Diferencialne enačbe višjih redov

Obravnavamo $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$.
Par posebnih primerov:

1. V (redkih) primerih, ko imamo $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}\right) = 0$, vpeljemo $z = y^{(k)}$ in dobimo enačbo prvega reda $F(x, z, z') = 0$
2. Ce v diferencialni enačbi **x ne nastopa**, zapišemo y' kot funkcijo y, ki jo potem iščemo:
$$y' = z(y) \Rightarrow y'' = z'(y)y' = (z \cdot z')(y) \Rightarrow y''' = (zz')'(y)y' = [(zz'' + z'^2) \cdot z](y)$$
3. Eksplicitna enačba reda n:
$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \qquad (1)$$
Ta enačba je ekvivalentna sistemu:
$$z_1' = z_2 \quad z_2' = z_3 \dots z_{n-1}' = z_n \quad z_n' = f(x, z_1, \dots, z_n) \qquad (2)$$
Prehod:
$z_j = y^{(j-1)}$ za $j = 1, \dots, n$ in $z_1 = y$

Definicija za kasneje

Definiramo:

$$N(y) = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Tedaj $N: \{resitve\ za\ (1)\} \to \{resitve\ za\ (2)\}$ bijektivno

Eksistenčni izrek za diferencialne enačbe 1. reda (Picard-Lindelöf)

Naj bodo $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ter $a, b > 0$. Označimo:

$$P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R}^2$$

Naj bo $f = f(u, v): P \to \mathbb{R}$ **zvezna** in (enakomerno) **Lipschitzova** v 2. spremenljivki:

$$\exists \gamma > 0: \ |f(u, v_1) - f(u, v_2)| \leq \gamma |v_1 - v_2| \ \ \forall (u, v_1), (u, v_2) \in P$$

Označimo se $M = \max_P |f|$, $c = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{\gamma}\right\}$ ter $I = (x_0 - c, x_0 + c)$.
Tedaj ima Cauchyev problem (CP):

$$(CP) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

natanko eno rešitev: $y(x) = y: I \to [y_0 - b, y_0 + b]$

Lipschitzov pogoj

Wiki: Lipschitzova funkcija je zvezna funkcija ki je omejena v tem kako hitro se lahko spremeni. Obstaja taksno realno število, tako da za vsak par točk na grafu te funkcije, absolutna vrednost naklona premice, ki ti dve točki povezuje ne preseže to število.

Za Lipschitzov pogoje je dovolj da $\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| \leq \gamma$ na intervalu $I \times (y_0 - b, y_0 + b)$

Iz Lagrangeevega izreka dobimo

$$f(u,v_1) - f(u,v_2) = \frac{\partial f}{\partial v}(u,\xi)(v_1 - v_2) \;\; za\ neki\ \xi \in (v_1, v_2)$$

In ker je $\left|\frac{\partial f}{\partial v}(u,\xi)\right| \leq \gamma$ je pogoj izpolnjen. Ni pa odvedljivost nujna za Lipschitzov pogoj (npr. $|x|$)

Dokaz eksistenčnega izreka (Picard-Lindelöf)

Dokaz razdelimo na 5 korakov

1. *Nalogo prepišemo v ekvivalentno integralsko obliko*

Na (CP) izvedemo integracijo $\int_{x_0}^{x} d\xi$:

To je kot da bi imeli: $y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$

$$\int_{x_0}^{x} y'(\xi)d\xi = \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y(\xi)\big)d\xi$$

Torej dokazujemo:

$\exists!$ **zvezna funkcija**

$$y: I \to [y_0 - b, y_0 + b]:\; y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y(\xi)\big)d\xi\,;\;\; \forall x \in I \qquad (CPi)$$

Taka funkcija potem resi nas problem (CP).
Problem (CPi) je dovolj obravnavati/resiti na $I\delta =$ zaprt interval polmera $c - \delta$ okoli x_0 (glej skico zvezek)
Torej, fiksiramo $\delta \in (0, c)$

2. *Desno stran v (CPi) obravnavamo kot funkcijo $F(y)$*

$F: y \mapsto F(y)$ je definirana kot:

$$F(y): x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(\xi, y(\xi)\big)d\xi$$

