Integrali s parametrom

Integrali s parametrom so (integralske) funkcije oblike:

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

Kjer je $f(x,t)$ funkcija dveh spremenljivk.

Zveznost in enakomerna zveznost

Funkcija f je **zvezna** v neki točki $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ |y - x| < \delta : |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Funkcija f na $[a,b]$ je **enakomerno zvezna**, če lahko najdemo $\delta > 0$, ki bo dober za vse $x \in [a,b]$ hkrati. Vsaka funkcija na kompaktni množici v $\mathbb{R}^n$ (torej zaprta in omejena) je vedno enakomerno zvezna.

Lagrangeev izrek:

Naj bo f zvezna na $[u,v]$ in odvedljiva na $(u\,,v)$. Tedaj $\exists w \in (u,v)$ tako da velja:

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = f'(w) \quad oz. \ f(v) - f(u) = f'(w)(v - u)$$

Zveznost integrala s parametrom

Naj bodo $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ in $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ **zvezna funkcija**. Tedaj je $F: [c,d] \to \mathbb{R}$ definirana kot $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ spet **zvezna.**

Dokaz

Vzamemo $t_0 \in [c,d]$ in $\epsilon > 0$. Za nek $t \in [c,d]$ velja:

$$|F(t) - F(t_0)| = \left|\int_a^b f(x,t)dx - \int_a^b f(x,t_0)dx\right| = \left|\int_a^b [f(x,t) - f(x,t_0)]dx\right|$$

Po trikotniški neenakosti:

$$\left|\int_a^b [f(x,t) - f(x,t_0)]dx\right| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|dx$$

Ker je f zvezna na kompaktnem $P = [a,b] \times [c,d]$ je tam **enakomerno zvezna**. To pomeni (po definiciji), da $\exists \delta > 0$: za poljubna para $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in P$ velja:

$$|(x_1,t_1) - (x_2,t_2)| < \delta \ \Rightarrow |f(x_1,t_1) - f(x_2,t_2)| < \frac{\epsilon}{b - a}$$

Sledi, da če $(t - t_0) < \delta$ tedaj je:

$$|(x,t) - (x,t_0)| = \sqrt{(x - x)^2 + (t - t_0)^2} = |t - t_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |F(x,t) - F(x,t_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x,t_0)|\, dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b - a} dx < \epsilon$$

Odvedljivost po parametru

Naj bo $f(x,t): [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Privzemimo, da je f **zvezna** in da $\frac{\partial f}{\partial t}$ **obstaja** in je **zvezen** na $P = [a,b] \times [c,d]$. Tedaj je $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$ **odvedljiva** na $[c,d]$ in velja: $F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$.

Dokaz

Vzemimo $t \in [c,d]$ in $\epsilon > 0$. Za poljuben $h \in \mathbb{R}: t+h \in [c,d]$ je :

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} dx$$

Po Lagrangeevem izreku za vsak posamezen $x \in [a,b]$ $\exists \theta = \theta(x,t,h) \in (0,h)$:

$$f(x,t+h)-f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\theta)[(t+h)-t]$$

Sledi:

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\theta) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right] dx \qquad (*)$$

Po predpostavki je $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ zvezna na P, zato je tam tudi **enakomerno zvezna**. Torej $\exists \delta > 0$:

$$|(x_1,t_1)-(x_2,t_2)| < \delta \ \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x_1 t_1) - \frac{\partial f}{\partial t}(x_2,t_2)\right| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Tedaj za $|h| < \delta$ velja tudi:

$$|(x,t+\theta)-(x,t)| = \sqrt{(x-x)^2 + (t+\theta-t)^2} = |\theta| \le |h| < \delta$$
$$\Rightarrow \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\theta) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right] dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} dx = \epsilon$$

Odvod integrala s parametrom, če je parameter v mejah

Če imamo se funkciji $\alpha, \beta: [c,d] \to [a,b]$, je $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$ **odvedljiva** na $[c,d]$ in velja:

$$F'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dt + f(\beta(t),t)\cdot\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\cdot\alpha'(t)$$

Dokaz

Za dokaz uporabimo verižno pravilo. Označimo $G(s,u,v) = \int_u^v f(x,s)dx$. Tedaj je :

$$F = G \circ (id, \alpha, \beta)$$
$$F'(t) = G_s'\big(t,\alpha(t),\beta(t)\big)\cdot 1 + G_u'\big(t,\alpha(t),\beta(t)\big)\cdot\alpha'(t) + G_v'\big(t,\alpha(t),\beta(t)\big)\cdot\beta'(t)$$

Velja: $\frac{d}{dt}\int_a^t \phi(x)dx = \phi(t)$ in iz tega dobimo, kar smo hoteli dokazat.

