Krivulje v prostoru

Pot in krivulja

<u>Pot</u> v $\mathbb{R}^3$ je zvezna preslikava $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^3$, kjer je $I \subset \mathbb{R}$ (nek interval, npr. čas)
Torej:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big);\;\; t \in I$$

Sliko poti, torej $\vec{r}(I) \subset \mathbb{R}^3$, imenujemo **<u>tir</u>**.
Pot je **gladka**, če je $\vec{r} \in C^1(I)$.

<u>Gladka krivulja</u> v $\mathbb{R}^3$ je gladka pot $\vec{r} = (x, y, z): I \to \mathbb{R}^3$, za katero velja $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$
Včasih pod pojmom »gladka krivulja« pojmujemo $\Gamma = \vec{r}(I)$ medtem ko $\vec{r}$ rečemo **regularna parametrizacija** ($\vec{r} \in C^1(I). \dot{\vec{r}} \neq 0$ povsod). Vseh regularnih parametrizacij je neskončno mnogo. Med različnimi parametrizacijami bijektivno slikamo.

Ce sta $\vec{r}: I \to \Gamma$ in $\vec{\rho}: J \to \Gamma$ bijektivni, obstaja $h = \vec{\rho}^{-1} \circ \vec{r}: I \to J$ in ta preslikava je spet bijektivna, torej velja tudi $\vec{r} = \vec{\rho} \circ h$
Obrat: Vsaka bijekcija $\tilde{h}: J \to I$ razreda C^1 z $\dot{\tilde{h}} \neq 0$ povsod, nam iz $\vec{r}$ porodi novo regularno parametrizacijo $\vec{\rho} = \vec{r} \circ \tilde{h}$

Dolžina krivulje

Ce je $\vec{r}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ **gladka krivulja**, katere tir označimo z Γ. Tedaj **<u>dolžino</u>** Γ definiramo kot:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt$$

Ta definicija je »dobra« v smislu, da ni odvisna od izbire parametrizacije.

Izpeljava

Razdaljo med dvema točkama na krivulji, ki sta si dovolj blizu (npr. $\vec{r}\big(t_{j-1}\big),\; \vec{r}(t_j)$) lahko aproksimiramo z ravno daljico med njima:

$$\left|\vec{r}\big(t_j\big) - \vec{r}\big(t_{j-1}\big)\right|$$

kar je pa po Lagrangeevem izreku približno enako:

$$\left|\dot{\vec{r}}\big(t_j\big)\right|\left|t_j - t_{j-1}\right|$$

Vse daljice lahko seštejemo skupaj:

$$\sum_i \left|\dot{\vec{r}}(t_j)\right|\left|t_j - t_{j-1}\right|$$

kar pa je Riemannova vsota za $\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|: [a, b] \to [0, \infty)$, prirejena po delitvi $\{t_1, \dots, t_n\}$

Dokaz neodvisnosti od parametrizacije

Naj bo $\vec{\rho}: J \to \Gamma$ neka druga regularna parametrizacija za Γ. Vemo, da lahko pisemo $\vec{\rho} = \vec{r} \circ h$ za neko C^1 preslikavo h med njima. Torej:

$$\int_\alpha^\beta \left|\dot{\vec{\rho}}(\tau)\right| d\tau = \int_\alpha^\beta \left|\dot{\vec{r}}\big(h(\tau)\big)\right|\left|\dot{h}(\tau)\right| d\tau = \Big|_{h(\tau)=t} = \int_a^b \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt$$

Naravni parameter

»Risanje krivulje s hitrostjo konstante velikosti 1«

Za poljubno gladko krivuljo (z ali brez samopresečišč) definiramo **naravni parameter** s predpisom:

$$S(t) = \int_a^t \left|\dot{\vec{r}}(\tau)\right| d\tau \quad ; \qquad \forall t \in [a, b]$$

Hkrati pa $s = S(t) \in [0, l(\gamma)]$. Tedaj za $\vec{\rho}(s) = \vec{r}(S^{-1}(s))$ velja $\left|\dot{\vec{\rho}}\right| \equiv 1$.

