Osnove teorije Hilbertovih prostorov

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ [genericno: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$]

Skalarni produkt

Skalarni produkt na V je poljubna preslikava:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{K}$$

ki zadošča naslednjim pogojem:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$
2. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. Za $\forall y \in V$ je $x \mapsto \langle x, y\rangle$ linearna na V. (Linearnost v prvem faktorju)
   $\Rightarrow \langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle, \quad \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
4. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ $(= \langle x, y\rangle, ce\ \mathbb{K} = \mathbb{R})$
   $\Rightarrow \langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle$

Norma

Norma, ki izhaja iz skalarnega produkta $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na V, je preslikava $\|\cdot\|: V \to [0, \infty)$, definirana s predpisom:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

To je res norma saj velja:

1. $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in V$
2. $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(Trikotniška neenakost)**

Velja:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \qquad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

Neenakost Cauchy-Bunjakovski-Schwartz

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Enakost velja natanko tedaj, ko sta x, y **kolinearna**. (Torej $y = \lambda x$ za neki $\lambda \in \mathbb{K}$)

Rekonstrukcija skalarnega produkta iz norme

Ce norma $\|\cdot\|$ izhaja iz skalarnega produkta, lahko s pomočjo formule:

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \quad \forall x, y \in V \quad in\ \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

skalarni produkt rekonstruiramo iz norme.

Paralelogramska identiteta

Norma zadošča paralelogramski identiteti, natanko takrat. ko izhaja iz nekega skalarnega produkta.

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Metrika

Vemo da norma na vektorskemu prostoru porodi **metriko**. Definiramo $d: V \times V \to [0, \infty)$ s predpisom:

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

Velja:

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Polnost

Ce je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v polnem prostoru X ima v njem nujno tudi limito.

Hilbertov prostor

Vektorski prostor s skalarnim produktom je **Hilbertov**, če je v metriki, ki jo porodi skalarni produkt (oz. norma, ki izhaja iz njega), **poln**.

Prostor L^2

$$L^2(J) = \left\{ f: J \to \mathbb{C}; \|f\|_2 = \sqrt{\int_J |f|^2 < \infty} \right\}$$

To niso le zvezne funkcije pac pa so **Lebesgovo merljive** (in seveda kvadratično integrabilne). To je vektorski prostor in izkaze se, da je celo Hilbertov.

Prostor l^2

$$l^2 = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}};\ a_n \in \mathbb{C}\ \ in\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\} = \left\{ \phi: \mathbb{N} \to \mathbb{C}; \sum_n |f(n)|^2 < \infty \right\}$$

Prostor l^2 je prostor **vseh s kvadratom sumabilnih zaporedji**. Za $a = (a_n)_n \in l^2$ ter $b = (b_m)_m \in l^2$ definiramo skalarni produkt:

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

V njem je l^2 Hilbertov prostor. Velja torej:

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}$$

Ta prostor je osnovni model za **separabilne Hilbertove prostore**.

Separabilen Hilbertov prostor

Metrični prostor M je **seperabilen**, če vsebuje števno gosto množico. To pomeni, če $\exists N \subset M$:

- N ima najvec **števno** neskončno elementov
- N je **gosta** v M

Gosta množica
Množica $N \subset M$ je **gosta**, če za $\forall x \in M$ in za $\forall \epsilon > 0 \quad \exists y \in N: d(x,y) < \epsilon$
(Pomen: Za poljubmno majhno okolicjo je zraven se nek element N.)

Osnovne lastnosti prostorov s skalarnim produktom

Pravokotna vektorja
Pravimo, da sta si $x, y \in X$ **<u>pravokotna</u>**, če je $\langle x, y \rangle = 0$. Običajne oznake $x \perp y$.

Pitagorov izrek
Za $x \perp y$ velja $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Dokaz

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle = \|x\|^2 + 2Re(\langle x,y \rangle) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Podobno velja za n-terne medsebojno pravokotne vektorje:

$$x_j \perp x_k \Rightarrow \|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$$

Ortogonalni komplement
Naj bo $A \subset X$ poljubna podmnožica. Množica:

$$A^\perp = \{y \in X; y \perp a \ \ za\ \forall a \in A\}$$

se imenuje **<u>ortogonalni komplement</u>** množice A v X.
Za $\forall A \subset X$ je $A^\perp$ zaprt vektorski podprostor v X.

