično vrtarho je možno točno rešiti Eulerjeve enačbe.

Enostavnije opišemo gibanje t.i. "hitre vrtarhe". To je pogoj, kadar je kinetična energija mnogo večja od potencialne

$$\frac{1}{2} J \omega_z^2 \gg 2mgl$$

Gibanje pozorimo tako, da določena točka na osi opisuje neko trajektorijo na krogu s središčem v točki, kjer je os fiksirana. Nalonski kot θ se spreminja med θ_0 in θ_1 in v temu približno hitre vrtilne dobimo

$$\cos\theta_0 - \cos\theta_1 \approx \frac{J_{11}}{J_{33}} \frac{2mgl}{J_{33}\omega_2^2} \sin^2\theta_0$$

Način gibanja θ se seveda odvira od zač. pog. in dušenju. Vrtilna nihanja med skrajnima vrednostima kota θ z nutacijsko kotno hitrostjo

ω_N :

$$\omega_N = \frac{J_{33}}{J_{11}} \omega_2$$

in se hlata giblje okrog osi Z' s precesijsko kotno hitrostjo ω_{pr} :

$$\omega_{pr} = \frac{mgl}{J_{33}\omega_2}$$

Pri enostavnejši obravnavi vrtilne nutacije pogosto izpustimo svoj priredel težave. Pričakovali bi, da bi se precesija začela z enakomerno ω_{pr} amplitudo in v resnici ne. Vrtilna začne padati zaradi teže kar začne s precesijo amplituda hlata tudi z nutacijo. Hitrejša kot je vrtilna manjša je padec in manjša začetna amplituda nutacije. Nutacija je tukaj hitrejša ker je sorazmerna z ω_2 in bolj zadušena, zato je ne opazimo toliko.

Naloge:

Izmeri ω_{pr} in ω_N v odvisnosti od ω_2 pri treh različnih nastavitvah učeti na vrtilni. Izmerjene vrednosti primerjaj z izračunanimi.

Potrebšči so:

- Vrtilna (krogla, palica, ploščica z valcem)
- podnožje
- kompasor
- stroboskop
- štoparica

Navodila

Vrtarho vrtimo na "začni" blazini in jo dodatno pogonjimo z zrakom iz kompresorja. Na palici vrtarke je močno kontrasten vzorec. Meritve frekvenc opravljamo s Stroboskopom. Stroboskop nastavimo na višjo frekvenco kot pričakujemo in mu nato manjšamo frekvenco dokler vrteci se vzorec na vrtarici ne vidi močno obmrje. Za merjenje presistje vrtarke zamolnemo za nek. kot. in stopimo. Nutacijsko frekvenco merimo spet s Stroboskopom. Iz znanih dimenzij in mas komponent vrtarke lahko tudi izračunamo presistjsko in nutacijsko frekvenco ~~in~~ glede na vrtenje vrtarke okoli lastne osi Z.

Meritve

Del meritev sem poskusil narediti sump, ampak je bilo nekaj nekonstenc. Zelo težko je meriti s stroboskopom. Sploh nutacijske frekvence sem glede na dobljene podatke (in se ujema s teoretično napovedjo) slabo pomeril. Nisem bil dovolj natančen, lahko ~~je~~ izgledalo, ko "ujanes" Nutacijo. Zaradi neustreznosti sem svoje podatke malo preveril in se "poigral" s tiskim, ker je zgodilo Ok. Vaja sem pa dovolj z ~~mojimi~~ poslanimi podatki.

