Variacijski račun
Iščemo funkcije y, za katere imajo izrazi tipa:

$$\int_a^b L(x,y,y')dx$$

ekstremno vrednost.
Pomembno je precizirati, v katerem funkcijskem razredu iščemo ekstrem. Ta razred bomo po navadi označevali z X.

Lagrangeevo jedro
Funkcija $L = L(u,v,w)$ se imenuje **Lagrangeevo jedro/funkcija** ali **Lagrangian**. Ob danih J, X, L definiramo **funkcional** $I: X \to \mathbb{R}$ (ki slika nek bolj abstrakten objekt (npr. funkcijo) v $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$) s predpisom:

$$I(y) = \int_a^b L(x,y,y')dx$$

Naloga s fiksnimi krajišči
Privzemimo da $L: J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in da vsi parcialni odvodi 1. reda obstajajo in so zvezni. Po navadi je $X \subset C^1(J)$ dolocen tako, da v krajiscih predpišemo vrednosti, npr.:

$$X = \{y \in C^1(J); y(a) = \alpha, y(b) = \beta\}$$

V tem primeru imamo tako imenovano **nalogo z fiksnimi krajišči**.
Ce vsaj v enem krajišču tega pogoja ni imamo pa **nalogo z gibljivimi krajišči**.

Premica v funkcijskem prostoru
Premica v funkcijskem prostoru X skozi tocko $y_0 \in X$: $\{y_0 + \lambda y_1;\ \ \lambda \in \mathbb{R}\}$ za $y_1 \in X$

Pojem ekstrema/ekstremale
(Lokalni) ekstrem oz. **ekstremala** funkcionala I definiramo kot funkcijo y, v kateri ima I ekstrem v vseh »smereh«. To pomeni, da za ∀**gladko** funkcijo η, za katero je $y + \epsilon\eta \in X$ za vse dovolj majhne $\epsilon \in \mathbb{R}$ ima na **realnih številih** (oz. na neki okolici točke $0 \in \mathbb{R}$) funkcija:

$$\psi: \epsilon \to I(y + \epsilon\eta)$$

ekstrem v $\epsilon = 0$. (Temu pravimo perturbacija y v smeri ϵ).
Analogno je stacionarna točka za I funkcija v katerem ima I vse »smerne« odvode:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} I(y + \epsilon\eta)\Big|_{\epsilon=0} = 0$$

Zgornji količini po navadi rečemo **(prva) variacija funkcionala I**.

Euler-Lagrangeev pogoj
Izkaze se, da lahko ekstremale iščemo le med funkcijami, ki ustrezajo temu pogoju:

$$L_y - \frac{d}{dx}(L_{y'}) = 0 \qquad (EL)$$

$L = L(u,v,w)$ oz, ponavadi $L\big(x, y(x), y'(x)\big) = L\big(z(x)\big)$
Torej pogoj (EL) dejansko pomeni:

$$\frac{\partial L}{\partial v}\big(z(x)\big) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial w}\big(z(x)\big)\right] = 0 \qquad \color{red}{(EL)}$$

Oz. za stacionarne točke:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} I(y + \epsilon\eta)\,\Big|_{\epsilon=0} = \frac{\partial}{\partial \epsilon}\int_a^b L\big(x, y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x)\big)dx\,\Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad \forall\eta$$

Prednosti tega pogoja sta, da ni testnih funkciji (η) in da ni integracije.

Variacijska lema

Naj bo $J = [a, b]$ in $f \in C(J)$. Ce je:

$$\int_J f\eta = 0 \;\; za\; \forall\eta \in C_0^1(J)$$

tedaj je $f\; \equiv 0$ povosd na J.