$$\Rightarrow G_u'\big(t,\alpha(t),\beta(t)\big) = \frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx = -f(\alpha(t),t),\ \ G_v'(t,\alpha(t),\beta(t)) = f(\beta(t),t)$$

Integrabilnost integrala s parametrom

Naj bo $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ **zvezna**. Tedaj je

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dt\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dx\right) dt$$

Dokaz

Definiramo:

$$G(y) = \int_a^b \int_c^y f(s,t)dt\ \ ds\,;\quad H(y) = \int_c^y \int_a^b f(s,t)ds\ \ dt\,;\ \ \phi(t) = \int_a^b f(s,t)\ ds$$

Hočemo, da $G = H$, ampak ker $G(c) = H(c) = 0$, je dovolj videti, da je $G' = H'$

$$H' = \phi(s) = \int_a^b f(s,t)\ ds$$

$$G' = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} \int_c^y f(s,t)dt\ ds = \int_a^b f(s,t)\ ds$$

Razširitev na posplošeni integral

Konvergenca in enakomerna konvergenca

Naj bo $f: [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ **zvezna**. Integrali $\int_a^\infty f(x,t)dx$ so **enakomerno konvergentni** na $[c,d]$, ce za $\forall \epsilon > 0\ \exists m_0 \geq a$:

$$\left|\int_m^\infty f(x,t)dx\right| < \epsilon\ \forall t \in [c,d], \forall m \geq m_0$$

Torej, da je od neke meje naprej, ostanek dovolj majhen.

Enakomerna integrabilna majoranta (Weierstrass)

Naj bo $f: [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ **zvezna**. Privzemimo, da obstaja **integrabilna funkcija** $\Phi: [a,\infty) \to [0,\infty)$: $\forall x > a, t \in [c,d]$ velja: $|f(x,t)| \leq \Phi(x)$. Tedaj integral s parametrom **konvergira enakomerno** na $[c,d]$

Dokaz

$$\left|\int_m^\infty f(x,t)dx\right| \leq \int_m^\infty |f(x,t)|\ dx \leq \int_m^\infty \phi(x)\ dx < \epsilon$$

za vsak $\forall m \geq m_0$, ce je m_0 dovolj velik.

Zveznost

Če je $f: [a,\infty) \times [c,d] \to \mathbb{R}$ **zvezna** in $F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$ **konvergira enakomerno** na $[c,d]$, je $F(t)$ tudi **zvezna** na $[c,d]$

Dokaz

Za $t, t_0 \in [c,d]$ ocenimo:

$$|F(t) - F(t_0)| = \left|\int_a^\infty [f(x,t) - f(x,t_0)]\ dx\ \right|$$

$$\left|\int_a^m [f(x,t) - f(x,t_0)]dx + \int_m^\infty f(x,t)dx - \int_m^\infty f(x,t_0)dx\right|$$
$$\leq \int_a^m |f(x,t) - f(x,t_0)|dx\ + \left|\int_m^\infty f(x,t)dx\right| + \left|\int_m^\infty f(x,t_0)dx\right|$$

Vezimo $\epsilon > 0$. Ker je $F(t)$ enakomerno konvergentna $\exists m_0 \geq a$: $\left|\int_m^\infty f(x,u)dx\right| < \frac{\epsilon}{3}$

Za tak ma sta zadnja dva integrala (torej ostanka) pod ϵ.
Za izbrani $m \geq m_0$ je funkcija $f: [a, m] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ enakomerno zvezna (ker je zvezna na kompaktni množici). To pomeni, da $\exists \delta > 0: |t - t_0| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x, t) - f(x, t_0)| < \frac{\epsilon}{3(b - a)}$$

Iz tega sledi da je tudi prvi integral pod ϵ in smo dokazali: $|F(t) - F(t_0)| < \epsilon$

Integrabilnost

Naj bo f **zvezna** na $[a, \infty) \times [c, d]$ in $F(t) = \int_a^\infty f(x, t) dx$ **enakomerno konvergentna** na $[c, d]$. Tedaj je F **integrabilna** na $[c, d]$ in velja:

$$\int_c^d \left(\int_a^\infty f(x, t) dx \right) dt = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx$$

Dokaz

Vemo da je F zvezna, zato obstaja $\int_c^d F$. Za $\forall b > a$ je:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, t)\, dx\ \ dt \quad (*); \quad F_b(t) = \int_a^b f(x, t)\, dx$$