Ortogonalna/Pravokotna projekcija
Naj bo $Y \leq X$ (Y vektorski podprostor v X). Vzamemo $x \in X$. Pravimo, da je $y \in Y$ **<u>ortogonalna (pravokotna) projekcija</u>** vektorja x na podprostoru Y, ce je :

$$x - y \perp Y$$

Oznaka: $y = P_Y x$
Preslikava $P_Y: X \to Y,\ \ x \mapsto y$ se imenuje **<u>ortogonalni projektor</u>** prostora X na podprostor Y.

Obstoj in enoličnost ortogonalnega projektorja
Naj bo X prostor s skalarnim produktom in $Y \leq X$ linearni podprostor. Denimo, da za $\forall x \in X$ $\exists$ neki $P_Y x$. Tedaj velja:

1. $P_Y x$ je **enolično določen**
2. $P_Y x$ je najboljsi priblizek za x v Y, v smislu, da je najblizji element v podprostoru Y:
$$\|x - P_Y x\| = d(x,y) \qquad \left(= \inf_{y \in Y} \|x - y\|\right)$$
3. Preslikava P_Y je **linearna**
4. Preslikava P_Y je **zvezna** oz. je celo **skrčitev**
$$\|P_Y x\| \leq \|x\|$$
5. Y je zaprt v X (Torej P_Y ne obstaja za vse podprostore)

Dokaz

1)

Denimo, da $\exists y_1, y_2 \in Y$: $x - y_1 \perp Y \quad x - y_2 \perp Y$

Odstejemo: $y_2 - y_1 \perp Y$

$$\Rightarrow y_2 - y_1 \perp y_2 - y_1 \Rightarrow y_2 - y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

2)

Vzemimo $y \in Y$. Velja:

$$x - y = (x - P_Y x) + (P_Y x - y)$$

Uporabimo Pitagorov izrek:

$$\|x - y\|^2 = \|x - P_Y x\|^2 + \|P_Y x - y\|^2 \geq \|x - P_Y x\|^2$$

Enakost $\Leftrightarrow y = P_Y x$

3)

Pišimo kar $P = P_Y$. Vzamemo $x_1, x_2 \in X$. Ker je $x_1 - Px_1, x_2 - Px_2 \in Y^\perp$ je tudi:

$$(x_1 + x_2) - (Px_1 + Px_2) \in Y^\perp$$
$$Px_1, Px_2 \in Y \Rightarrow Px_1 + Px_2 \in Y$$

$P(x_1 + x_2)$ je po 1) edini $w \in Y$: $(x_1 + x_2) - w \in Y^\perp$

Toda $Px_1 + Px_2$ je tudi tak $\Rightarrow P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2$

4)

Iz Pitagorovega izreka ter dekompozicije: $x = (x - Px) + Px$

$$\Rightarrow \|x\|^2 \geq \|x - Px\|^2 + \|Px\|^2 \geq \|Px\|^2$$

5)

Naj za $(y_n)_n \subset Y$ velja $y_n \to x$ a neki $x \in X$. Dokazujemo $x \in Y$.

Privzamemo $\|y_n = x\| \to 0$. Ker je P zvezna, po tocki 4) je:

$$\|Py_n - Px\| \leq \|y_n - x\| \to 0 \quad oz. Py_n \to Px$$

Toda $y_n \in Y$ za to je $Py_n = y_n$. Videli smo, da gre $y \to x$ in $y \to Px$ v X. To je pa mogoče le, če je $x = Px$ oz. $x \in Y$.

Ortonormiran sistem

Naj bo $Y \leq X$ koncno dimenzionalni podprostor in $\{e_j; j = 1, \dots, n\}$ njegova baza, sestavljena iz paroma ortogonalnih vektorjev z dolžino 1. Torej:

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1; & j = k \\ 0; & j \neq k \end{cases} \qquad (*)$$

Obstoj taksne baze zagotavlja Gram-Schmidtova ortogonalizacija.

Pravimo, da je družina vektorjev $\{e_j; j \in \mathbb{N}\} \subset X$ **ortonormiran sistem (ONS)** če velja $(*)$.

Besselova neenakost

Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom in $\{e_j; j \in \mathbb{N}\}$ ONS v X. Tedaj za $\forall x \in X$ velja:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Dokaz

Definiramo $Y_n = Span\{e_1, \dots, e_n\}$

Obstaja ortogonalni projektor:

$$P_{Y_n}x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j$$

Na temu lahko uporabimo Pitagorov izrek:

$$\|P_{Y_n}x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

Ker vemo, da je ortogonalni projektor skrčitev velja neenakost: $\|P_{Y_n}x\| \leq \|x\|$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n$$

Sedaj pošljemo $n \to \infty$.