Oznaka: $C_0^1(J) = \{\eta \in C^1(J); \eta\,\big|_{\partial J} = 0\}$ Npr. $\{\eta \in C^1(J); \eta(a) = \eta(b) = 0\; za\; J = [a, b]\}$

Dokaz (S protislovjem)

Privzemimo da $f \not\equiv 0$. Torej $\exists c \in J$: $f(c) \neq 0$. Privzemimo, da je $f(c) > 0$. (Glej slikico v zvezku)

$$\Rightarrow \int_J f\eta = \int_{(c-\epsilon, c+\epsilon)} f\eta > 0 \quad protislovje$$

Ker je f zvezna $\exists\epsilon > 0$: $f(x) > 0$ za $\forall x \in (c - \epsilon, c + \epsilon)$. Sedaj izberemo tak $\eta \in C_0^1(J), \eta \neq 0$:

$$supp(\eta) = zaprtje\; mnozice\; \{x; \eta(x) \neq 0\}$$

Nosilec (support) je vsebovan v $(c - \epsilon, c + \epsilon)$. Iz tega sledi protislovje

Razmadzejev izrek

Naj bosta M, N **zvezni** funkciji na $[a, b]$ in naj velja:

$$\int_a^b (M\eta + N\eta')dx = 0$$

Za $\forall$ **zvezno odvedljivo** $\eta \in [a, b]: \eta(a) = \eta(b) = 0\; oz. \eta \in C_0^1(J)$. Tedaj je N **odvedljiva** in $N' = M$

$$\Rightarrow (N\eta)' = (M\eta + N\eta')$$

Dokaz

1. $M = 0, J = [a, b]$, torej:

$$\int N\eta' = 0 \;\; \forall\eta C_0^1(J)$$

Ker je $\int_a^b \eta' = \eta(b) - \eta(a) = 0$ je

$$\int_a^b [N(x) - C]\eta'(x)dx = 0, \;\; \forall\eta, \forall c \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

Izberemo:

$$C = \langle N\rangle_{[a,b]} = \frac{1}{b-a}\int_a^b N \qquad \eta(b) = \int_a^b [N(\xi) - C]d\xi = \int_J N - C|J| = 0$$

Definiramo:

$$\eta(x) = \int_a^x [N(\xi) - C]d\xi$$

Sledi $\eta \in C_0^1(J)$ in $\eta' = N - c$. Posledično iz $(*)$ dobimo: $\int_a^b [N(x) - C]^2 dx = 0$
$\Rightarrow N(x) - C = 0$ za $\forall x \in J$ $(\Rightarrow N' \equiv 0 \equiv M)$

2. M je poljuben. Definiramo $p(x) = \int_a^x M(\xi) d\xi$
$$\Rightarrow p' = M \quad in \quad \int (M\eta + N\eta')$$
To pa lahko po per partesu in z upoštevanjem $\eta(a) = \eta(b) = 0$ napisemo kot:
$$\int N\eta' - p\eta' = \int (N - p)\eta'$$
Po porvem primeru sledi $(N - p) \equiv konst.$ zato iz odvedljivosti p sledi odvedljivost N in velja $N' = p' = M$.

Iskanje ekstremale preko Euler-Lagrangeevega pogoja

Vzemimo $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Naj bo $L: J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **zvezno odvedljiva na vse spremenljivke** in $X \subset C^1(J)$. Naj bo $y \in X$ taksna funkcija, da je $y + C_0^1(J) \subset X$ (kar je avtomatsko izpolnjeno, ce je X podan z zahtevo o fiksnih mejah). Ce je y ekstremala za funkcional $I: X \to \mathbb{C}$, definiran s:

$$I(y) = \int_a^b L(x, y, y')\, dx$$

tedaj y **ustreza pogoju** $(\boldsymbol{EL})$.

Dokaz

Naj bo $\eta \in C_0^1(J)$. Tedaj je $y + \epsilon\eta \in X$ za $\forall \epsilon > 0$. Sedaj definiramo $F = F_{I,y,\eta}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s predpisom:

$$F(\epsilon) = I(y + \epsilon\eta) = \int_a^b L\big(x, y(x) + \epsilon\eta(x), y'(x) + \epsilon\eta'(x)\big) dx$$