3. *Kot definicijsko območje F vzamemo prostor $M = M_\delta$*

$M = M_\delta$ je prostor vseh zveznih funkcij $I_\delta \to [y_0 - b, y_0 + b]$ z maksimalno normo:
Za $\phi, \psi \in M$ je:

$$d(\phi, \psi) = \max_{x \in I_\delta} |\phi(x) - \psi(x)|$$

Sedaj (CPi) na $I_\delta \subset I$ lahko izrazimo v tej obliki:

$$\exists! \;\; y \in M:\; F(y) = y$$

Torej iščemo **fiksno točko** funkcije $F: M \to M$

Banachov izrek o negibni točki (Banachovo skrčitveno načelo)

Če je (M, d) **poln** metrični prostor in je $F: M \to M$ **skrčitev** (torej, če $\exists \gamma' \in (0,1): d\big(F(\phi), F(\psi)\big) \leq \gamma' d(\phi, \psi)$ za $\forall \phi, \psi \in M$), tedaj ima F natanko eno fiksno tocko na M:

$$\exists!\, \phi_0 \in M: F(\phi_0) = \phi_0$$

4. *Dokažemo, da je M poln metrični prostor*

5. *Dokažemo, da je nas $F: M \to M$ skrcitev:*

$$F(\phi)(x) - F(\psi)(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi(\xi)) d\xi - \int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi)) d\xi \; = \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \phi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))] d\xi$$

$$\left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \phi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))] d\xi \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \phi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))| d\xi \quad \mathit{Lipschitz\ pogoj\ na\ f}$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \gamma |\phi(\xi) - \psi(\xi)| d\xi$$

Velja: $\gamma|\phi(\xi) - \psi(\xi)| \leq d(\phi, \psi)\ \forall \xi \in I_\delta$

$$\leq \gamma |x - x_0| d(\phi, \psi)$$

Velja: $\gamma|x - x_0| \leq \gamma(c - \delta) = \gamma' < \gamma c \leq 1$
Torej je naša funkcija $F: M \to M$ res skrčitev.

6. *Uporabimo Banachovo skrčitveno načelo*

Peanov eksistenčni izrek

Obstajajo tudi drugi eksistenčni izreki kot na primer Peanov (1890):

Naj bo $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **odprta množica** in $f: D \to \mathbb{R}$ **zvezna**. Vzemimo $(x_0, y_0) \in D$. Tedaj ima Cauchyev problem:

$$(CP) \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

rešitev v $y = y(x)$ definirano na neki okolici x_0.

Primerjava med Peano in Picard-Lindelöf:

Peanov izrek ima blažje predpostavke na f (brez Lipschitzovega pogoja) ampak sklepamo lahko le na obstoj rešitev, na pa o enoličnosti.

Posplošitev Picard-Lindelöfovega eksistenčnega izreka na sisteme

Iščemo $y = (y_1, \dots, y_n): (x_0 - a, x_0 + a) \to \mathbb{R}$ tako, da za $f = f(u, v_1, \dots, v_n)$, ki slika v $\mathbb{R}^n$ velja:

$$y' = f(x, y)$$
$$y(x_0) = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$$

Natančno formulacijo in dokaz je profesor dal na učilnico.

Linearni sistemi diferencialnih enačb 1. reda

Linearna dif. en. Je oblike $y' = ay + b$ kjer sta a, b dani zvezni funkciji na I $y: I \to \mathbb{R}$ pa iščemo.

Pri sistemih linearnih diferencialnih enačb pa iščemo n funkcij $y_1, \dots, y_n: I \to \mathbb{R}$, ki naj hkrati zadoscajo linearnim enacbam:

$$\begin{gathered} y_1' = a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n + b_1 \\ y_2' = a_{21} y_1 + \cdots + a_{2n} y_n + b_2 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + \cdots + a_{nn} y_n + b_n \end{gathered}$$

Tu so $\{a_{jk}; j, k = 1, \dots, n\}$ in $\{b_j; j = 1, \dots, n\}$dane zvezne funkcije $I \to \mathbb{R}$

Sistem zapišemo matrično: $y' = Ay + b$ kjer so:

$$y = (y_1, \dots, y_n)^T \quad y' = (y_1', \dots, y_n')^T \quad b = (b_1, \dots, b_n)^T$$

vektorske funkcije in

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrična funkcija $A: I \to \mathbb{R}^{n,n}$
Ce je $b = 0$ potem pravimo, da je nas sistem **homogen**.

