Riemann-Darbouxov integral v $\mathbb{R}^n$

Delitve, Darbouxova in Riemannova vsota

Če izberemo $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, \dots, y_k \in \mathbb{R}$ tako da $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ in $c = y_0 < \cdots < y_k = d$ (torej pravokotnik razdelimo na manjše intervale). Tedaj množici

$$D = \{P_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]; j = 1, \dots, n\ k = 1, \dots, m\}$$

pravimo **<u>delitev</u>** pravokotnika P. Ploščino pravokotnika označimo $|P_{jk}| = (x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$.
Ob dani delitvi D in omejeni funkciji $f: P \to \mathbb{R}$ lahko definiramo:

$$m_{jk} = \inf f \quad na\ P_{jk}$$
$$M_{jk} = \sup f \quad na\ P_{jk}$$

Lahko tvorimo spodnjo (s) in zgornjo (S) **<u>Darbouxovo vsoto</u>** pripadajočo funkciji f in delitvi D.

$$s(f, D) = \sum_{j,k} m_{jk}|P_{jk}| \qquad S(f, D) = \sum_{jk} M_{jk}|P_{jk}|$$

En člen spodnje vsote predstavlja volumen največjega kvadra nad P_{jk} in pod grafom f. En člen zgornje vsote pa predstavlja volumen najmanjšega kvadra nad P_{jk} in nad grafom f.

Podoben koncept so **<u>Riemannove vsote</u>**. Vzamemo funkcijo f, delitev D ter $\forall j, k$ izberemo nek $\xi_{jk} \in P_{jk}$ in namesto inf/sup f (na P_{jk}) vzamemo $f(\xi_{jk})$. Torej za $\xi = \{\xi_{jk}; j, k\}$ definiramo:

$$R(f, D, \xi) = \sum_{j,k} f(\xi_{jk})|P_{jk}|$$

Očitno je $s(f, D) \leq R(f, D, \xi) \leq S(f, D)$ oz. $m_{jk} \leq f(\xi_{jk}) \leq M_{jk}$.
Če imamo dve delitvi D_1, D_2 pravokotnika $P \subset \mathbb{R}^2$ pravimo, da je D_2 **finejša** od D_1 ($D_1 \leq D_2$), ce **je vsak pravokotnik** iz D_1 **unija pravokotnikov** iz D_2

Integrabilnost v Darbouxevem smislu

Omejena funkcija $f: P \to \mathbb{R}$ je **integrabilna v Darbouxevem smislu**, če je $s(f) = S(f)$. Temu številu pravimo integral funkcije f po pravokotniku P $\iint_P f(x, y)dx\,dy$
Analogno konstrukcijo lahko naredimo tudi za $\mathbb{R}^n$

Integrabilnost v Riemannovem smislu

Naj bo $P \subset \mathbb{R}^n$ kvader in $f: P \to \mathbb{R}$. Pravimo, da je f **integrabilna v Riemannovem smislu** (torej obstaja limita Riemannovih vsot), število $I \in \mathbb{R}$ pa je njen **<u>Riemannov integral</u>**, če $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$

- Za poljubno delitev kvadra $P : diamD < \delta$
- $\forall D \in \mathcal{D}$ in poljubno pripadajoco ξ velja $|R(f, D, \xi) - I| < \epsilon$

Omejena funkcija $f: P \to \mathbb{R}$ je integrabilna v Darbouxejevem smislu natanko takrat, ko je integrabilna v Riemannovem smislu. V temu primeru sta oba integrala enaka.