Tangentni vektor

Vektorju $\frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|}$ pravimo **enotski tangentni** vektor na Γ v točki $\vec{r}(t)$. V naravni parametriziaciji je enak vektorju $\vec{\rho}'(s)$, kjer je s določen z enačbo $\vec{r}(t) = \vec{\rho}(s)$

Tangenta

Tangenta na Γ v tocki $\vec{r}(t)$ je premica v $\mathbb{R}^3$, ki poteka skozi $\vec{r}(t)$ on je vzporedna $\dot{\vec{r}}(t)$:

$$(x, y, z) = \vec{r}(t) + \lambda \dot{\vec{r}}(t); \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Normalna ravnina

Normalna ravnina na krivuljo Γ v točki $\vec{r}(t)$ je ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki vsebuje $\vec{r}(t)$ in je pravokotna na $\dot{\vec{r}}(t)$ oz. na tangento na Γ v tocki $\vec{r}(t)$:

$$\left\langle (x, y, z) - \vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 0$$

Nekolinearnost točk na krivulji

Naj bo γ regularna C^2 parametrizacija neke krivulje v $\mathbb{R}^3$. Za dano točko $t_0 \in \mathbb{R}$ privzemimo, da je:

$$v_0 = (\gamma' \times \gamma'')(t_0) \neq 0$$

Tedaj $\exists \delta > 0$ taksna, da $t_1, t_2 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tako, da so t_0, t_1, t_2 med seboj različne, so točke $\gamma(t_1), \gamma(t_2), \gamma(t_3)$ **nekolinearne**.

Dokaz (s protislovjem)

Denimo, da $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)$ **niso** nekolinearne. Torej lezijo na premici $l = l(t_1, t_2)$. Recimo $t_0 < t_1 < t_2$. Ker $\gamma(t_j) - \gamma(t_0)$ lezi na premici l, je:

$$\langle \gamma(t_1) - \gamma(t_0), w \rangle = \langle \gamma(t_2) - \gamma(t_0), w \rangle = 0$$

Kjer je w iz ortogonalnega komplimenta $w \in l^{\perp} \backslash \{0\}$ ($l^{\perp}$ je ravnina).

Ce definiramo:

$$f(t) = \langle \gamma(t) - \gamma(t_0), w \rangle$$

je $f(t_0) = f(t_1) = f(t_2) = 0$

Sedaj lahko uporabimo Rolleov izrek, ki pove, da $\exists \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}: t_0 < \xi_1 < t_1 < \xi_2 < t_2$ in $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ oz.:

$$\langle \gamma'(\xi_1), w \rangle = \langle \gamma'(\xi_2), w \rangle = 0$$

In spet po Rolleovem izreku sledi:

$$\langle \gamma''(\xi_3), w \rangle = 0$$

Ideja zaključka: Ker sta t_1, t_2 blizu t_0, sta tudi $\gamma'(\xi_j)$ blizu $\gamma'(t_0)$ in $\gamma''(\xi_j)$ blizu $\gamma''(t_0)$

$\Rightarrow$ w skoraj pravokoten na $\gamma'(t_0), \quad \gamma''(t_0)$

$\Rightarrow$ w skoraj vzporeden z $\gamma'(t_0) \times \gamma''(t_0)$

Cela ravnina (kar w je) pa ne more biti v tako ozkem stozcu. Sledi protislovje.

Pritisnjena ravnina

To je ravnina v $\mathbb{R}^3$, ki se v dani točki krivulje »najbolje prilega«.