Pošljemo $b \to \infty$
Velja $F_b(t) \to F(t)$ (enakomerno konvergira na $[c, d]$)
Torej ima leva stran $(*)$ limoto za $b \to \infty$ in sicer $\int_c^d \int_a^\infty f(x, t)$. Torej jo ima tudi desna stran in je po definiciji izlimitiranega integrala enaka:

$$\int_a^\infty \int_c^d f(x, t)\, dt\, dx$$

Odvedljivost

Privzemimo, da je $f: [a, \infty) \times [c, d] \to \mathbb{R}$ **zvezna**, da $\exists \frac{\partial f}{\partial t}$ in je **zvezen**. Da sta $\forall t \in [c, d]$ definirani funkciji $F(t) = \int_a^\infty f(x, t) dx$ in $G(t) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$, ki **enakomerno konvergira** na $[c, d]$. Tedaj je F **odvedljiva** na $[c, d]$ in $F' = G$ oz.

$$\frac{d}{dt} \int_a^\infty f(x, t)\, dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Dokaz

Vemo, da je G zvezna na $[c, d]$ zato je integrabilna. Definiramo $H: [c, d] \to \mathbb{R}$ s predpisom:

$$H(u) = \int_c^u G(t)\, dt$$

Po osnovnem izreku analize je H odvedljiva in $H' = G$. Torej zadošča videti, da je $H \equiv F + \alpha$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Velja:

$$H(u) = \int_c^u G(t) dt = \int_c^u \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx\, dt = \int_a^\infty \int_c^u \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt\, dx = \int_a^\infty f(x, u) dx - \int_a^\infty f(x, c) dx$$

$$\Rightarrow H(u) = F(u) - F(c) = F(u) + konst.$$

Eulerjevi funkciji Γ in B

Gama funkcija

$\forall t > 0$ definiramo $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$

Integral je **enakomerno konvergenten** na $(0,\infty)$:

$$\int_M^\infty x^{t-1}e^{-x}dx \leq \int_M^\infty x^{|t-1|}e^{-x}\,dx \leq \int_M^\infty x^{\gamma}e^{-x}dx < \epsilon; \quad x \geq M > 1;\ \gamma = \max(t-1), t \in [c,d]$$

Za velike M. Iz tega sledi tudi, da je $\Gamma(t)$ **zvezna**.

Velja $\Gamma \in C^\infty(0,\infty)$. To lahko sklepamo induktivno iz dejstva, da je njen odvod po parametru spet enakomerno konvergenten.

Velja $\boldsymbol{\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)\ \forall t > 0}$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x}dx = -x^t e^{-x}\,\Big|_0^\infty + t\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx = 0 + t\Gamma(t)$$

Velja $\boldsymbol{\Gamma(n+1) = n!}$ Za $n \in \mathbb{N}$

Beta funkcija

Za $p, q > 0$ definiramo $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$. Vidimo, da velja $\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$.

$$\forall \alpha,\beta > 0\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1}x\cos^{\beta-1}x\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)\quad z\ vpeljavo\ x = \sin^2 t$$

$$p,q > 0\ \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \mathrm{B}(p,q)\ \ z\ vpeljavo\ x = \frac{u}{1+u}$$

Povezava

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};\ \ p,q > 0$$

$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty x^{p+q-1}e^{-x}dx$ Za poljuben $u > 0$ vpeljemo novo spremenljivko s predpisom $x = (1+u)y$. Dobimo:

$$\Gamma(p+q) = \int_0^\infty (1+u)^{p+q-1}y^{p+q-1}e^{-(1+u)y}(1+u)dy\quad \Big|\cdot\frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}$$

$$\Gamma(p+q)\cdot\frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}} = u^{p-1}\int_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(1+u)y}dy\quad \Big|\int_0^\infty du$$

$$\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q) = \int_0^\infty u^{p-1}\int_0^\infty y^{p+q-1}e^{-(1+u)y}dy\,du$$

Fubini-Tonelli:

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{p-1}y^{p-1}y^q e^{-y}e^{-uy}\,du\,dy\quad |\,nova\ spr\ uy$$

$$= \int_0^\infty y^{q-1}e^{-y}\,\Gamma(p)dy = \Gamma(p)\Gamma(q)$$

Velja $\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x \cos^0 x \ dx = \pi \quad \Rightarrow \pi = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)} \ \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Fubini-Tonellijev izrek

Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ in f **zvezna** funkcija. Ce je bodisi $f(x,t) \geq 0$ bodisi $\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,t)| dt\right) dx < \infty$. Tedaj integrala:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,t) dt\, dx \ \ in \ \int_c^d \int_a^b f(x,t) dx\, dt$$

obstajata in **sta enaka**.

Stirlingov izrek

$$\lim_{x\to\infty} \Gamma(x) \cdot \sqrt{x} \left(\frac{e}{x}\right)^x = \sqrt{2\pi}$$