Delovna definicija integrabilnosti

Naj bo $f: P \to \mathbb{R}$ omejena. Tedaj je f **integrabilna** na P natakno takrat, ko $\forall \epsilon > 0\ \ \exists$delitev D kvadra P, tako da:

$$S(f, D) - s(f, D) < \epsilon$$

Dokaz

(⇒)

Privzemimo $S(f) = s(f) = I(f) = I$

$$S(f) = \inf_{\mathcal{D}} S(f,D) \qquad s(f) = \sup_{\mathcal{D}} s(f,D)$$

Naj bo $\epsilon > 0$. Tedaj obstajata delitvi D, D' za P:

$$S(f) > S(f,D) - \epsilon \quad s(f) < s(f,D') + \epsilon; \quad S(f) = s(f)$$

Naj bo delitev D_0 finejsa od D, D' hkrati. Tedaj je:

$$S(f,D_0) - s(f,D_0) \leq S(f,D) - s(f,D') < (I+\epsilon) - (I-\epsilon) = 2\epsilon$$

(⇐)

Iz definicije $S(f), s(f)$ sledi:

$$S(f) - s(f) \leq S(f,D) - s(f,D) \quad \forall D$$

Torej iz pogoja na desni (nase predpostavke) dobimo, da $\exists D: S(f,D) - s(f,D) < \epsilon$. Sledi $S(f) - s(f) < \epsilon$. Hkrati je $S(f) - s(f) \geq 0$. Ker to lahko naredimo za $\forall \epsilon$. Sledi $S(f) - s(f) = 0$.

Integrabilnost zveznih funkcij

Vsaka zvezna funkcija $P \to \mathbb{R}$ je **integrabila**. P je lahko tudi kvader iz $\mathbb{R}^n$.

Dokaz za $\mathbb{R}^2$

Naj bo $P = [a,b] \times [c,d]$ in $f: P \to \mathbb{R}$ **zvezna**. Vzemimo $\epsilon > 0$. Ker je P zaprt in omejen, je f **enakomerno zvezna** na P. Torej $\exists \delta > 0: \xi_1, \xi_2 \in P$:

$$|\xi_1 - \xi_2| < \delta \Rightarrow |f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \epsilon$$

Naj bo $\mathcal{D} = \{P_j \subset \mathbb{R}^n\ kvader, j\}$ taksna delitev za P, da je $diam(P_j) < \delta$ (Dve tocki v njem sta najvec δ narazen). Sledi:

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \epsilon \qquad \forall \xi_1, \xi_2 \in P_j, \ \ \forall j$$

$$S(f,D) - s(f,D) = \sum_j \left(\max_{P_j} f - \min_{P_j} f\right) |P_j| < \epsilon |P|$$

Razširitev na poljubne like, ne samo kvadre

Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena množica in $f: A \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Ker je A omejena $\exists$ kvader $K \subset \mathbb{R}^n$: $A \subset K$. Funkcijo f potem lahko trivialno razsirimo na K in definiramo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \in K \backslash A \end{cases} \qquad \int_A f = \int_K \tilde{f}$$

Odprta/Zaprta množica

Pravimo da je $A \subset \mathbb{R}^n$ **odprta**, če $\forall a \in A \ \exists \epsilon > 0: K(a,\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-a| < \epsilon\} \subset A$

Množica $B \subset \mathbb{R}^n$ je **zaprta**, če je $B^c = \mathbb{R}^n \backslash B$ odprta.

Rob množice

Naj bo $B \in \mathbb{R}^n$, tedaj je njen **rob** ∂B definiran kot:

$$\partial B = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall okolica\ tocke\ x\ seka\ B\ in\ B^c\}$$

Prostornina množice

Omejena množica $A \subset \mathbb{R}^n$ ima **n-razsežno prostornina**, če je konstantna funkcija 1 integrabilna na A. Tedaj definiramo:

$$V(A) = \int_A 1dx \quad \left(= \int_K \chi_A(x)\, dx \; za \; poljuben \; kvader \; K \in \mathbb{R}^n : A \subset K\right)$$

Omejena množica $A \subset \mathbb{R}^n$ ima prostornino natanko takrat, ko ima ∂A prostornino in $V(\partial A) = 0$
Končna unija množic s prostornino 0 ima (spet) prostornino 0.

Kdaj ima množica prostornino 0?

