Ploskovni Integral

Ploskovni integral skalarnega polja

Naj bo $M \subset \mathbb{R}^3$ ploskev in $f: M \to \mathbb{R}$ **zvezna**. **Ploskovni integral skalarnega polja f** definiramo s predpisom:

$$\int_M f\,dS = \iint_D f\big(\vec{r}(u,v)\big)|\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}|du\,dv$$

kjer je $\vec{r}: D \to M$ poljubna regularna parametrizacija za M.
Ta definicija je dobra, v smislu, da je neodvisna od izbire parametrizacije.

Ploskovni integral zveznega vektorskega polja

Naj bo M ploskev z orientacijo $\vec{N}$ (zvezno polje enotskih normal na M). **Ploskovni integral zveznega vektorskega polja $\vec{F}$,** $\vec{F}: M \to \mathbb{R}^3$ je definirano s predpisom:

$$\int_M \vec{F} d\vec{S} = \int_M \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle dS = \int_D \langle \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big), \overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v} \rangle du\,dv$$

Torej ga prevedemo na ploskovni integral skalarnega polja.
Predznak integrala je odvisen od izbire (ene izmed dveh smeri) orientacije $\vec{N}$.

Operacije na vektorskih in skalarnih poljih v $\mathbb{R}^3$

Imejmo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. (Npr. $\Omega = [0,1]^3$) in $\vec{F} = (U, V, W)$

Skalarno polje na Ω je funkcija $\Omega \to \mathbb{R}$
Vektorsko polje na Ω je funkcija $\Omega \to \mathbb{R}^3$
Gradient: $\nabla u = grad\, u = (u_x, u_y, u_z)$; $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ Spremeni skalarno polje v vektorsko
Divergenca: $div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = U_x + V_y + W_z$ Spremeni vektorsko polje v skalarno
Rotor: $rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ U & V & W \end{vmatrix} = \big(W_y - V_z, U_z - W_x, V_x - U_y\big)$

Lastnosti operacij na poljih

- $div = \nabla^*$
  V smislu, da je $\int_\Omega \langle \nabla u, \vec{F} \rangle_{\mathbb{R}^3} dV = -\int u \cdot div\vec{F}\, dV$ za $u, \vec{F} \in C_c^1(\Omega)$
- $rot^* = rot$
- $rot \circ grad = 0$
- $div \circ rot = 0$
- $div \circ grad = -\nabla^*\nabla = \Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2$ **Laplaceov operator**
- $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
- $div\big(u\vec{F}\big) = u\, div\vec{F} + \langle \vec{F}, \nabla u \rangle$
- $div\big(\vec{F} \times \vec{G}\big) = \langle \vec{G}, rot\vec{F} \rangle - \langle \vec{F}, rot\vec{G} \rangle$
- $rot\big(u\vec{F}\big) - u\, rot\vec{F} + (\nabla u) \times \vec{F}$

Gaussov izrek

Naj bo Ω odprta omejena mnozica v $\mathbb{R}^3$ z (odsekoma) gladkim robom (Torej $\partial\Omega$ je (odsekoma) gladka ploskev z orientacijo $\vec{N}$, ki kaze ven iz Ω; pravimo ji **zunanja normala**)

$\vec{F}$ naj bo C^1 vektorsko polje okoli $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ (omega zaprtje)
Tedaj je:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{S} = \iiint_{\Omega} div\vec{F}\, dV$$

Dokaz

Za primer, ko Ω lahko zapišemo kot območje med dvema grafoma, za vse tri koordinate ravnine. Pišimo $\vec{F} = (X, Y, Z)$. Tedaj je $div\vec{F} = X_x + Y_y + Z_z$. Označimo z $\vec{N} = (N_1, N_2, N_3)$ zunanjo enotsko normalo na rob $\partial\Omega$. Dokazujemo:

$$\iint_{\partial\Omega} (XN_1 + YN_2 + ZN_3) dS = \iiint_{\Omega} (X_x + Y_y + Z_z) dV$$

Dovolj je, da pokažemo, da velja za eno komponento, torej: $\iint_{\partial\Omega} ZN_3\, dS = \iiint_{\Omega} Z_z dV$
Naj bo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \text{ in } f(x, y) < z < g(x, y)\}$; $f(x, y), g(x, y) \in C^1$ telo med grafoma dveh funkcij.

