Fourierova Transformacija

Nosilec

Naj bo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija. **Nosilec** funkcije f je zaprtje množice:

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$$

Nosilec za f po navadi označimo kot support:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}}$$

Primeri:

i) $\operatorname{supp} \chi_{(0,1)} = \overline{\{x \in \mathbb{R}; \chi_{(0,1)}(x) \neq 0\}} = \overline{(0,1)} = [0,1]$

ii) polinom p

$$\operatorname{supp} p = \overline{\{x \in \mathbb{R}; p(x) \neq 0\}} = \mathbb{R}$$

$\{x \in \mathbb{R}; p(x) \neq 0\}$ je končna (torej $\mathbb{R}$ brez par pik recimo) ampak ko naredimo zaprtje grejo te manjkajoče pike zraven.

Funkcija f ima **kompaktni nosilec**, če je $\operatorname{supp} f$ kompakten. To pomeni, da obstaja interval $[a, b]$, da je $f(x) \equiv 0$, ko je $x \in \mathbb{R} \backslash [a, b]$. Prostor zveznih funkcij na $\mathbb{R}$ s kompaktnim nosilcem označimo z:

$$C_c(\mathbb{R})$$

Prostor vseh merljivih funkcij

Norma:

Za $f \in C_c(\mathbb{R})$ definirajmo:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

Ker je $f \in C_c(\mathbb{R})$ je $\operatorname{supp} f \subseteq [a, b]$:

$$\Rightarrow \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

Tako smo dobili **Riemannov integral zvezne funkcije**, zato je $\|f\|_1$ dobro definiran.

Metrika:

Vpeljemo metriko d na $C_c(\mathbb{R})$:

$$d(f, g) = \|f - g\|_1$$

Ta prostor ni poln iz dveh razlogov. Limitna funkcija morda nima kompaktnega nosilca, morda pa niti ni zvezna. Zato ta prostor napolnimo. Napolnitev prostora $(C_c(\mathbb{R}), d)$ je $L^1(\mathbb{R})$. Dobljeni prostor je **prostor vseh merljivih funkcij na** $\mathbb{R}$ za katere je:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dm(x) < \infty$$

kjer je $m(x)$ **Lebesguova mera**.

Elemente prostora $L^1(\mathbb{R})$ si bomo predstavljali kot Riemannovo absolutno integrabilne funkcije (to je posplošitev ker ne znamo Lebesguovega integrala).

Fourierova transformacija

Za $f \in L^1(\mathbb{R})$ definiramo $\hat{f}$ s predpisom:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Funkcija $\hat{f}$ se imenuje **Fourierova transformiranka** funkcije f. Preslikavo $\widehat{\ } : L^1(\mathbb{R}) \to ?$ imenujemo **Fourierova transformacija**. Ker je $\left|e^{-i\xi x}\right| = 1$ in $f \in L^1(\mathbb{R})$ je zgornji integral absolutno konvergenten in zato $\hat{f}$ obstaja.

Primer [Karakteristična funkcija]

Izračunajmo $\hat{f}$, kjer je $f = \chi_{[a,b]}$

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \Big|_a^b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ia\xi} - e^{-ib\xi}}{i\xi}$$

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_{[-c,c]}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ic\xi} - e^{-ic\xi}}{i\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\cos(c\xi) + i\sin(c\xi)) - (\cos(-c\xi) + i\sin(-c\xi))}{i\xi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i\sin(c\xi)}{i\xi} = \frac{\sqrt{2/\pi}\sin(c\xi)}{\xi}\end{aligned}$$

Primer [Eksponentna funkcija]

Izračunajmo $\hat{f}$, kjer je $f(x) = e^{-|x|}$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-i\xi x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x} e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x(1+i\xi)} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x}(1-i\xi) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{1}{1+i\xi} e^{-x(1+i\xi)} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{1-i\xi} e^{x(1-i\xi)} \Big|_{-\infty}^{0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+i\xi} - \frac{1}{1-i\xi} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+\xi^2} = \sqrt{2/\pi} \frac{1}{1+\xi^2}\end{aligned}$$

Lastnosti Fourierove transformacije

Naj bo $f \in L^1(\mathbb{R})$

i) $\hat{f}$ je zvezna in velja $\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$

ii) Za $t \in \mathbb{R}$ naj bo e_t definirana s predpisom $e_t(x) = e^{itx}$. Potem je:
$$\widehat{fe_t}(\xi) = \hat{f}(\xi - t)$$

iii) Za $a > 0$ naj bo $f_{[a]}$ definirana s predpisom $f_{[a]}(x) = f(ax)$. Tedaj je:
$$\hat{f}_{[a]}(\xi) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

iv) Za $t \in \mathbb{R}$ definiramo premaknjeno funkcijo f_t s predpisom $f_t(x) = f(x - t)$. Tedaj velja:
$$\hat{f}_t(\xi) = e^{-it\xi} \hat{f}(\xi)$$

v) Naj bo χ identična funkcija ($\chi(x) = x$). Ce je $\chi f \in L^1(\mathbb{R})$, potem je $\hat{f}$ odvedljiva in velja:

$$\left(\hat{f}\right)'(\xi) = -i\,\widehat{\chi f}(\xi)$$

vi) Ce je f zvezno odvedljiva in $f' \in L^1(\mathbb{R})$, potem je:

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$$

Dokaz [Lastnosti i), ii), iii), iv) in vi)]

i)

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

$$\Rightarrow \left|\hat{f}(\xi)\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \frac{\|f\|_1}{\sqrt{2\pi}}$$

$\hat{f}$ zvezna v ξ

$$\left|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)e^{-ix(\xi+h)} - f(x)e^{-i\xi x}\right|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\left|e^{-i\xi x}\right|\left|e^{-ixh}-1\right|dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\left|e^{-ixh}-1\right|dx$$

Ker je $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx < \infty$ za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $A > 0$, da je:

$$\int_{|x|\ge A}|f(x)|dx < \frac{\epsilon}{4}\sqrt{2\pi}$$

Naj bo $\delta > 0$ tako majhen, da je:

$$\left|e^{-ihx}-1\right| < \frac{\epsilon\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1};\forall x \in (-A, A)$$

(zaradi zveznosti $x \mapsto e^{-ix}$). Ce je $|x| < \delta$ je $\left|e^{-ix}-1\right| < \frac{\epsilon\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}$ za $|xh| < ah < \delta$, potem za $x \in (-A, A)$ velja:

$$\left|e^{-ihx}-1\right| < \frac{\epsilon\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}$$

$$\Rightarrow \left|\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)\right| \le \int_{-A}^{A}|f(x)|\left|e^{-ixh}-1\right|dx + \int_{|x|\ge A}|f(x)|\left|e^{-ixh}-1\right|dx$$
$$\le \epsilon\frac{\sqrt{2\pi}}{2\|f\|_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A}|f(x)|dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|\ge A}|f(x)|2\,dx$$
$$\le \frac{\epsilon}{2\|f\|_1}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\epsilon}{4}\sqrt{2\pi} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dokaz funkcionira če $\|f\|_1 \neq 0$. Ce je $\|f\|_1 = 0$ je v tem primeru f zvezna in je $f \equiv 0$ na $\mathbb{R}$, če je $\hat{f}(\xi) = 0\ \forall\xi \in \mathbb{R}$.

Podobno če f ni zvezna je $\hat{f}(\xi) = 0$, vendar se sklicejo na dejstvo, da je $f \equiv 0$ (nekaj o Lebesguovi meri).

ii)

$$\widehat{fe_t}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(\xi - t)} dx = \hat{f}(\xi - t)$$

iii)

$$\hat{f}_{[a]}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-i\xi x} dx =$$

kjer uvedemo $ax = y$ in $adx = dy$:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{iy}{a}\xi} \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

iv) Uvedemo $x - t = y$

$$\hat{f}_t(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i(y+t)\xi} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-iy\xi} e^{-it\xi} dy$$
$$= e^{-it\xi} \hat{f}(\xi)$$

vi) Uporabimo per partes

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f(x) e^{-ix\xi} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \right) = i\xi \hat{f}(\xi) + 0$$

Zato ker je funkcija Lebesgueovo merljiva oz.:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$x \geq 0: f(x) = f(0) + \int_0^x f'(\xi) d\xi$$

Ker je $f' \in L^1(\mathbb{R})$ limita $\lim_{x \to \infty} f(x)$ obstaja in ker je $f \in L^1(\mathbb{R})$ je ta limita 0. Enako za $x \to -\infty$.

Konvolucija funkcij

Naj bosta $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. **Konvolucija** $(f * g)$ **funkcij** je funkcija definirana s predpisom:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) g(t) dt$$

kadar je zgornji integral absolutno konvergenten. To se zgodi zagotovo, ce sta $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Ta integral konvergira absolutno tudi v se bolj posebnih primerih. Npr. f, g sta odsekoma zvezni in ena od njiju pa ima kompakten nosilec. V posebnem primeru ima $(f * g)$ smisel za $f, g \in C_c(\mathbb{R})$

Lastnosti konvolucije funkcij

Veljajo naslednje formule za $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$:

i)	$(\alpha f + \beta g) * h = \alpha(f * h) + \beta(g * h)$	**Distributivnost**
ii)	$f * h = g * f$	**Komutativnost**
iii)	$f * (g * h) = (f * g) * h$	**Asociativnost**

Banachov prostor

$(L^1(\mathbb{R}),*)$ je **algebra**. Ce $L^1(\mathbb{R})$ opremimo z $\|\cdot\|_1$, dobimo poln normiran prostor, torej **Banachov prostor**.