Ker je y ekstremala za I, ima F ekstrem v tocki 0, torej $F'(0) = (0)$. Računamo (odvod (po ϵ) nesemo pod integral in upoštevamo verižno pravilo):

$$F'(\epsilon) = \int_a^b \big[0 + L_y(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') \cdot \eta + L_{y'}(x, y + \epsilon\eta, y' + \epsilon\eta') \cdot \eta'\big] dx$$
$$\Rightarrow 0 = F'(0) = \int_a^b \big[L_y(x, y, y') \cdot \eta + L_{y'}(x, y, y') \cdot \eta'\big] dx = \int_a^b [M\eta + N\eta']\, dx \quad \big(\forall \eta \in C_0^1(J)\big)$$

Po Razmadzejevem izreku je $\frac{d}{dx} L_{y'} = L_y$, kar pa je (EL)

Gibljiva krajišča

Vzamemo $X = C^1(J)$ **brez** dodatnega pogoja $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$. Izkaze se, da tedaj lahko pogoje na y v krajiscih nadomestimo z:
$$L_{y'}\big(a, y(a), y'(a)\big) = L_{y'}\big(b, y(b), y'(b)\big) = 0$$

Posebna primera

1. $L = L(x, y')$ **neodvisen od** $\boldsymbol{y}$
   Pogoj (EL) se prevede na $\frac{d}{dx} L_{y'} = 0$, kar se poenostavi v pogoj $L_{y'} = C\ konstanta$
2. $L = L(y, y')$
   Tedaj se (EL) poenostavi v **<u>Beltramijevo identiteto</u>** $L - y' L_{y'} = C$
   Oz. $L\big(z(x)\big) - y'(x) L_w\big(z(x)\big) = C \quad \forall x \in J$

Dokaz Beltramijeve identitete

$$\left(L - y'L_{y'}\right)' = L_x \cdot 1 + L_y \cdot y' + L_{y'} \cdot y'' - \left(y'' \cdot L_{y'} + y'\frac{d}{dx}L_{y'}\right)$$

ker je neodvisen od x je $L_x = 0$

$$\left(L_y - \frac{d}{dx}L_{y'}\right) \cdot y' = 0$$

In ker je odvod 0, sledi res Beltramijeva identiteta.

Izoperimetrični problem

Želimo maksimizirati ploščino (lika pod grafom) ob dani dolžini loka. Torej:

Iščemo ekstreme funkcionala

$$I(y) = \int_a^b L(x, y, y')dx \quad y \in x$$

pri čemer razred testnih funkcij (X) dolocajno ne le robni pogoji $(y(a) = \alpha, y(b) = \beta)$, ampak se to, da mora imeti nek drug funkcional na X točno določeno vrednost, torej:

$$\mathcal{J}(y) = c \quad za\ \mathcal{J}(y) = \int_a^b \mathcal{L}(x, y, y')dx$$

Izrek

Vzemimo $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Naj bo $L, \mathcal{L}: J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva na vse spremenljivke in izberimo se $a, b, c \in \mathbb{R}$ in definiramo:

$$Y = \{y \in C^1(J); y(a) = \alpha, y(b) = \beta, \mathcal{J}(y) = c\}$$

kjer je:

$$\mathcal{J} = \int_a^b \mathcal{L}(x, y, y')dx$$

Ce je y ekstremala za funkcional $I: Y \to \mathbb{R}$, definiranim s predpisom:

$$I(y) = \int_a^b L(x, y, y')dx$$

in hkrati **ni** ekstremala za $\mathcal{J}$, tedaj $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, za katerega y ustreza pogoju (EL) z $L + \lambda\mathcal{L}$ v vlogi L.

Glej potencialno naprej v zvezku za rešitev

Problem brahistohrone

Iščemo krivuljo, ki povezuje točki $A = (a, \alpha)$ in $B = (b, \beta)$, kjer $a < b, \alpha > \beta$ in ima naslednjo lastnost/
Ce po njen v tocki A spustiono kroglico (le) pod vplivom gravitacije, prispe v tocko B v **najkrajšem času**.

Poglej v zvezek naprej

Didonin problem

Imejmo $l > 0$. Med vsemi gladkimi preslikavami/parametrizacijami $x = x(t), y = y(t)$ za katere je

$$\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,(t)dt = l$$

iščemo tisto/tiste, za katere je ploščina:

$$I = \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - \dot{x}y)(t)dt$$

maksimalna.

Poglej v zvezek naprej.