Krivuljni integral

Krivuljni integral skalarnega polja

Naj bo $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija neke krivulje Γ in $u: \Gamma \to \mathbb{R}$ **zvezna funkcija**.
Integral skalarnega polja u po Γ definiramo kot:

$$\int_\Gamma u ds = \int_I u(\vec{r}(t))|\dot{\vec{r}}(t)|dt$$

Ta definicija je dobra v smislu, da je neodvisna od parametrizacije $\vec{r}$.

Dokaz

Naj bo $\vec{R}: J \to \mathbb{R}^3$ neka druga parametrizacija in $\phi: J \to I$ preslikava med domenama. Torej velja:

$$\phi = \vec{r}^{-1} \circ \vec{R} \quad oz. \quad \vec{R} = \vec{r} \circ \phi$$

Dobimo:

$$\int_\alpha^\beta u\left(\vec{R}(s)\right)\left|\dot{\vec{R}}(s)\right| ds = \int_\alpha^\beta u\left(\vec{r}(\phi(s))\right)\left|\dot{\vec{r}}(\phi(s))\right| \cdot |\dot{\phi}(s)| ds$$

Z uvedbo $\phi(s) = w, \ \ dw = \dot{\phi}(s)ds$. Dobimo dve moznosti odvisno ali je $\dot{\phi} > 0$ povsod ali $\dot{\phi} < 0$, zaradi regularne parametrizacije pa nikoli ni 0:

$$= \int_a^b u(\vec{r}(w))|\dot{\vec{r}}(w)|dw \qquad ali \qquad \int_a^b u(\vec{r}(w))|\dot{\vec{r}}(w)|(-dw)$$

Krivuljni integral vektorskega polja

Naj bo $\vec{F}: \Gamma \to \mathbb{R}^3$ **zvezna**. **Integral vektorskega polja $\vec{F}$** po Γ definiramo kot:

$$\int_\Gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_\Gamma \langle \vec{F}(\vec{r}(t)), \dot{\vec{r}}(t) \rangle_{\mathbb{R}^3} dt$$

Ce je $F = (X, Y, Z)$ in $\vec{r} = (x, y, z)$, tedaj je: $\langle \vec{F}, \dot{\vec{r}} \rangle = X \cdot \dot{x} + Y \cdot \dot{y} + Z \cdot \dot{z}$
Zato lahko pisemo $\langle \vec{F}, \dot{\vec{r}} \rangle dt = Xdx + Ydy + Zdz$ oz.

$$\int_\Gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_\Gamma (Xdx + Ydy + Zdz)$$

Ce v definiciji $\int_\Gamma \langle \vec{F}(\vec{r}), \dot{\vec{r}} \rangle$ nadomestimo $\vec{r}$ z drugo parametrizacijo $\vec{R}$ iste krivulje je nov izraz enak staremu, če $\vec{R}$ ohrani orientacijo Γ oz. nasprotno enak, če jo spremeni.

Potencialno polje

Polje $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ je **potencialno**, če $\exists$ funkcija $u: \Omega \to \mathbb{R}$, za katero je $\vec{F} = \nabla u = grad\, u$. Funkciji u pravimo **potencial** polja $\vec{F}$. Torej za funkcijo $\vec{F} = (X, Y, Z)$ velja:

$$u_x = X \quad u_y = Y \quad u_z = Z$$

Naj bo Γ regularna krivulja med tockama $A, B \in \mathbb{R}^3$ in $\vec{F} = grad\, u$ **potencialno** vektorsko polje. Tedaj je:

$$\int_\Gamma \vec{F} d\vec{r} = u(B) - u(A)$$

Torej: *Integral po potencialnem je neodvisen od poti le od začetka in konca.*

Dokaz

Imamo $\vec{r}: [\alpha, \beta] \to \Gamma, \vec{r}(\alpha) = A,\ \vec{r}(\beta) = B$

$$\int_\Gamma \nabla u d\vec{r} = \int_\Gamma \langle \nabla u \circ \vec{r}, \dot{\vec{r}} \rangle = \int_\alpha^\beta \langle (\nabla u)\big(\vec{r}(t)\big), \dot{\vec{r}} \rangle dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}(u \circ \vec{r})(t)\, dt = (u \circ \vec{r})(\beta) - (u \circ \vec{r})(\alpha)$$
$$= u(B) - u(A)$$

Naj bo $\Omega \in \mathbb{R}^3$ povezana odprta množica in $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ **zvezno vektorsko polje**. Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. Polje $\vec{F}$ je potencialno
2. Integral $\vec{F}$ po vsaki sklenjeni krivulji je enak 0
3. Za poljubni točki $A, B \in \Omega$ je integral $\vec{F}$ od A do B neodvisen od izbire poti med dvema točkama.

Dokaz

$1) \Rightarrow 2)$

$$\oint_\Gamma \vec{F} d\vec{r} = u(A) - u(A) = 0$$

$2) \Rightarrow 3)$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2) \ \Rightarrow \int_\Gamma \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Hkrati pa je:

$$\int_\Gamma \vec{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{-\Gamma_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} d\vec{r} = 0$$

$3) \Rightarrow 1)$

Fiksiramo $A \in \Omega$. Ce naj velja 1. je po trditvi $\vec{F} = \nabla u \Rightarrow \vec{F} = \nabla(u + c)$:

$$u(B) = u(A) + \int_\Gamma \vec{F} d\vec{r}$$

Za A, B, Γ kot zgoraj. To motivira naslednjo definicijo u:
Za poljuben $T \in \Omega$ definiramo:

$$u(T) = \int_\Gamma \vec{F} d\vec{r}$$

kjer je Γ neka pot od A do T. Moramo videti $\nabla u = \vec{F}$

Pišimo $F = (F_1, F_2, F_3)$. Dovolj je videti $u_x = F_1$. Pogoj pomeni:

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x + h, y, z) - u(x, y, z)}{h} = F_1(x, y, z) \qquad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

Vzamemo $T = (x, y, z) \in \Omega$ in $h \in \mathbb{R}$ majhen. Tedaj za $e_1 = (1,0,0)$ velja:

$$u(T + he_1) - u(T) = \left(\int_{\Gamma_{T + he_1}} \vec{F} d\vec{r} - \int_{\Gamma_T} \vec{F} d\vec{r} \right) = \int_I \vec{F} d\vec{r}$$

Sledi:

$$\frac{u(T+he_1)-u(T)}{h}=\frac{1}{h}\int_0^h\langle\vec{F}(x+t,y,z),(1,0,0)\rangle dt=\frac{1}{h}\int_0^h F_1(x+t,y,z)\,dt$$

To je pa ravno povprečna vrednost:

$$\langle F_1(x+\cdot,y,z)\rangle_{[0,h]}\to F_1(x,y,z)$$

Zaradi zveznosti F_1.
Razlaga zadnjega koraka:

$$\langle\phi\rangle_{[0,h]}-\phi(0)=\frac{1}{h}\int_0^h\phi(t)dt-\phi(0)=\int_0^h\frac{\phi(t)-\phi(0)}{h}dt$$

Uvedemo novo spremenljivko $s=\frac{t}{h}$

$$=\int_0^1[\phi(hs)-\phi(0)]ds\ \le\ \max_{\tau\in[0,h]}|\phi(\tau)-\phi(0)|\xrightarrow{h\to 0}0$$