$$LS = \iint_{\Gamma_f} ZN_3 + \iint_{\Gamma_g} ZN_3 + \iint_{Navpicni\ del\ med\ grafoma}$$

Vemo, da je integral navpičnega dela med grafoma $= 0$ ker je tam $N_3 = 0$.
Graf parametriziramo:

$$\vec{r} = (x, y, f(x, y)); \ \ (x, y) \in D$$

$$\vec{r_x} \times \vec{r_y} = (-f_x, -f_y, 1) \qquad |\vec{r_x} \times \vec{r_y}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

Torej lahko levo stran zapišemo kot:

$$LS = \iint_D Z(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{-1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} \cdot \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dx\, dy +$$

$$\iint_D Z(x, y, g(x, y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}} \cdot \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}\, dx\, dy$$

To lahko poenostavimo v:

$$LS = \iint_D [Z(x, y, g(x, y)) - Z(x, y, f(x, y))] dx\, dy$$

Pa se:

$$DS = \iiint_{\Omega} Z_z\, dV = \iint_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} Z_z\, dz \right) dx\, dy = \iint_D [Z(x, y, g(x, y)) - Z(x, y, f(x, y))] dx\, dy = LS$$

Greenova formula

Greenova formula je reformulacija Gaussovega izreka v »dvodimenzionalni različici«. Predpostavljamo:

- $D \subset \mathbb{R}^2$ z (odsekoma) gladkim robom (∂D je koncna unija odsekoma gladkih krivulj, orientirana skladno z normalo $(0,0,+1)$ na D)
- $\vec{F}(X,Y)$ naj bo C^1 vektorsko polje na okolici $\overline{D}$

$$\int_{\partial D} Xdx + Ydy = \iint_D (Y_x - X_y) dx\, dy$$

Komentar/Dokaz

Greenova formula je reformulacija dvodimenzionalne različice Gaussovega izreka:

$$\iint_{\partial D} \langle \vec{G}, \vec{N} \rangle ds = \iint_D div\, \vec{G}\, dS$$

Ce bi namesto $\vec{N}$ imeli $\vec{T}$, bi leva stran bila krivuljni integral $\vec{G}$ po (orientirani) krivulji ∂D. Zato poiščemo polje $\vec{H}$ za katero je $\langle \vec{G}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{H}, \vec{T} \rangle$. Ker je $\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{N}$ (zarotiran za $\frac{\pi}{2}$ v ravnini) je $\vec{N} = R^{-1}\vec{T}$

$$\Rightarrow \langle \vec{G}, \vec{N} \rangle = \langle \vec{G}, R^{-1}\vec{T} \rangle = \langle \vec{G}, R^T \vec{T} \rangle = \left\langle R^{T^T} \vec{G}, \vec{T} \right\rangle = \langle R\vec{G}, \vec{T} \rangle = \langle \vec{H}, \vec{T} \rangle$$

Torej če je $\vec{G} = (U, V)$ je $\vec{H} = (-V, U)$. Sledi:

$$\int_{\partial D} \langle \vec{G}, \vec{N} \rangle ds = \int_{\partial D} \langle \vec{H}, \vec{T} \rangle ds = \int_{\partial D} \vec{H} d\vec{r} = \int_{\partial D} -Vdx + Udy \quad (1)$$

Hkrati pa je:

$$\iint_D div\, \vec{G}\, dS = \iint_D (U_x + V_y) dx\, dy$$

Kar je enako kot (1). Sedaj za $(U,V) = (Y, -X)$ sledi Greenova formula

Stokesov izrek

Predpostavimo:

- M je omejena, odsekoma gladka orientirana ploskev v $\mathbb{R}^3$ z odsekoma gladkim robom (∂M je koncna unija odsekoma gladkih krivulj, orientiranih skladno z M)
- $\vec{F}$ (gladko) vektorsko polje, definirano v okolici M

$$\int_{\partial M} \vec{F} d\vec{r} = \iint_M rot\, \vec{F}\, d\vec{S}$$

Skica dokaza

Obravnavamo primer, ko imamo gladko funkcijo $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ploskev

$$M = graf\ f = \{(x, y, f(x,y)); (x,y) \in D\}$$

Parametrizacija za M je $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$ z normalo $\frac{\vec{r_x} \times \vec{r_y}}{|\vec{r_x} \times \vec{r_y}|} = \frac{(-f_x, f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$

Pišimo se $\vec{F} = (X, Y, Z)$; $X, Y, Z: M \to \mathbb{R}$ so **gladke** funkcije $X = X(u, v, w)$ ...