Množico pokrijemo z končno unijo kvadrov z zelo majno ploščino.

$$V(B) = 0 \quad \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists kvadri \; K_1, \dots, K_m \subset \mathbb{R}^n:$$

- $B \subset \bigcup_{j=1}^{m} K_j$
- $\sum_{j=1}^{m} |K_j| < \epsilon$

Prostornina grafa funkcije

Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ in $f: K \to \mathbb{R}$ **integrabilna**. Tedaj ima njen graf Γ_f prostornino 0 v $\mathbb{R}^{n+1}$

Vpliv prostornine na integral

Naj bo $K \subset \mathbb{R}^n$ kvader, $A \subset K$ mnozica z prostornino 0 in $f: K \to \mathbb{R}$ omejena in enaka 0 zunaj A. Tedaj $\int_K f(x)dx$ obstaja in je enak 0.
Point: Integracija po množici s prostornino 0 se ne pozna.

Mera množice

Naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ poljubna množica (ne nujno omejena). Pravimo, da ima A **mero** (n-dim.) 0 (oznaka $m(A) = 0$), ce za $\forall \epsilon > 0 \; \exists$ števna družina kvadrov $\{A_j; j \in \mathbb{N}\}$ tako da:

$$A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |A_j| < \epsilon$$

Ce ima A prostornino 0 ima tudi mero 0.
Števna unija množic z mero 0 ima spet mero 0.

Pravimo, da lastnost $\mathcal{L}$ velja **skoraj povsod** na množici $x \subset \mathbb{R}^n$, ce velja povsod, razen morda na množici z mero 0. Torej, če je:

$$m(\{x \in X; \mathcal{L} \; ne \; velja \; v \; tocki \; x\}) = 0$$

Lebesgueov izrek

Naj bo $f: K \to \mathbb{R}$ omejena. Tedaj je f **integrabilna** natanko tedaj, ko ima njena množica nezveznosti (možica točk iz K kjer f ni zvezna) mero 0.

Posledica:
Ce je $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena, tedaj $V(A) = \int \chi_A$ obstaja $\Leftrightarrow$ χ_A je zvezna skoraj povsod (na $\mathbb{R}^n$) $\Leftrightarrow m(\partial A) = 0$
(Rob je množica nezveznosti χ_A)

Lastnosti integrabilnih funkcij/integrala

Naj bo$A \subset \mathbb{R}^n$ omejena in $I(A) = \{f: A \to \mathbb{R} \; omejena; f \; integrabilna \; na \; A\}$:

1. Ce sta $f, g \in I(A)$ je tudi $f + g \in I(A)$ in velja: $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$
   Za $\forall c \in \mathbb{R}$ je tudi $cf \in I(A)$ in velja: $\int_A cf = c \int_A f$

2. Ce za $f, g \in I(A)$ velja $f(x) \leq g(x)$ za $\forall x \in A$, tedaj: $\int_A f \leq \int_A g$
3. Ce je $f \in I(A)$ je tudi $|f| \in I(A)$ in velja: $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$
4. Ce je $f \in I(A)$ in ima A prostornino, je $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f| \leq V(A) \sup_A |f|$
5. Privzemimo:
    a. $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ sta omejeni množici
    b. $V(A_1 \cap A_2) = 0$
    c. $f: A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}$ je omejena
    d. $f \in I(A_1) \cap I(A_2)$
    Tedaj je $f \in I(A_1 \cup A_2)$ in velja: $\int_{A_1 \cup A_2} f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$
    (*Npr. integral [a, c] x [c, b]*)

Povprečna vrednost

Ce $V(A)$ ovstaja in > 0, tedaj za $f \in I(A)$ označimo **povprečno vrednost** funkcije f po mnozici A kot:

$$\langle f \rangle_A = \frac{1}{V(A)} \int_A f(x)\, dx$$

Fubini-Tonellijev izrek (kako prevesti na integral po 1 spremenljivki)

Naj bo $f: [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ **integrabilna**. Privzamemo, da je $\forall x \in [a, b]$ funkcija $f(x, \cdot): [c, d] \to \mathbb{R}$ definirana kot $y \mapsto f(x, y)$, **integrabilna** na $[a, b]$. Tedaj je:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Posledica: Če sta pri teh oznakah integrabilni f ter za $\forall y \in [c, d]$ se $f(\cdot, y)$, tedaj je:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y) dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Posledica: Če je $f: [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ **zvezna**, vemo od prej:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Dokaz