Rešitev je sestavljena iz partikularne in homogene rešitve

Naj bo y_0 neka konkretna vektorska funkcija, ki resi $y' = Ay + b$. Tedaj velja:

$$\{resitve\ za\ y' = Ay + b\} = y_0 + \{resitve\ za\ y' = Ay\}$$

Dokaz

Dokaz je enak kot za linearne diferencialne enačbe.

Matrična norma

Če je $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrika, označimo **normo matrike**:

$$\|B\| = \max_{\xi \in \mathbb{R}^n} |B\xi| \,;\, |\xi| = 1 \quad \Rightarrow |B\xi| \le \|B\| |\xi|$$

Če je $A: J \to \mathbb{R}^{n,n}$ matrična funkcija z zveznimi koeficienti, označimo:

$$\|A\| = \max_{u \in J} \|A(u)\| : |A(u)\xi| \le \|A\| |\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall u \in J$$

Zaprtje (quick comment)

$$J = (j_0, j_1) \quad \bar{J} = [j_0, j_1]$$

Eksistenčni izrek za linearne sisteme diferencialnih enačb

Naj bo $J^{odp} \subset \mathbb{R}$ **omejen interval** in $A: \bar{J} \to \mathbb{R}^{n,n}$ matrična funkcija z **zveznimi koeficienti**.
Vzemimo $x_0 \in J$ in $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$. Tedaj ∃! rešitev sistema:

$$y' = Ay \quad y(x_0) = \xi_0$$

definiran povsod na J: $y = y(x): J \to \mathbb{R}^n$

Dokaz eksistenčnega izreka za lin. sisteme (oz. skica dokaza)

Iz zveznosti $A \Rightarrow \|A(u_1) - A(u_2)\|$ majhno, če sta si u_1, u_2 blizu.
Eksistenčni izrek za sisteme: $y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$
Želimo imeti: $f\big(x, y(x)\big) = A(x)y(x)$ zato definiramo $f(u, v) = A(u)v$
Ker je A zvezna je tudi f zvezna. Lahko preverimo Lipschitzov pogoj. Uporabimo se linearnost matrik:

$$f(u, v_1) - f(u, v_2) = A(u)v_1 - A(u)v_2 = A(u)(v_1 - v_2)$$

$$\Rightarrow |\, f(u, v_1) - f(u, v_2)| \le \|A\| |v_1 - v_2| = \gamma |v_1 - v_2|$$

Eksistenčni izrek pove, da ima nas sistem natanko 1 rešitev y_0 definirano na intervalu $J \cap (x_0 - c, x_0 + c)$, kjer je $c = \frac{1}{\|A\|}$. Rešitev lahko razširimo na cel J (glej slikico v zvezku)

$$y' = Ay \quad y(x_1) = y_0(x_1)$$

Vidimo da se na preseku rešitvi ujemata. S postopkom nadaljujemo da zajamemo cel interval J.

Linearna neodvisnost (quick comment)

Vektorji $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ so **linearno neodvisni** če:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_k = 0$$

Funkcije $f_1, \dots, f_k$ so **linearno neodvisne**, če:

$$(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k)(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_k = 0$$

Linearna neodvisnost rešitev linearnega sistema

Naj bo J **odprt interval** in $A: J \to \mathbb{R}^{n,n}$ matrična funkcija z zveznimi koeficienti. Za $k \in \mathbb{N}$ in $j = 1, \dots, k$ naj bodo $y_j: J \to \mathbb{R}^n$ rešitve homogenega sistema $y' = Ay$. (»Imejmo k rešitev sistema«)

1. Funkcije $y_1, \dots, y_k$ so linearno neodvisne
2. Obstaja $x \in J$, da so vektorji $y_1(x), \dots, y_k(x)$ linearno neodvisni v $\mathbb{R}^n$
3. Za $\forall x \in J$ so vektorji $y_1(x), \dots, y_k(x)$ linearno neodvisni v $\mathbb{R}^n$

Izjave 1., 2. in 3. so si ekvivalentne.
Posledica tega je da množica rešitev homogenega linearnega sistema je n-dimenzionalen vektorski prostor.

Dokaz

Dokaz, da iz $3) \Rightarrow 2)$ je očiten.
$2) \Rightarrow 1)$
Dokazujemo s protislovjem: Privzemimo negacijo predpostavke in dokazujemo negacijo sklepa

$\exists$ nabor koeficientov $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ $\left(\lambda_j \neq 0, \forall j\right)$:

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k = 0 \quad oz. \lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_k y_k(x) = 0 \ \ \forall x \in J$$

$\Rightarrow y_1(x), \dots, y(k)$ so linearno odvisni za $\forall x \in J \Leftrightarrow \neg(2)$.

