Navadne diferencialne enačbe

Diferencialne enačbe so naloge, v katerih nastopajo odvodi iskane funkcije. Ce je $F = F(u, v_0, v_1, \dots, v_n)$ dana funkcija $n + 2$ realnih spremenljivk in je odvisna od v_n, tedaj je

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

diferencialna enačba reda n. Iščemo funkcijo $y = y(x)$, za katero je $F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \;\; \forall x$ na nekem intervalu.

Cauchyjeva naloga (ang. Initial Value Problem)

Pogosto poleg same enačbe zahtevamo se začetne/robne pogoje: $y' = f(x, y) \;\; y(x_0) = y_0$
Pri enačbi n-tega reda, lahko postavimo do n začetnih pogojev.

Polje smeri

Obravnavajmo enačbo oblike $y' = f(x, y)$
Graf rešitve enačbe lahko zaslutimo, ne da bi enačbo predhodno rešili.
Denimo, da je $f: D \to \mathbb{R}$. V dovolj gosti mreži točk $(x, y) \in D$ narišemo smeri rešitve. To je vektor vzporeden $(1, y')$. Zaradi enačbe pa je $y'(x) = f(x, y)$, to pa je natanko doloceno s tocko (x, y). Torej iz tega vemo, da če naj gre rešitev za $y' = f(x, y)$ skozi točko $(x_0, y_0) \in D$, vemo v naprej (tudi če nič ne poznamo y), kaksen naklon mora imeti v tocki (x_0, y_0). Nameč, naklon grafa v točki je $y'(x_0)$.
To naredimo za vse tocke iz D in dobimo **polje smeri**.

Eulerjeva metoda za približno reševanje diferencialnih enačb

Imejmo Cauchyjevo nalogo $(*)$ $y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$
Torej iscemo $y: I \to \mathbb{R}$, kjer je I neki interval okoli x_0, za katerega velja $(*)$.
Privzemimo, da je f definirana na $J \times \mathbb{R}$. Izberimo $x \in J$. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ razdelimo interval $[x_0, x]$ na n enakih delov. To je mreza velikosti h.
Ce je h majhen (torej n velik), je na $[x_0, x_1]$ funkcija y, ki naj resi $(*)$ približno enaka svoji tangenti

$$Y - y_0 = y'(x_0)(X - x_0)$$

(kjer sta X, Y spremenljivki na tangenti). Toda ce naj y resi $(*)$, potem koeficient $y'(x_0)$ znamo izracunati. Dobimo $Y = y_0 + y'(x_0)(X - x_0)$

Preko tega lahko dobimo približek y_1 za $y(x_1)$ tako da le vstavimo x_1 v enacno tangente. Torej:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) \;\; oz. \;\; y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

S postopkom nadaljujemo in dobimo iterativni formuli za $j = 1, \dots, n$:

$$x_j = x_{j-1} + h \;\; oz. x_j = x_0 + jh; h = \frac{x - x_0}{n}$$
$$y_j = y_{j-1} + hf\left(x_{j-1}, y_{j-1}\right)$$

Posebni primeri NDE 1. reda

Enačba z ločljivimi spremenljivkami

$y' = \frac{P(x)}{Q(x)}$ kar lahko preoblikujemo v $Q(y)y' = P(x)$ kjer je $y' = \frac{dy}{dx}$. Ce vsako stran pomnožimo z ustreznim diferencialom dobimo:

$$\int Q(y)dy = \int P(x)dx$$

To po integriramo in izrazimo y

Linearna diferencialna enačba 1. reda

__**Linearna diferencialna enačba**__ 1. reda je enačba oblike:

$$y' + py = q$$

kjer sta p, q dani zvezni funkciji. y pa iščemo.