Definiramo $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ s predpisom $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ ($\exists$, saj je $f(x, \cdot)$ po privzetku integrabilna $\forall x$). Označimo $I = [a, b]$ in $J = [c, d]$. Želimo videti:

$$\iint_{I\times J} f(x, y) dx\, dy = \int_I g(x) dx \qquad (3)$$

Izberimo delitvi:

$$D_1 = \{I_i = [x_{i-1}, x_i]; i = 1, \dots, m\}\ za\ I$$
$$D_2 = \{J_j = [y_{j-1}, y_j]; j = 1, \dots, n\}\ za\ J$$

Tedaj je :

$$D = D_1 \times D_2 = \{P_{ij} = I_i \times I_j; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}\ delitev\ za\ I \times J$$

Označimo se:

$$m_{ij}(f) = \inf_{P_{ij}} f = \inf_{(x,y)\in P_{ij}} f(x,y) \qquad M_{ij} = \sup_{P_{ij}} f = \sup_{(x,y)\in P_{ij}} f(x,y)$$

Velja:

$$s(f,D) = \sum_{i,j} m_{ij}(f)\left|P_{ij}\right| = \sum_i \left(\sum_j m_{ij}(f)\left|J_j\right|\right)|I_i| \qquad (1)$$

Izberemo $i \in \{1, \dots, m\}$ ter $x \in I_i$. Tedaj je :

$$m_{ij}(f) = \inf_{\xi\in I_i, y\in J_j} f(\xi,y) \leq \inf_{y\in J_j} f(x,y) = m_j\big(f(x,\cdot)\big)$$

Sledi, za izbrana i in x:

$$\sum_j m_{ij}(f)\left|J_j\right| \leq \sum_j m_j\big(f(x,\cdot)\big)\left|J_j\right| = s(f(x,\cdot), D_2) \leq \int_c^d f(x,y)dy$$

Povzetek:

$$\sum_j m_{ij}(f)\left|J_j\right| \leq g(x) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, x \in I_i$$

Torej je tudi:

$$\sum_j m_{ij}(f)\left|J_j\right| \leq \min_{x\in I_i} g(x) \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

in zato, zaradi (1), se $s(f,D) \leq s(g,D_1)$. Dokazali smo:

$$s(f,D) \leq s(g,D_1) \leq S(g,D_1) \leq S(f,D) \qquad (2)$$

za poljubno delitev $D = D_1 \times D_2$ pravokotnika $I \times J$.
Izberimo $\epsilon > 0$. Ker je f integrabilna, po prejšnji trditvi, $\exists$ takašna delitev D, da je $S(f,D) - s(f,D) < \epsilon$. Torej, po (2), za njeno »projekcijo« na 1. komponento D_1 velja $S(g,D_1) - s(g,D_1) < \epsilon$. Po isti trditvi, je tudi g integrabilna in iz (2) sledi se (3).

Meje integrala so funkcije

Naj bodo

- $I = [a,b]$
- $\alpha, \beta: I \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji: $\alpha \leq \beta$ na I
- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in I, y \in [\alpha(x), \beta(x)]\}$ V bistvu lik med dvema grafoma.
- $f: A \to \mathbb{R}$ zvezna

Tedaj je:

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Podoben izrek velja za obraten vrstni red: $\iint_B f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx\right)dy$

Dokaz

Ker sta α, β zvezni sta na zaprteim intervalu $[a,b]$ omejeni. Zato $\exists$ taksen pravokotnik $P = [a,b] \times [c,d]$ da je $A \subset P$. Funkcijo f trivialno razširimo na P. Definiramo $\tilde{f}: P \to \mathbb{R}$ s predpisom:

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \notin A \end{cases}$$

Točke nezveznosti za $\tilde{f}$ so vsebovane v $\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$. Po trditvi od prej vemo, da imata $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ prostornino 0 v $\mathbb{R}^2$, zato jo ima tudi $\Gamma_\alpha \cup \Gamma_\beta$. Posledično je $\tilde{f}$ **zvezna** skoraj povsod na P. Podobno je za $\forall x \in [a,b]$, ki $y \mapsto \tilde{f}(x,y)$ **odsekoma zvezna** na $[c,d]$, zato je **integrabilna**. Sedaj lahko s pomočjo Fubinijevega izreka ugotovitve združimo v:

$$\iint_A f(x,y)dx\,dy = \iint_P \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)dy\right)dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Posplošitev na višje dimenzije

Naj bosta $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ kvadra in $f: A \times B \to \mathbb{R}$ **integrabilna**. Za $\forall x \in A$ naj bo $f(x, \cdot): y \mapsto f(x,y)$ **integrabilna** na B. Tedaj je:

$$\iint_{A\times B} f(x,y)dx\,dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy\right)dx$$

Npr. $K = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ in $F: K \to \mathbb{R}$ **zvezna**. Tedaj je:

$$\iiint_K F(x,y,z)dxdydz = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(\int_e^f F(x,y,z)dz\right)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_b^c \left(\int_e^f F(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

Podobno, če so meje funkcije. Privzemimo:

- $A \subset \mathbb{R}^2$ ima ploščino
- $\alpha, \beta: A \to \mathbb{R}$ sta zvezni funkciji in $\alpha < \beta$ na A
- $B = \{(x,y,z) \in A \times \mathbb{R}; \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$
- $f: B \to \mathbb{R}$ je zvezna

$$\iiint_B f\,(x,y,z)dV = \int_A \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dS(x,y)$$

Uvedba novih spremenljivk

Jacobijeva matrika

Naj bo $U^{odp} \subset \mathbb{R}^n$ in za $j = 1,\dots,m$ $\phi_j: U \to \mathbb{R}$ **parcialno odvedljiva na vse spremenljivke**. Tedaj **Jacobijevo matriko** za $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_m)$ definiramo kot:

$$J\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Izrek

Naj bo:

- $A \subset \mathbb{R}^n$ omejena odprta množica s prostornino
- $\phi: A \to \mathbb{R}^n$ injektivna funkcija razreda C^1

- $\det(J\phi(x)) \neq 0$ za $\forall x \in A$ in $\det(J\phi)$ omejena na A
- $\phi(A)$ je odprta v $\mathbb{R}^n$ s prostornino
- $f: \phi(A) \to \mathbb{R}$ je integrabilna

Tedaj je tudi $x \mapsto f\big(\phi(x)\big)|\det(J\phi)|$ **integrabilna** in velja:

$$\int_{\phi(A)} f(x)\,dx = \int_A f\big(\phi(t)\big)\big|\det\big(J\phi(t)\big)\big|\,dt$$

Dokaz (skica)

Obravnavamo primer, ko je $n = 2$ in je A pravokotnik. Naj bo $\{P_{ij}\}$ neka delitev za A. Velja:

$$\iint_{\phi(A)} f(x,y)dx\,dy = \sum_{i,j} \iint_{\phi(P_{ij})} f(x,y)dx\,dy = \sum_{i,j} \langle f\rangle_{\phi(P_{ij})} \cdot \big|\phi(P_{ij})\big| \quad (1)$$

Torej zapišemo kot povprečje funkcije na P_{ij} krat mero množice.