Zaporedje delnih vsot $s_n = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2$ je naraščajoče $(|\langle x, e_j \rangle| \geq 0)$ in omejeno $(z\ \|x\|^2)$, zato je konvergentno. Limita je (po definiciji vsote neskončnih vrst) ravno:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2$$

Konvergenca vrste iz l^2

Naj bo X Hilbertov prostor, $\{e_j; j \in \mathbb{N}\}$ ONS in $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$. Tedaj:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$$

obstaja/konvergira v X. (To pomeni, da $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$ v X oz. $\exists s \in X$: $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n - s\| = 0$)

Ce označimo $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j$, tedaj je $c_j = \langle x, e_j \rangle$

Torej v Hilbertovem prostorju, za dan ONS vrsta:

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \ \ konvergira \quad \Leftrightarrow \quad (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^2$$

Fouriereva vrsta

Naj bo X Hilbertov prostor in $\mathcal{E} = \{ e_j; j \in \mathbb{N}\}$ ONS v X. Vrsti:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

pravimo **Fouriereva vrsta** za X glede na $\mathcal{E}$, števila $\langle x, e_j \rangle$ pa se imenujejo **Fourierevi koeficienti**.

Konvergenca te vrste je posledica prejšnjih trditev namreč $\langle x, e_j \rangle \in l^2$

Kompleten ortonormiran sistem

Naj bo X Hilbertov prostor. Pravimo, da je ONS $\mathcal{E} = \{e_j; j \in \mathbb{N}\}$ **kompleten ortonormiran sistem (KONS)**, če za $\forall x \in X$ velja:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$$

(Torej to pomeni, da x sovpada oz. je enak s svojo Fourierevo vrsto glede na $\mathcal{E}$)

Naj bo X Hilbertov prostor in $\mathcal{E} = \{e_j; j \in \mathbb{N}\}$ ONS v X. Naslednje izjave so ekvivalentne:

1. $\mathcal{E}$ je KONS
2. Za $\forall x, y \in X$ je:
$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}$$
3. Za $\forall x \in X$ je :
$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2$$
Parsevalova identiteta (Enakost pri Besselovi identiteti dobimo, če je ONS v resnici KONS)
4. $\mathcal{E}$ ni vsebovan v nobenem (strogo) večjem KONS
5. $\mathcal{E}^{\perp} = \{0\}$

V neskončno dimenzionalnih prostorih se linearna dimenzija **ne** ujema s kardinalnostjo KONS.

Kardinalnost

Pri končnih množicah je to število elementov množice (moč množice), pri neskončnih pa gledamo tip/vrsto neskončnosti.

Fouriereve vrste v $L^2(0,1)$

Ideja Fouriereve vrste je aproksimacija funkcije s preprostejšimi funkcijami.

- Vsaka funkcija je limita polinomov — Taylorjev izrek
- Vsaka funkcija je limita valovanj/trigonometričnih funkcij — Fourier, Bernoulli, Euler

Osnovne trigonometrične funkcije

Za $\forall n \in \mathbb{Z}$ definiramo $e_n: \mathbb{R} \to \{\xi \in \mathbb{C}; |\xi| = 1\}$ s predpisom:

$$e_n(x) = e^{2\pi i n x}; \quad x \in \mathbb{R}$$

To je **enotska krožnica v kompleksni ravnini**.

To so tako imenovane 1-periodicne funkcije $\left(e_n(x+1) = e_n(x)\right)$

Imenujemo jih **osnovne trigonometrične funkcije** ker velja:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Pogoj za aproksimacijo

Pogoj za aproksimacijo funkcije f z e_n je, da pričakujemo, da bo tudi f 1-periodicna. Taksne f potem lahko enacimo z funkcijami na enotski krožnici v $\mathbb{C}$. Alternativno lahko gledamo funkcije na $I = [0,1]$ za katere velja $f(0) = f(1)$.

Enotsko krožnico v $\mathbb{C}$ bomo označili kot Torus $\mathbb{T}$

Skalarni produkt in ONS v L^2

Skalarni produkt na $L^2(I)$ je definiran kot:

$$\langle f, g\rangle_{L^2(I)} = \int_0^1 f(x)\overline{(g(x))}\, dx$$

Glede na ta skalarni produkt je množica:

$$\mathcal{E} = \{e_n; n \in \mathbb{Z}\}$$

ONS oz. celo KONS v $L^2(I)$.