Ravnini skozi $T_0 = \gamma(t_0)$ in z normalno $v_0 = \dot{\gamma}(t_0) \times \ddot{\gamma}(t_0)$ pravimo **<u>pritisnjena ravnina</u>** za krivuljo γ v tocki T_0.
Pritisnjena ravnina v t_0 je kot »limita« ravnin $\Pi(t_1, t_2)$. S tem je mišljeno da enotske normalne $n(t_1, t_2) = \frac{[\gamma(t_1)-\gamma(t_0)]\times[\gamma(t_2)-\gamma(t_0)]}{|[\gamma(t_1)-\gamma(t_0)]\times[\gamma(t_2)-\gamma(t_0)]|}$ na $\Pi(t_1, t_2)$ konvergirajo proti v_0.
Enačba pritisnjene ravnine na krivuljo v točki $\gamma(t_0)$ je podana z mesanim produktom

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \qquad \left((x, y, z) - \vec{\gamma}(t_0), \dot{\vec{\gamma}}(t_0), \ddot{\vec{\gamma}}(t_0)\right) = 0$$

Pritisnjena ravnina je enolično definirana če je $v_0 \neq 0$. Za to **ni** dovolj, da krivulja **ni** premica. Tudi pri drugih krivuljah se lahko zgodi. (Npr. $\gamma(t) = (t^3, t^4, t^5)$)

Ce je $\Pi = \Pi(t_0)$ pritisnjena ravnina za γ v točki $\gamma(t_0)$, tedaj velja:

$$d(\gamma(t_0 + h), \Pi) = o(h^2); \quad h \to 0$$

$$F(h) = o(h^2) \Leftrightarrow \lim_{h \to a} \frac{F(h)}{h^2}$$

S tem je mišljeno, da funkcija pada hitrejše kot kvadratno oz., da je stik med $\gamma(t_0)$ in $\Pi(t_0)$ drugega reda: Tocke blizu pritisnjene ravnine so “kvadratično” blizu.

Spremljajoči (Frenet-Serretov) trieder

Če je $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \neq 0$, vektorju $\frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}$ pravimo **<u>vektor binormale</u>** $(\vec{B})$. Če je $\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$ **<u>enotski tangentni vektor</u>** pravimo vektorju $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$ **<u>vektor glavne normale</u>**. Ravnini, ki je pravokotna nanj pravimo **<u>rektifikacijska ravnina (binormalna ravnina)</u>**. Trojici $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ pravimo **spremljajoči (Frenet –Serretov) trieder.**

$$\vec{T} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \qquad \vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} \qquad \vec{N} = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{|(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}|}$$

Vsi trije vektorji so enotski in med sabo pravokotni.

Pospešek v naravni parametrizaciji (prva Frenetova formula)

Naj bo $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ regularna C^2 parametrizacija za krivuljo Γ in $s = f(t) = \int_\alpha^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau$ pridruženi naravni parameter. Z $\vec{R}(s) = \vec{r}\left(f^{-1}(s)\right)$ (1) označimo novo parametrizacijo za Γ. Takrat velja:

i) Če je $F(s) = G(t)$ $\left(= G\left(f^{-1}(s)\right)\right)$ potem je: $F'(s) = \frac{G'(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$
ii) $\vec{R}'(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{|\dot{\vec{r}}(t)|}$
iii) $\vec{R}'' \perp \vec{R}'$ oz. se vec:

$$\boldsymbol{R}''(\boldsymbol{s}) = \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|^4} = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} \cdot \frac{(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}}{|(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) \times \dot{\vec{r}}|} = \boldsymbol{\kappa}\vec{\boldsymbol{N}}$$

Torej: Pospešek v naravni parametrizaciji kaze v smeri glavne normale, velikost pa je κ.

Dokaz

i) Iz $G(t) = F\big(f(t)\big)$ sledi $G'(t) = F'\big(f(t)\big) \cdot f'(t) = F'(s) \cdot \left|\dot{\vec{r}}(t)\right|$

ii) Točko i) uporabimo na (1)

iii) Velja:

$$R''(s) = \frac{d}{ds}\vec{R}'(s) = \frac{d}{ds}\left[\frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|}\right] = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|}\right)(t)}{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|} = \frac{\frac{\ddot{\vec{r}}\left|\dot{\vec{r}}\right| - \dot{\vec{r}}\left|\dot{\vec{r}}\right|'}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^2}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|}$$