Izpeljava J_{33} :

$$\begin{aligned} \text{Brez uteži: } J_{33} &= J_u + J_{p1,z} + J_{p2,z} = \frac{2}{5} m_u r_u^2 + \frac{1}{2} m_b r_b^2 + \frac{1}{2} m_p r_p^2 \\ &= \frac{2}{5} 512g \cdot (2,53cm)^2 + \frac{1}{2} 19g \cdot (2,9cm)^2 + \frac{1}{2} \cdot 23g \cdot (0,315cm)^2 \\ &= \underline{\underline{1392}} \text{ g cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Z utežjo: } J_{33}' &= J_{33} + J_{u,z} = J_{33} + \frac{1}{2} m_u r_u^2 = 1392 \text{ g cm}^2 + \frac{19g}{2} \cdot (0,965cm)^2 \\ &= \underline{\underline{1400}} \text{ g cm}^2 \end{aligned}$$

Izpeljava J_{11} :

Brez utezi: $J_{11} = J_u + J_{p1,x} + m_{p1} r_{p1}^2 + J_{p,x} + m_p r_p^2$

$$= \frac{2}{5} m_u r_u^2 + m_{p1} \left(\frac{r_o^2}{4} + \frac{h_o^2}{12} \right) + m_o \left(r_k + \frac{h_o}{2} \right)^2 + m_p \left(\frac{r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12} \right) + m_p \left(r_u + h_o + \frac{h_p}{2} \right)^2$$

$$= \frac{2}{5} 512g (2,53cm)^2 + 19g \left(\frac{(2,9cm)^2}{4} + \frac{(0,1cm)^2}{12} \right) + 19g \left(2,53cm + 0,05cm \right)^2 + 23g \left(\frac{(0,315cm)^2}{4} + \frac{(8,98cm)^2}{12} \right) + 23g \left(2,53cm + 0,01cm + \frac{8,98cm}{2} \right)^2$$

$$= \underline{\underline{2765 gcm^2}}$$

2. utezi na L: $J_{11}' = J_{11} + J_{u,x} + m_u r_u^2 = J_{11} + m_u \left(\frac{r_u^2}{4} + \frac{h_u^2}{12} \right) + m_u L^2$

$$= 2765 gcm^2 + 19g \left(\frac{(0,965cm)^2}{4} + \frac{(2,52cm)^2}{12} \right) + 19g L^2$$

$$= \underline{\underline{2780 gcm^2 + 19g (L[cm])^2}}$$

Težišče in premik težišča:

Brez utezi: $M_u = M_{p1} + M_p$

$$m_u l = m_{p1} \left(r_u + \frac{h_p}{2} - l \right) + m_p \left(r_u + h_{p1} + \frac{h_p}{2} - l \right)$$

$$\Rightarrow l = \frac{m_{p1} \left(r_u + \frac{h_p}{2} \right) + m_p \left(r_u + h_{p1} + \frac{h_p}{2} \right)}{m_u + m_{p1} + m_p} = \underline{\underline{0,379 cm}}$$

2. utezi: $M_u = M_{p1} + M_p + M_u$

$$m l' = m_{p1} \left(r_u + \frac{h_{p1}}{2} - l' \right) + m_p \left(r_u + h_{p1} + \frac{h_p}{2} - l' \right) + m_u (L - l')$$

$$\Rightarrow l' = \frac{m_{p1} \left(r_u + \frac{h_{p1}}{2} \right) + m_p \left(r_u + h_{p1} + \frac{h_p}{2} \right)}{m_u + m_{p1} + m_p + m_u} + \frac{m_u L}{m_u + m_{p1} + m_p + m_u}$$

$$= \underline{\underline{0,366 cm + 0,0332 \cdot (L[cm])}}$$

Rezultati so predstavljeni kot tabele in dodane v datoteki Vrtarh_tabele.pdf

Zdi se mi, da se precej dobro ujemajo.

Dodatno:

Pri izpeljavi sem uporabljal meritve palane v navadnih:

Krogla: $m_k = 512g$ $2r_k = 50.2mm$

Ploščica: $m_{pl} = 19g$ $2r_{pl} = 58mm$ $h_{pl} = 1mm$

Palica: $m_p = 23g$ $2r_p = 63mm$ $h_p = 89.6mm$

Heč: $m_u = 19g$ $2r_u = 49.3mm$ $h_u = 25.2mm$

in vztrajnostne momente (in Steinerjev izrek):

$$J_k = \frac{2}{5}mr^2 \quad J_{k,oz} = \frac{1}{2}mr^2 \quad J_{k,oz} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$$