Fourierevi koeficienti

Za $f \in L^2(I)$ je njen <u>***n*-ti Fourierev koeficient**</u> definiran kot:

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n\rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\, dx$$

Fouriereva vrsta

<u>**Fouriereva vrsta**</u> za f je tedaj vrsta (v točki $x \in \mathbb{T}$):

$$sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}$$
$$= \hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{f}(n)e^{2\pi inx} + \hat{f}(-n)e^{-2\pi inx}\right]$$

Oklepaj v zadnji vsoti lahko razpišemo, da vidimo, da gre res za valovanja:

$$\left[\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\right]\cos(2\pi nx) + i\left[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)\right]\sin(2\pi nx)$$

Torej dobimo:

$$\hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx)]$$

Kjer je

$$a_n = \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = 2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi nx)\, dx$$
$$b_n = i\left[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)\right] = 2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)\, dx$$
$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2} \qquad \hat{f}(-k) = \frac{a_k + ib_k}{2}; \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Posledica tega, da je $\mathcal{E}$ KONS v L^2

Za $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ je:

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N f\| = \lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e_n \right\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$$

Isto velja tudi v $L^p(\mathbb{T})$ za $1 < p < \infty$, kjer je :

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f: [0,1] \to \mathbb{C}; \|f\|_p = \left(\int |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

Konvergenca po točkah

Ce je $f \in L^2(\mathbb{T})$, tedaj:
$S_N f \to f$ po tockah (skoraj povsod na $\mathbb{T} = [0,1]$)

Naj bo $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Privzemimo naslednje lastnosti:

- f je **odsekoma zvezna**
  (Torej zvezna na $\mathbb{T}$ razen morda v končno mnogo točkah $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, v katerih pa ima levo in desno limito:
  $$f(x_+) = \lim_{\delta \to 0} f(x + \delta) \qquad f(x_-) = \lim_{\delta \to 0} f(x - \delta)$$
  To so skoki funkcije f v točki x)
- Na $\mathbb{T} \backslash X$ je funkcija **odvedljiva** in je odvod f' omejen

[Te lastnosti, bi lahko preprostejše a z močnejšo predpostavko zahtevali s tem, da je f odsekoma zvezno odvedljiva]

Tedaj:

$$S_N f(x) \to \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \quad za\ N \to \infty, \forall x \in \mathbb{T}$$

(Delne vsote konvergirajo po točkah k povprečju leve in desne limite)

Parsevalova identiteta (za $\mathcal{E}$)

Ce je $f \in L^2(\mathbb{T})$, tedaj:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(n) \right|^2$$

Riemann-Lebesguov lema

Za $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ velja:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \cos(2\pi n x) \, dx = \frac{a_n}{2} = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \sin(2\pi n x) \, dx = \frac{b_n}{2} = 0$$

Dokaz

Dovolj pokazati za f je realna. Ce bi bila F kompleksna, sta $Re(F), Im(F) \in L^2$ in bi napisali samo:

$$\int_0^1 F(x) \cos(2\pi n x) \, dx = \int_0^1 Re(F(x)) \cos(2\pi n x) \, dx + i \int_0^1 Im(F(x)) \cos(2\pi n x) \, dx$$

Torej naj bo f realna.
Velja $\hat{f}(n) = \frac{a_n}{2} - i \cdot \frac{b_n}{2}$. Hkrati pa je $f \in L^2$ torej po Parsevalovi identiteti sledi $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \hat{f}(n) \right|^2 < \infty$
V posebnem $\left| \hat{f}(n) \right|^2 = \left(\frac{a_n^2}{4} + \frac{b_n^2}{4} \right) \to 0$ za $n \to \infty$ torej je:

$$0 \leq a_n^2 \leq 4\left|\hat{f}(n)\right|^2 \to 0 \quad \Rightarrow a_n \to 0$$

Podobno za b_n

Wilbraham-Gibbsov fenomen

Ce vzamemo se tako pozno vrsto, bo pri skoku funkcije (točka nezveznosti), Fouriereva vrsta malo presegla limito funkcijske vrednosti tam. Sicer pa ni protislovja, ker se te maksimumi ne zgodijo v točki nezveznosti ampak (sicer poljubno) blizu.