Ker za vektor $v = \dot{\vec{r}}$ velja $\left|\dot{\vec{r}}\right| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle}$ je

$$\left|\dot{\vec{r}}\right|' = \frac{1}{2}\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\langle \dot{\vec{v}}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \dot{\vec{v}}\rangle\right) = \frac{\langle \dot{\vec{v}}, \vec{v}\rangle}{|\vec{v}|} = \frac{\langle \ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}\rangle}{\left|\dot{\vec{r}}\right|}$$

Sledi:

$$\vec{R}'' = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|\ddot{\vec{r}} - \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}\rangle}{\left|\dot{\vec{r}}\right|}\dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3} = \frac{\left|\dot{\vec{r}}\right|^2\ddot{\vec{r}} - \langle \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}\rangle\dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^4} = \frac{\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right) \times \dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^4}$$

Ker je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ je $\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{a}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right||\vec{a}| \sin\frac{\pi}{2}$. Torej:

$$R''(s) = \frac{\left|\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right) \times \dot{\vec{r}}\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^4} \cdot \frac{\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right) \times \dot{\vec{r}}}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^4} = \kappa\vec{N}$$

Fleksijska ukrivljenost

Količini κ pravimo **fleksijska ukrivljenost** krivulje Γ v točki $\vec{r}$.

$$\kappa = \frac{\left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right|}{\left|\dot{\vec{r}}\right|^3}$$

Pritisnjena krožnica

Naj bodo $\gamma, t_0, v_0, \delta, t_0, t_1, t_2$ definirani kot pri izreku o nekolinearnosti točk na krivulji. Tedaj:

- $\exists!$ Krožnica $K(t_0, t_1, t_2) \subset \mathbb{R}^3$, ki vsebuje $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2)$
- Ce označimo s $S(t_0, t_1, t_2)$ središče te krožnice, tedaj $\exists\ S(t_0) = \lim_{t_1, t_2 \to t_0} S(t_0, t_1, t_2)$
- Točka $S(t_0) \in \mathbb{R}^3$ lezi v pritisnjeni ravnini za Γ v točki $\gamma(t_0)$ in sicer na oddaljenosti (radij pritisnjene krožnice) $\rho = \frac{1}{\kappa}$ od točke $\gamma(t_0)$

Taksni krožnici pravimo **pritisnjena krožnica** za Γ v točki $\gamma(t_0)$.

Dokaz

Skozi tri nekolinearne točke obstaja krožnica. Definiramo $g: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to [0, \infty)$ s predpisom:

$$g(t) = |\gamma(t) - S(t_0, t_1, t_2)|^2; \qquad g(t_0) = g(t_1) = g(t_2) = R^2$$

Po Rolleovem izreku:

$$\exists \xi_1, \xi_2 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta): g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$$
$$\exists \xi_3: g''(\xi_3) = 0$$

V limiti dobimo, kjer je $S = \lim_{t_1,t_2\to t_0} S(t_0,t_1,t_2)$:

$$\langle \gamma'(t_0), \gamma(t_0) - S\rangle = 0$$
$$\langle \gamma''(t_0), \gamma(t_0) - S\rangle = -|\gamma'(t_0)|^2$$

Točka S bo, ce obstaja, lezala v pritisnjeni ravnini, ki ima normalo $\gamma'(t_0)\times\gamma''(t_0)$, velja se tretja enačba:

$$\langle(\gamma'\times\gamma'')(t_0), \gamma(t_0) - S\rangle = 0$$

Ta sistem enačb ima enolično rešitev:

$$S(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\cdot\frac{(\gamma'\times\gamma'')\times\gamma'}{|(\gamma'\times\gamma'')\times\gamma'|}(t_0) = \gamma + \frac{\vec{N}}{\kappa}$$

Sledi, da je polmer pritisnjenega kroga $1/\kappa$

Druga Frenetova formula (in por do torzijske ukrivljenosti)