Rešitve so afini prostor (Prostor rešitev lahko zapišemo kot partikularna rešitev + homogena)

Rešitve za LDE so __**afin prostor**__. Ce je y_0 neka rešitev in je R prostor vseh resitev za LDE, tedaj je:

$$R - y_0 = \{y - y_0; y \in R\}$$

linearen vektorski prostor.

$$\Rightarrow R = y_0 + linearen. vekt. prostor.$$

Dokaz

Vpeljemo diferencialni operator $Ly = y' + py$. Rešujemo torej enačbo $Ly = q$. Vzamemo $y_1, y_2 \in (R - y_0)$ in trdimo da je $y_1 + y_2 \in R - y_0$, kar je ekvivalentno $y_0 + y_1 + y_2 \in R$. Velja:

$$L(y_0 + y_1 + y_2) = L\big((y_0 + y_1) + (y_0 + y_2) - y_0\big) = q$$

Zaradi linearnosti enačbe velja:

$$L(y_0 + y_1) + L(y_0 + y_2) - Ly_0 = q$$
$$q + q - q = q$$

Podobno velja tudi za $y \in R - y_0,\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha y \in R - y_0$

__$R - y_0$ so natanko rešitve $Ly = 0$__

Linearna struktura enačbe se zrcali v linearni strukturi rešitev.

Prostor R vseh resitev za LDE lahko zapisemo kot:

$$R = y_0 + \{h; Lh = 0\}$$

Torej kot vsoto **partikularne rešitve** in rešitve **pripadajoče homogene enačbe**.

Reševanje LDE $Ly = q$

1. Reševanje homogene enačbe $Ly = 0$, ki je enacba z locljivimi spremenljivkami
2. Variacija konstante, kjer konstantno partikularne rešitve zapišemo kot funkcijo in jo najdemo, tako da jo vstavimo v prvotno enačbo

Splošna rešitev LDE, kjer je x_0 poljubna tocka na intervalu, na katerem je p definiran, se glasi:

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int_{x_0}^{x} q(s)e^{P(s)}ds\, ; C \in R, P(x) = \int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi$$

Singularne točke

Točkam, skozi katere gre več rešitev enačbe $y' = f(x, y)$ pravim __**singularne**__. Ce je (x_0, y_0) singularna tocka in sta $y_1 = y_1(x)$ in $y_2 = y_2(x)$ dve resitvi enacbe $y' = f(x, y)$, ki greta skozi T. Tedaj imata v tej točki enaka tudi odvoda in ne le funkcijski vrednosti. (Torej so v vseh singularnih točkah vse tangente enake)

$$y_1'(x_0) = f\big(x, y_1(x_0)\big) = f\big(x, y_2(x_0)\big) = y_2'(x_0)$$

Splošna družina rešitev LDE $y = C\phi(x) + \psi(x)$ ima singularno točko, če obstaja $x_0 \colon \phi(x_0) = \phi'(x_0) = 0$

Za nelinearne diferencialne enačbe je v splošnem bistveno težje najti taksne točke.

Bernoullijeva dif. en.

To je enačba oblike:

$$y' + py = qy^\alpha$$

kjer sta p, q poljubni zvezni funkciji in $\alpha \in \mathbb{R}$. Za $\alpha = 0{,}1$ je to linearna diferencialna enacba, zato lahko privzamemo da $\alpha \neq 0{,}1$. Enačbo rešimo tako, da jo delimo z y^α in vpeljemo substitucijo $z = \; y^{1-\alpha}$. Tako dobimo linearno diferencialno enačbo za z, ki jo resimo in resitev za y dobimo kot $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Homogena nelinearna diferencialna enačba

Naj bo $F \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Tedaj pravimo, da je F **homogena reda $\boldsymbol{\alpha}$**, ce za vsak $\forall x, y \in \mathbb{R}$ in $t > 0$ velja:

$$F(tx, ty) = t^\alpha F(x, y)$$

Posledično je taksna funkcija določena s svojo skrčitvijo na enotsko sfero:

$$F(r\cos\phi\,, r\sin\phi) = r^\alpha F(\cos\phi\,, \sin\phi)$$

Homogena diferencialna enačbe (ne nujno linearna) je enačba oblike:

$$y' = f(x, y)$$

kjer je f **homogena reda 0**, to je:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right); \;\; x \neq 0$$

Vpeljemo $z = y/x$ in dobimo enacbo z ločljivimi spremenljivkami za z. Rešitev za y potem dobimo kot $y = xz$.