Imamo:

1. $\langle f\rangle_{\phi(P_{ij})} = f\Big(\phi\big(u_{ij}, v_{ij}\big)\Big)$ za neke $\big(u_{ij}, v_{ij}\big) \in P_{ij}$ (2)
2. Ideja je, da ploščino $\big|\phi(P_{ij})\big|$ aproksimiramo, s ploščino paralelograma (Glej skico v zvezku)
$$\big|\phi(P_{ij})\big| \approx \big|\big(\phi(u+\Delta u, v) - \phi(u,v)\big) \times \big(\phi(u, v+\Delta v) - \phi(u,v)\big)\big|$$
$$\simeq \left|\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v)\Delta u \times \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\Delta v\right| \simeq |\phi_u \times \phi_v|\Delta u\Delta v = |\det J\phi|\Delta u\Delta v$$
Torej:
$$\big|\phi(P_{ij})\big| \simeq \big|\det J\,\phi\big(u_{ij}, v_{ij}\big)\big|\Delta u_{ij}\Delta v_{ij}$$
Zato:
$$\iint_{\phi(A)} f(x,y)dx\,dy \simeq \sum_{i,j} f\Big(\phi\big(u_{ij}, v_{ij}\big)\Big)\big|\det J\phi\big(u_{ij}, v_{ij}\big)\big|\Delta u_{ij}\Delta v_{ij}$$

Na desni pa ravno prepoznamo Riemannovo vsoto za integral:

$$\iint_A f\big(\phi(x,y)\big)|\det J\phi|dx\,dy$$

Posplošeni Riemann-Darbouxov integral v $\mathbb{R}^n$

Neomejeno integracijsko območje: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$ če limita obstaja

Neomejena funkcija: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$ če ta limita obstaja (f ima pol pri b)

Absolutna integrabilnost

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ **neomejena** množica. Definiramo $D_j = D \cap [-\gamma,\gamma]^n$; $j \in \mathbb{N}$ kjer je $[-\gamma,\gamma]^n$ čedalje večja simetrična kocka. Velja: $D_j \subset \mathbb{R}^n$ **omejena**, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j = D$ in $D_1 \subset D_2 \subset \cdots$

Naj bo $f \geq 0$. Privzamemo, da $\exists\, I_j = \int_{D_j} f(x)dx$. Tedaj zaradi $D_j \subset D_{j+1}$ in $f \geq 0$ velja $I_1 \leq I_2 \leq \cdots$ oz.

$$I_{j+1} - I_j = \int_{D_{j+1}} f - \int_{D_j} f = \int_{D_{j+1}\setminus D_j} f + \int_{Dj} f$$

Definiramo $I = \lim_{j\to\infty} I_j = \sup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ ter označimo $I = \int_D f(x)dx$

Ce je $f: D \to \mathbb{R}$ (torej, da ni nujno $f \geq 0$) oznacimo:

$$f^+ = \max\{f, 0\} \qquad f^- = \min\{f, 0\}$$

Tedaj je:

$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^- \qquad f^+, f^- \geq 0$$

Tako lahko definiramo: $\int_D f = \int_D f^+ - \int_D f^-$ če sta oba integrala na desni strani enačaja končna. Tedaj velja:

$$\int_D |f| = \int_D f^+ + \int_D f^- < \infty$$

zato rečemo, da je f **absolutno integrabilna**. Oznaka $\mathcal{L}^1(D)$ $\left||f|\right|_1 = \int_D |f|$

V $\mathbb{R}^n$

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ **ne nujno omejena.**

- $f: D \to [0, \infty)$ **omejena**:
$$\int_D f = \lim_{a\to\infty} \int_{D\cap[-a,a]^n} f$$
če vsi izrazi na desni obstajajo.
- $f: D \to [0, \infty)$ **neomejena**:
$$\int_D f = \lim_{M\to\infty} \int_D \min\{f, M\} \qquad \min\{f, M\} = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq M \\ M, & f(x) > M \end{cases}$$
če vsi izrazi na desni obstajajo.
- $f: D \to \mathbb{R}$ **poljubna** (ne nujno pozitivna, ne nujno omejena)
$$f^+ = \max\{f, 0\} \quad f^- = \min\{f, 0\}$$
Tedaj sta $f^\pm: D \to [0, \infty)$ in $f = f^+ - f^-$ in $|f| = f^+ + f^-$.Če obstaja $\int_D |f| < \infty$, tedaj sledi, da $\int_D f^\pm < \infty$ in lahko definiramo:
$$\int_D f = \int_D f^+ - \int_D f^-$$