Vemo, da $\vec{B} = \vec{T}\times\vec{N} \Rightarrow \vec{B}' = \vec{T}'\times\vec{N} + \vec{T}\times\vec{N}'$. Vemo da je $\vec{T}'\times\vec{N} = 0$ saj je $\vec{T}' = \kappa\vec{N}$

$$\Rightarrow \vec{B}' \perp \vec{T}$$

Ker je $|\vec{B}| = 1$, je $0 = \left(|\vec{B}|^2\right)^2 = \left(\langle\vec{B},\vec{B}\rangle\right)' = 2\langle\vec{B}',\vec{B}\rangle$

$$\Rightarrow \vec{B}' \perp \vec{B}$$

Ker trojica $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ tvori kompleten ortonormiran sistem v $\mathbb{R}^3$ sledi

$$\Rightarrow \vec{B}' \parallel \vec{N}$$

Zato lahko pišemo: $\boldsymbol{\vec{B}' = -\tau\vec{N}}$

Torzijska ukrivljenost

Količini τ pravimo **torzijska ukrivljenost** krivulje Γ v točki $\vec{r}$.

$$\tau = \frac{\dot{\vec{r}}\cdot(\ddot{\vec{r}}\times\dddot{\vec{r}})}{\left|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right|^2}$$

Torej je τ merilo (lokalne) »tridimenzionalnosti« krivulje.
Velja: $\kappa = 0 \Leftrightarrow$ krivulja je premica
Regularna C^2 krivulja je **ravninska** $\Leftrightarrow \tau = 0$

Dokaz (da je krivulja ravninska $\Leftrightarrow \tau = 0$)

($\Rightarrow$)
Privzemimo, da je Γ krivulja v $\mathbb{R}^2\times\{0\}$. Torej je dana z: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = (\dot{x},\dot{y},0) \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x},\ddot{y},0) \qquad \dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}} = (0,0,\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})$$

Torej lahko izračunamo:

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = \frac{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}{|\dot{x}^2+\dot{y}^2|^{\frac{3}{2}}} \qquad \vec{B} = \frac{\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}|} = \left(0,0,\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}|}\right) \qquad \vec{N} = \frac{(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}}{|(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}|}$$

Tu je $(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}} = (\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})(-\dot{y},\dot{x},0)$. Hkrati pa je $\vec{B} = (0,0,*)$, zato je $\vec{B}' = \tau\vec{N}$ mogoč le takrat, ko je $\tau = 0$.

(⇐)
Ce je $\tau \equiv 0$, je $\vec{B}' \equiv 0$, zato je $\vec{B} = konst.$ in je pritisnjena ravnina ista v vseh točkah, kar pomeni da je krivulja ravninska.

Spremljajoči trieder v naravni parametrizaciji

Naj bo Γ regularna C^2 krivulja v $\mathbb{R}^3$. V **naravni parametrizaciji $\vec{\boldsymbol{\rho}}$** je:

$$\vec{T} = \vec{\rho}' \qquad \vec{N} = \frac{\vec{\rho}''}{|\vec{\rho}''|} \qquad \vec{B} = \frac{\vec{\rho}' \times \vec{\rho}''}{|\vec{\rho}''|}$$

Frenet-Serretove formule

Samo v naravni parametrizaciji:

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \vec{T}' = \kappa\vec{N} \quad \vec{N}' = -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \quad \vec{B}' = -\tau\vec{N}$$

Orientacija

<u>Lokalna orientacija</u> (gladke, regularne) krivulje Γ brez samopresecisc v tocki $\gamma \in \Gamma$ je podana z izbiro enotskega tangentnega vektorja v točki γ

<u>Globalna orientacija</u> je podana z zvezno izbiro enotskih tangentnih vektorjev po vseh $\gamma \in \Gamma$ (torej z zvezno izbiro lokalne orientacije)

Vsaka (gladka, regularna, povezana) krivulja Γ brez samopresečišč ima globalno orientacijo oz. obstajata **točno dve** orientaciji.

Orientacija **odsekoma gladke** nesklenjene krivulje $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m$ je določena tako, da je končna točka na Γ_j enaka začetni točki na Γ_{j+1}