$1) \Rightarrow 3)$
Privzemimo $\neg(3)$ in dokažimo $\neg(1)$

$\exists x_0 \in J : y_1(x_0), \dots, y_k(x_0)$ so linearno odvisni

$$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \left(\lambda_j \neq 0, \forall j\right): \ \lambda_1 y_1(x_0) + \dots + \lambda_k y_k(x_0) = 0$$

Definiramo $y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k: J \to \mathbb{R}^n$. Ker y_j resi sistem $y' = Ay$, ga tudi y.

Hkrati je konstanta 0 (kot funkcija) prav tako rešitev za ta sistem. Po enoličnosti, ki pride iz eksistenčnega izreka za linearne sisteme, sta rešitvi enaki. Torej:

$$y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_k y_k \equiv 0$$

Hkrati velja $\lambda_j \neq 0, \forall j$, kar je pa ravno $\neg(1)$.

Iskanje partikularnih rešitev za sistem $y' = Ay + b$

Ravnokar: homogeni sistem $y' = Ay$ ima n-dimenzionalen prostor rešitev.
Izberemo linearno neodvisne rešitve $y_1, \dots y_n$ za $y' = Ay$ in tvorimo **fundamentalno matriko**.

$$Y = [y_1, \dots, y_n]$$

Torej velja $Y' = AY$.

Variacija konstante

Matrična funkcija:

$$y_p = Y \int Y^{-1} b\, dx$$

resi nehomogeni sistem $y' = Ay + b$. Oz. bolj natančno vzeto:

$$y_p(x) = Y(x) \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\xi) b(\xi)\, d\xi\,; \quad \forall x_0 \in J$$

To je naša iskana **partikularna rešitev.**

Dokaz

$$Y_p' = Y' \int Y^{-1} b + Y \left(\int Y^{-1} b \right)' = (AY) \int Y^{-1} b + Y(Y^{-1} b) = A \left(Y \int Y^{-1} b \right) + (YY^{-1}) b = Ay_p + b$$

Determinanta Wrońskega

Če so $y_1, \dots, y_n$ n-razsezne vektorske funkcije na nekem odprtem intervalu $I \subset \mathbb{R}$, torej $y_j : I \to \mathbb{R}^n$ za $\forall j = 1, \dots, n$ tedaj se:

$$W = \det Y$$

kjer je $Y = [y_1, \dots, y_n] : I \to \mathbb{R}^{n,n}$ imenuje **determinanta Wrońskega**

Sled matrike (quick comment)

Sled matrike $B = \left[b_{ij} \right]_{i,j=1,\dots,n}$ je vsota diagonalnih elementov $tr(B) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj}$

Liouvilleova formula

Naj bo $Y : I \to \mathbb{R}^{n,n}$ matrična funkcija, ki resi $Y' = AY$, kjer je A zvezna matrična funkcija na I. Tedaj za $W = \det Y$ in $\forall x_0, x \in I$ velja:

$$W(x) = W(x_0) \exp \left(\int_{x_0}^{x} (trA)(\xi) d\xi \right)$$

Formula je uporabna za iskanje baze prostora rešitev homogene enačbe. Ce jih poznamo $n - 1$, lahko določimo se n-to,

Dokaz za n=2

Pišimo:

$$Y = [y_1 \quad y_2] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Iz $Y' = AY$ sledi, da y_1, y_2 rešita (vektorsko) enačbo $y' = Ay$.

Velja $W = y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}$

$$\begin{aligned} W' &= y_{11}' y_{22} + y_{11} y_{22}' - y_{12}' y_{21} - y_{12} y_{21}' \\ &= (a_{11} y_{11} + a_{12} y_{21}) y_{22} + (a_{21} y_{12} + a_{22} y_{22}) y_{11} - (a_{11} y_{12} + a_{12} y_{22}) y_{21} - (a_{21} y_{11} + a_{22} y_{21}) y_{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a_{11} + a_{22})(y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21}) = tr(A) \cdot W = W'$$

Integriramo da dobimo W.

Sistemi lin. dif. en. s konstantnimi koeficienti

Rešitev homogene enačbe $y' = Ay$ lahko zapisemo kot:

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} A(\xi) d\xi} y(x_0)$$

Po vzoru na skalarne enačbe.