Sedaj je:

$$\int_{\partial M} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\partial M} Xdx + Ydy + Zdz = \int_{\partial D} X(\vec{r})dx + Y(\vec{r})dy + Z(\vec{r})\big(f_x dx + f_y dy\big)$$
$$= \int_{\partial D} [x(\vec{r}) + Z(\vec{r})f_x]dx + \big[Y(\vec{r}) + Z(\vec{r})f_y\big]dy$$

Parametrizacija za ∂M je porojena z zožitvijo parametrizacije $\vec{r} = \vec{r}(x, y)$ na ∂D. Sedaj množimo z $\frac{\partial}{\partial x}$in uporabimo Greenovo formulo in verižno pravilo:

$$= \iint_D \left[Y_u(\vec{r}) \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + Y_v(\vec{r}) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + Y_w(\vec{r}) \cdot \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] + (Z_u + Z_w \cdot f_x)f_y + Z\frac{\partial f_y}{\partial x}$$
$$- \left(X_v + X_w \cdot f_y + \big(Z_v + Z_w \cdot f_y\big)f_x + Z\frac{\partial f_x}{\partial x}\right)$$
$$= \iint_D \big[\,(-f_x)(Z_v - Y_w) + \big(-f_y\big)(X_w - Z_u) + (Y_u - X_v)\big]$$

V tem izrazu prepoznamo komponente rotorja, dobimo:

$$\iint_D \big\langle \big(rot\ \vec{F}\big)(\vec{r}), \vec{N} \big\rangle \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy = \iint_M rot\ \vec{F}\ d\vec{S}$$

Odvisnost rotorja in divergence od izbire baze

Rotor in divergence sta oba neodvisna od izbire ortornormirane baze v $\mathbb{R}^3$

Smerni odvod

Naj bo:

- $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$
- u zvezna realna funkcija na okolici točke $\vec{v}$
- $\vec{a} \in \mathbb{R}^3, \ \ |\vec{a}| = 1$

Tedaj je **smerni odvod** funkcije u v točki $\vec{v}$ in v smeri $\vec{a}$ definiran kot:

$$\frac{\partial u}{\partial a}(\vec{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{u(\vec{v} + h\vec{a}) - u(\vec{v})}{h}$$

$$\nabla u = \big(u_x, u_y, u_z\big) = \left(\frac{\partial u}{\partial \hat{e_1}}, \frac{\partial u}{\partial \hat{e_2}}, \frac{\partial u}{\partial \hat{e_3}}\right) \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = \langle \nabla u, \vec{a} \rangle$$

Greenovi identiteti

Naj bo:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ odprta množica z odsekoma gladkim robom
- u, v skalarni polji, definirani in gladki na neki okolici $\overline{\Omega}$

Prva Greenova identiteta:

$$\iint_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_{\Omega} (u\Delta v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle)\, dV$$

Druga Greenova identiteta:

$$\iint_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right) dS = \iiint_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u)\, dV$$

Kjer je $\vec{n}$ enotska zunanja normala.

Dokaz

Definiramo $\vec{F} = u\nabla v$ in uporabimo Gaussovo formulo da dobimo prvo identiteto:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{S} = \iiint_{\Omega} div\, \vec{F}\, dV = \iiint_{\Omega} (u\Delta v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle)\, dV$$

Za drugo identiteto pa uporabimo definicijo ploskovnega integrala vektorskega polja:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{\partial\Omega} u \langle \nabla v, \vec{n} \rangle\, dS = \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS$$

Dokaz druge identitete sledi iz prve. Zamenjamo vlogi u in v in odštejemo.