Riccartijeva enačbe

To je enačbe oblike:

$$y' = ay^2 + by + c$$

kjer so a, b, c zvezne funkcije na nekem intervalu in je $a \neq 0$. (Za $a = 0$ bi dobili linearno enacbo, podobno za $c = 0$ bi dobili Bernoullijevo)

Ce poznamo (npr. uganemo ali kako drugače dobimo) eno rešitev, recimo y_1, lahko tedaj splošno rešitev dobimo s substitucijo $y = z + y_1$.

$$\Rightarrow z' = az^2 + (2ab_1y + b)z$$

To pa je Bernoullijeva enačba za $\alpha = 2$. Bistveni korak je pridobiti tisto prvo rešitev.

Prvi integral

Prvi integral diferencialne enačba $F(x, y, y') = 0$ je taksna funkcija $u = u(x, y)$, da za vsako rešitev $y = y(x)$ enačbe $F(x, y, y') = 0$ velja:

$$\frac{d}{dx}u(x, y(x)\,) = 0$$

oz. $u\big(x, y(x)\big) \equiv C;\ \ C \in \mathbb{R}$. Torej to pomeni, da je graf $\big\{\big(x, y(x)\big); x \in I\big\}$ neke rešitve y vsebovan v nivojnici $\{u = C\} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2; u(\xi, \eta) = C\}$ funkcije u.
Enačba $u(x, y) = C$ je **<u>implicitni opis</u>** rešitve enačbe $F(x, y, y') = 0$.

Kako najti prvi integral enačbe $y' = f(x, y)$?
Enačbo želimo zapisati kot:

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

Kjer je polje (P, Q) **potencialno**, to je $(P, Q) = \nabla u$. Tak u bo potem prvi integral enačbe.

Eksaktna diferencialna enačba

Enačbi:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

za katero velja $P_y = Q_x$, pravimo **<u>eksaktna</u>**.
Ce je enačba eksaktna je (lokalno) njena rešitev dana z $u(x, y) = C$, kjer je u potencial polja (P, Q).

Neeksaktna diferencialna enačba

Želimo reševati tudi **<u>neeksaktne</u>** ($P_y \neq Q_x$) enačbe.
Naj bo $Pdx + Qdy = 0$ eksaktna. Ce enačbo pomnožimo z neko funkcijo $\mu = \mu(x, y) \neq 0$, se mnozica resitev **ne** spremeni:

$$P + Qy' = 0 \Leftrightarrow \mu(P + Qy') = 0; \quad \mu \neq 0$$

Toda nova enačba ni nujno več eksaktna. Nova enačba je eksaktna samo, če velja $\mu_y P = \mu_x Q$, kar v splošnem ne velja. Torej množenje eksaktne enačbe s funkcijo μ eksaktnost praviloma pokvari.

Ce obrnemo to logiko, lahko neeksaktno enačbo z množenjem s primernim μ prevedemo v eksaktno. Tej funkciji μ pravimo **<u>integrirajoči množitelj</u>**.