Eksponentna funkcija

Definiramo **eksponentno funkcijo matrike** B:

$$e^B = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j$$

Ce sta $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ matriki, ki komutirata ($AB = BA$), tedaj je $e^{A+B} = e^A e^B$

Konvergenca?

Vpeljemo delne vsote:

$$S_n = S_n(B) = \sum_{j=0}^{n} \frac{B^j}{j!}$$

S_n je matrično zaporedje, torej e^B obstaja, če $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$ in takrat velja $e^B = \lim_{n\to\infty} S_n$

Limita za matrike?

Uporabimo normo na matrikah, ki smo jo definirali prej. Preverimo **Cauchyjev** pogoj:

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} \frac{B^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j!} \|B\|^j \to 0$$

Torej $(S_n)_n$ je Cauchyjevo zaporedje v polnem metričnem prostoru, torej konvergira.

Odvod matrične eksponentne funkcije

Vzamemo $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Funkcija:

$$\begin{aligned} Y&: \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^{n,n}, \|\cdot\|) \\ x &\mapsto e^{xA} \end{aligned}$$

je **odvedljiva** v smislu, da $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists Y'(x) \in \mathbb{R}^{n,n}$:

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{Y(x+h) - Y(x)}{h} - Y'(x) \right\| = 0$$

Velja $Y'(x) = AY(x) = Y(x)A$ (kar se spodobi za eksponentno funkcijo$\frac{d}{dx}(e^{xa}) = ae^{ax}$)

Za vsako konstantno matriko $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ velja $\det(e^{xA}) = e^{tr(A)x}$

Rešitve lin. sistema

Funkcija $Y(x) = e^{xA}$ je rešitev (matričnega) Cauchyevega problema $Y' = AY \;\; Y(0) = I$. Vcasih te rešitvi pravimo **fundamentalna rešitev**.

Splošna rešitev sistema $y' = Ay,\;\; y: J \to \mathbb{R}^n$ je podana z $y(x) = e^{xA}\vec{c};\ \vec{c} \in \mathbb{R}^n$(poljuben realni vektor)

Kako izračunati e^{xA}?

1. Ce se A lahko **diagonalizira** (pomeni da $\exists$baza za $\mathbb{R}^n$, sestavljena iz lastnih vektorjev A), to je, če jo lahko zapišemo kot $A = PDP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko P in diagonalno matriko D, tedaj je:

$$A^m = PD^mP^{-1} \quad D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{bmatrix} \quad D^m = \begin{bmatrix} d_1^m & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n^m \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} = P\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^m}{m!}\right)P^{-1} = Pe^D P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^{d_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{d_n} \end{bmatrix}P^{-1}$$

2. V splošnem se A ne da diagonalizirati, lahko pa poljudbni matriki priredimo **Jordanovo obliko** $A = PJP^{-1}$, kjer je J blocno diagonalna, sestabljena iz blokov:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Vsota dolžin kletk je enaka stopnji $(\lambda - \lambda_j)$ v karakteristicnemu polinomu.
Vkljuceno z veckratnostjo so na diagonali lastne vrednosti
Stevilo kletk za λ_j je enako $\dim \ker(A - \lambda_j I)$
Podobno kot v diagonalnem: $e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}$

Za Jordanske bloke je lažje izračunati eksponentno funkcijo

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + N; \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N je **nilpotenta matrika**: $N^n = 0$. Z uporabo binomske formule:, ker $\lambda I, N$ komutirata:

$$J^k = (\lambda I + N)^k = \sum_{j=0}^{k} (\lambda I)^j (N)^{k-j}$$

$$\Rightarrow e^{xJ} = e^{x\lambda I + xN} = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{n} \frac{(xN)^j}{j!} = e^{x\lambda} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{x^j}{j!} N^j \Rightarrow e^{xJ} = e^{x\lambda} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 & \dots & x^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & x^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rešitve iz lastnih vrednosti

Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ matrika

1. Ce je $\lambda \in \mathbb{C}$ **lastna vrednost** za A z lastnim vektorjem $v \in \mathbb{C}^n$, tedaj $y(x) = e^{\lambda x} v$ resi enacbo $y' = Ay$

Naj bo A zdaj **realna**:

2. Ce je $\lambda \in \mathbb{C}$ **lastna vrednost** za A z lastnim vektorjem $v \in \mathbb{C}^n$ tedaj je tudi $\bar{\lambda}$ lastna vrednost za A z lastnim vektorjem $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$
3. Ce funkcija y resi enacbo $y' = Ay$. Tedaj jo rešita tudi $Re(y)$ in $Im(y)$

Dokaz

1. $\mathrm{y}'(\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{e}^{\mathrm{x}\lambda} \mathrm{v} = \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{x}}(\lambda \mathrm{v}) = \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{x}}(\mathrm{Av}) = \mathrm{A}(\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{x}} \mathrm{v}) = \mathrm{Ay}(\mathrm{x})$
2. $Av = \lambda v \xrightarrow{konjugiramo} A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ ker je A realna
3. $y = a + ib$, kjer sta a, b funkciji.
$$y' = a' + ib' \quad = \quad Ay = Aa + iAb$$
Torej $a' = Aa$ in $b' = Ab$ in $a = Re(y)$ $b = Im(y)$

Linearne diferencialne enačbe višjih redov

Spet velja:

$$\{splosna\ resitev\} = partikularna + \{resitev\ homogene\ enacbe\}$$

Naj bo I omejen odprt interval v $\mathbb{R}$ in $a_0, \dots, a_n, b$ **zvezne** funkcije na $\bar{I}$ in $a_n \neq 0$ povsod na I. Označimo $C^n(I) = \{n - krat\ zvezno\ odvedljiva\ funkcija: I \to \mathbb{R}\}$ Za $\phi \in C^n(I)$ definiramo <u>**operator**</u> $L: C^n(I) \to C(I)$ s predpisom:

$$L\phi = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi^{(k)}$$

(Torej ta operator funkcijo spremeni v linearno kombinacijo vseh njenih odvodov)
Zanimajo nas rešitve enačbe $L\phi = b$

$$a_n\phi^{(n)} + a_{n-1}\phi^{(n-1)} + \dots + a_1\phi' + a_0\phi = b$$

Označimo.

$$b_j = -\frac{a_{j-1}}{a_n} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} = A(a_0, a_1, \dots, a_n) = A(b_1, \dots, b_n); \;\; tr(A) = b_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

Naj bo se:

$$N(y) = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}; \quad y \in C^n(I)$$

Prevedba na sistem enačb 1. reda

Ob prejšnjih oznakah velja:

$$\{resitve\ za\ Ly = f\} \overset{N}{\to} \{resitve\ za\ z' = Az + g\}$$

kjer je $g = \left(0, \dots, 0, \frac{f}{a_n}\right)$ in sicer **bijektivno**. (V g se pojavijo ničle $n-1$ krat)
To pomeni, da lahko linearno diferencialno enačbo višjega reda »spremenimo« v sistem enačb 1. reda.

Dokaz

Naj y resi $Ly = f$. Vzemimo $Z = N(y)$ in zapisemo sistem $z' = Az + g$, kjer je $z = z_1, \dots, z_n$:

$$\begin{bmatrix} {z_1}' \\ \vdots \\ {z_n}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_{n-1} z_{n-1} + b_n + z_n + \frac{f}{a_n}$$

$$= -\frac{a_0 z_1}{a_n} - \dots - \frac{a_{n-1} z_n}{a_n} + \frac{f}{a_n}$$

$$\Rightarrow z_1' = z_2, z_2' = z_3 \dots z_{n-1}' = z_n \qquad z_n' = -\frac{a_0 z_1}{a_n} - \dots - \frac{a_{n-1} z_n}{a_n} + \frac{f}{a_n}$$

Rešitev za z_n' lahko pomnozimo z a_n in dobimo:

$$a_0 z_1 + \dots + a_{n-1} z_n + a_n z_n' = f$$

Upoštevamo se $z_j = z_1^{(j-1)}$ in dobimo:

$$a_0 z_1 + a_1 z_1' + \cdots + a_n z_1^{(n)} = f \quad \textit{enako kot} \;\; Lz_1 = f$$

Partikularna rešitev

Ce so $y_1, \dots, y_n$ linearno neodvisne rešitve enačbe $Ly = 0$, tedaj je **partikularna rešitev** (nehomogene) enačbe $Ly = f$ dana z nastavkom:

$$c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

kjer je

$$(c_1, \dots, c_n)(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(\xi)}{a_n(\xi)} (Y_n^{-1})(\xi) d\xi$$

kjer je:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

in je Y_n^{-1} oznaka za zadnji stolpec matrike Y^{-1}. Za (skalarno) funkcijo $W = \det Y(x)$ velja:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}}{a_n}}$$

Dokaz

Naj bojo $y_1, \dots, y_n$ linearno neodvisne rešitve sistema $y' = Ay$. Tvorimo matriko:

$$Y = [y_1 \quad \cdots \quad y_n]$$

Vemo od prej, da matrična funkcija:

$$z_p = Y \int Y^{-1} g dx$$

resi (nehomogeni) sistem $z' = Az + g$

Torej je partikularna rešitev za $Ly = f$ dana kot **1. komponenta** vektorske funkcije:

$$z = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

kjer je

$$(c_1, \dots, c_n)^T = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(\xi) g(\xi) d\xi$$

(kar je z f/a_n pomnožen zadnji stolpec matrike Y^{-1})

Zadnja enakost pa sledi direktno iz Liouvilleove formule, saj že matriko A velja $tr(A) = b_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ iz česa dobimo točno to enakost.

Iskanje rešitev homogene enačbe s konstantnimi koeficienti

Karakteristična enačba

Karakteristična enačba linearne diferencialne enačbe $\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = 0;\;\; a_j \in \mathbb{R}$ je definirana kot:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0$$

Ce je $\lambda \in \mathbb{C}$ ničla karakterističnega polinoma $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$ tedaj je :

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

rešitev diferencialne enačbe $\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = 0$

Imejmo enačbo:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\Delta)$$

Ce je pripadajoči karakteristični polinom enak $a_n(\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$, tedaj bazo prostora rešitve enačbe (Δ) tvorijo funkcije:

$$\{x^{l-1} e^{\lambda_j x}; j = 1, \ldots, m \text{ } in \text{ } l = 1, \ldots k_j\}$$

Npr.:

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

Eulerjeva diferencialna enačba

To je poseben primer linearne diferencialne enačbe višjega reda, in sicer:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{(j)}(x) = b(x); \quad a_j \in \mathbb{R}$$

Ker je:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j s^j w^{(j)}(s); \quad s = -x, \quad w(s) = y(-s)$$

je dovolj enačbo rešiti za $x > 0$.

Naj bo $k \in \mathbb{N}$ in $y: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ razreda C^k. Definiramo $z \in C^k(\mathbb{R})$ s predpisom $z(t) = y(e^t), t \in \mathbb{R}$. Ce označimo $D = \frac{d}{dt}$ (kot operator odvajanja), tedaj za $x = e^t \in (0, \infty)$ velja:

$$x^k y^{(k)}(x) = [D(D - I)(D - 2I) \ldots (D - (k-1)I)z](t) = p_k(D)z$$

Npr.:

$$P_1(D)z = Dz = \dot{z}$$
$$P_2(D)z = (D - I)Dz = (D - I)\dot{z} = D\dot{z} - \dot{z} = \ddot{z} - \dot{z}$$
$$P_3(D)z = (D - 2I)(D - I)Dz = (D - 2I)(\ddot{z} - \dot{z}) = (\ddot{z} - \dot{z})' - 2(\ddot{z} - \dot{z}) = \dddot{z} - 3\ddot{z} + 2\dot{z}$$

Dokaz

$$k = 1 \qquad \mathcal{LS} = xy'(x) = e^t y'(e^t) \quad \mathcal{DS} = [Dz](t) = y'(e^t)$$

Indukcijski korak: Privzemimo da velja: $e^{kt} y^{(k)}(e^t) = [P_k(D)z](t)$

Na to zvezo delujemo z operatorjem $D - kI: \phi \mapsto \dot{\phi} - k\phi$

Na desni strani dobimo torej $[P_{k+1}(D)z](t)$, na levi pa:

$\left[e^{kt} y^{(k)}(e^t)\right]' - k\left[e^{kt} y^{(k)}(e^t)\right]$, kjer je ravno: $e^{kt} y^{(k+1)}(e^t) e^t = e^{(k+1)t} y^{(k+1)}(e^t)$

To pomeni, da Eulerjeva enačba:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)}(x) = b(x); \quad x > 0$$

ob substituciji $z(t) = y(e^t)$ postane linearna enačba s konstantnimi koeficienti:

$$\left[\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(D)\right] z(t) = b(e^t)$$