Kako najdemo integrirajoči množitelj?
Vidimo, da je μ integrirajoči množitelj če je:

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$$

$$\big(P_y - Q_x\big)\mu - Q\mu_x + P\mu_y = 0$$

To je **<u>parcialna diferencialna enačba</u>** za $\mu = \mu(x, y)$ in prevsega obseg Matematike III.
Lahko pa obravnavamo nekaj posebnih primerov:

- Denimo, da lahko najdemo μ, ki je odvisen le od x: $\mu(x, y) = \eta(x)$
  Tedaj se prejsnja parcialna diferencialna enacba glasi:
  $$\big(P_y - Q_x\big)\eta - Q\eta' = 0 \Rightarrow \frac{\eta'}{\eta}(x) = \frac{P_y - Q_x}{Q}$$
  Ce je desna stran res odvisna samo od x. Tedaj obstaja $\eta = \eta(x)$: $\mu(x, y) = \eta(x)$. To je kot nekakšen test. Direktno ga dobimo kot: $\eta = \int \exp \frac{P_y - Q_x}{Q} dx$
- Podobno lahko naredimo za $\eta = \eta(y)$: $\mu(x, y) = \eta(y)$. Ki obstaja če je $\frac{Q_x - P_y}{P}$ odvisen le od y.
  Direktno ga dobimo kot: $\eta = \int \exp \frac{Q_x - P_y}{P} dx$.
- Možni so primeri, kjer je μ efektivno funkcija ene spremenljivke. Npr. $\mu(x^2 + y^2)$ ali $\mu\left(\frac{x}{y}\right)$.

V splošnem vedno lahko poskušamo in ugibamo.

Implicitno podane enačbe

Namesto splošne enačbe $F(x, y, y') = 0$ obravnavamo dva posebna primera:

a) $F(x, y') = 0$
b) $F(y, y') = 0$

Rešitve iščemo v parametrični obliki. To pomeni, da želimo najti rešitev v obliki:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

Sočasno za nek $t \in I$. Nivojnico $\{F = 0\}$ parametriziramo z $\big(\psi(t), \theta(t)\big)$; $t \in J$

Velja $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \Rightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Utemeljitev

Pišimo $x = \alpha(t)$, $y = \beta(t)$. Ce je se $y = \gamma(x)$, tedaj:

$$\beta(t) = y = \gamma\big(\alpha(t)\big) = (\gamma \circ \alpha)(t)$$

$$\Rightarrow \beta'(t) = \gamma'\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)$$

Kar je ekvivalentno kot $\dot{y}(t) = y'(x) \cdot \dot{x}(t) \Rightarrow y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$

$F(x, y') = 0$

Zahtevamo, da (x, y') lezi na nivojnici $\{F = 0\}$. Sledi:

$$x = \psi(t) \quad y' = \theta(t)$$

Želimo imeti se $y = y(t)$, kar lahko dobimo iz prejšnje zveze in z integracijo:

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t)y'(x) = \dot{\psi}(t)\theta(t)$$

Torej: Ce je $t \mapsto \big(\psi(t), \theta(t)\big)$ parametrizacija krivulje $\{F = 0\}$, tedaj parametricno resitev enačbe $F(x, y') = 0$ dobimo z:

$$x = \psi(t) \quad y = \int (\dot{\psi}\theta)(t)dt$$

$F(y, y') = 0$

Tokrat (y, y') lezi na nivojnici $\{F = 0\}$. Zato postavimo in integriramo:

$$y = \psi(t)\ y' = \theta(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{\dot{y}(t)}{y'(t)} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\theta(t)}$$

Torej: Ce je $t \mapsto \big(\psi(t), \theta(t)\big)$ parametrizacija krivulje $\{F = 0\}$ tedaj parametrično rešitev enačbe $F(y, y') = 0$ dobimo z:

$$x = \int \left(\frac{\dot{\psi}}{\theta}\right)(t)dt \quad y = \psi(t)$$

Singularne rešitve

Imejmo enačbo $y' = f(x, y)$. Privzemimo, da je splošna rešitev podana z

$$y = \psi(x, c); \quad x \in J, C \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}$$

Singularna rešitev je, če obstaja, podana z zahtevo, da v vsaki točki **seka** kakšno izmed krivulj $y = \psi(x, c)$(in da je nanjo **tangentna.**)

Vse rešitve $y' = f(x,y)$, ki gredo skozi dano tocko, imajo v njej isti naklon. (1)
$y' = f(x,y) \;\; y(x_0) = y_0 \;\; z' = f(x,y) \;\; z(x_0) = y_0 \; \Rightarrow z'(x_0) = f\big(x, z(x_0)\big) = f\big(x_0, y(x_0)\big) = y'(x_0)$

Graf singularne rešitve je torej **ovojnica** grafov splošne rešitve. Tangentna je na vse grafe iz te družine.
Naj bo za $x_0 \in \gamma$ parameter $C(x_0)$ določen s to zahtevo, torej:

$$\phi(x_0) = \psi\big(x_0, C(x_0)\big)$$

kjer je $y = \phi(x)$ enačba singularne rešitve. To pomeni, da izmed vseh krivulj $x \mapsto \psi(x,c); c \in \mathcal{C}$, tisto, ki se v točki x_0 dotika singularne rešitve, dobimo z izborom $C = C(x_0)$.

Kako določimo $C(x_0)$ in s tem singularno rešitev $y = \phi(x)$?
Pišimo $\psi = \psi(u,v)$. Iz definicije za $C(x)$ dobimo:

$$\phi(x) = \psi\big(x, C(x)\big) \; \forall x \in J$$

Sledi po odvodu po x in evaluaciji v $x = x_0$:

$$\phi'(x_0) = \frac{\partial\psi}{\partial u}\big(x_0, C(x_0)\big) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\big(x_0, C(x_0)\big) \cdot C'(x_0); \quad \forall x \in J$$

Hkrati pa iz dejstva, da sta $y = \phi(x)$ in $y = \psi\big(x, C(x_0)\big)$ resitvi za $y' = f(x,y)$ iz (1) sledi:

$$\phi'(x_0) = \frac{d}{dx}\psi\big(x, C(x_0)\big)\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial\psi}{\partial u}\big(x_0, C(x_0)\big)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial v}\big(x, C(x)\big) \cdot C'(x) = 0; \quad \forall x \in J$$

To lahko zagotovimo če je:

$$\frac{\partial\psi}{\partial v}(x, C) = 0$$

To je enačba, iz katere lahko izračunamo $C = C(x)$ in posledicno enacbo $y = \phi(x)$ za singularno rešitev.

Clairautova diferencialna enačba

To je enačba oblike:

$$y = xy' + f(y')$$

kjer je f **odvedljiva** na $J^{odp} \subset \mathbb{R}$.

Splošna rešitev Clairautove diferencialne enačbe je podana s premicami:

$$y = Cx + f(C); \;\; C \in J$$

Krivulja: $x = f'(t) \;\; y = -f'(t)t + f(t)$ pa je singularna rešitev Clairautove enačbe.

Dokaz
Enačbo odvajamo po x in dobimo:

$$y' = y' + xy'' + f'(y')y'' \quad oz. \;\; y''\big(x + f'(y')\big) = 0$$

kar bo izpolnjeno če bo:

1) $y'' = 0$
2) $x + f'\big(y'(x)\big) = 0$

Obravnavamo obe možnosti:

1) $y'' = 0 \Rightarrow y$ je premica

$$y = kx + n$$
$$xy' + f(y') = xk + f(k)$$

Torej $n = f(k)$ in $y = kn + f(k)$

2) To je enačba oblike $F(x, y') = 0$, ki smo jo obravnavali prej. Vzemimo $F(u, v) = u + f'(v)$ in $F(u, v) = 0$ opisemo kot:

$$v = t \quad u = -f'(t)$$

Po tem kar smo za take enačbe prej povedali velja:

$$x = -f'(t) \quad y = \int \left(-f''(t)\right)t\, dt = -f'(t)t + f(t)$$

Ali je to res singularna rešitev?

Ja ker:

$$\frac{\partial}{\partial C}[Cx + f(C)] = 0 = x + f'(c)$$
$$\Rightarrow x = -f'(C) \Rightarrow y = C\left(-f'(C)\right) + f(C)$$