Za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ velja $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Iz tega sledi, da je $(L^1(\mathbb{R}),*)$ **komutativna Banachova algebra**.

Trditev [Fourierova trasformiranka konvolucije]

Za $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ velja:

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g}$$

Dokaz

Naj bosta $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ (funkciji s kompaktnim nosilcem). Zato ima funkcija $(t, x) \mapsto e^{-i\xi x} f(x-t) g(t)$ tudi kompaktni nosilec v $\mathbb{R}^2$. Zaradi tega lahko uporabimo Fubinijev izrek:

$$\widehat{f * g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) e^{-i\xi x}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) e^{-i\xi x} dx =$$

Tu uvedemo novo spremenljivko $y = x - t$:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi(y+t)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\xi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy = \hat{g} \sqrt{2\pi} \hat{f}$$

V splošnem upoštevamo dejstvo, da je $C_c(\mathbb{R})$ gost v $L^1(\mathbb{R})$ in $|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$. Ce $f_n \to f$ po točkah $\Rightarrow$ $\hat{f}_n \to \hat{f}$ po točkah ■.

Odvod konvolucije funkcij

Za odvod si predstavljamo, da odvajamo pod integralom po x. Ce je f zvezno odvedljiva, integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x-t) g(t)| dt$$

pa konvergira enakomerno na vsakem končnem intervalu glede na x, potem smemo odvajati po x in velja:

$$(f * g)'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-t) g(t) dt = (f' * g)(x)$$

Funkcija f je gladka, če je neskončnokrat (zvezno) odvedljiva. Ce ima se kompakten nosilec, dobimo:

$$(f * g)^{(n)} = f^{(n)} * g$$

Schwartzov razrez hitro padajočih funkcij

Schwartzov prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ **hitro padajočih funkcij**, sestoji iz vseh neskončnokrat odvedljivih funkcij $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, za katere so vse funkcije oblike:

$$x \mapsto f^{(m)}(x) \cdot x^n; \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0$$

omejene.

Ker je funkcija $x \mapsto f^{(m)}(x) \cdot x^n$ omejena iz enakosti:

$$f^{(m)} x^{n+1} = x \cdot f^{(m)}(x) \cdot x^n$$

dobimo:

$$\left|f^{(m)}(x) \cdot x^n\right| = \frac{\left|f^{(m)}(x) \cdot x^{n+1}\right|}{|x|} \leq \frac{M}{|x|} \to 0; (x \to \infty)$$

Zato je:

$$\lim_{x\to\infty} f^{(m)}(x) x^n = \lim_{x\to-\infty} f^{(m)}(x) x^n = 0; \;\; \forall m, n \in \mathbb{N}_0$$

Lema

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$$

Dokaz

Naj bo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Spomnimo se da $1/x^\alpha$ konvergira za $\alpha > 1$. Ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je funkcija:

$$x \mapsto f(x)(1 + x^2)$$

tudi v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Enka pristeta zraven, je zato, da se izognemo polom. Tako potem obstaja $M \geq 0$, da je $|f(x)(1 + x^2)| \leq M \; \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{1 + x^2} dx = M\pi < \infty \quad \blacksquare$$

Katere funkcije so v Schwartzevem razredu?

[Konkretni primeri v zvezku]

Naj bo $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tedaj so naslednje funkcije tudi v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

i) $f_t: x \mapsto f(x - t)$
ii) $f_{[a]}: x \mapsto f(ax); a \neq 0$
iii) Odvod $f^{(n)} \; \forall n \in \mathbb{N}$
iv) pf, kjer je p polinom
v) $f * g$

Dokaz [Točke v)]

Preveriti moramo, da je $f * g$ gladka in da je $x \mapsto (f * g)^{(m)} x^n$ omejena $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$. [Dokaz naprej v zvezku]

Schwartzov razred za Fouriereve transformiranke

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Dokaz

Dokazati moramo $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ in $\xi \mapsto \left(\hat{f}\right)^{(n)} \xi^m$ omejena. Preverimo le da $\hat{f}'$ obstaja:

Ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^1(\mathbb{R})$. Ker je $\chi f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je $\chi f \in L^1(\mathbb{R})$, kjer je χ identična funkcija. Po lastnosti Fouriereve transformacije sledi obstoj $\hat{f}'$.

Dokažimo se omejenost. Po lastnostih Fouriereve transformacije velja:

$$\left(\hat{f}\right)'(\xi) = -i\widehat{\chi f}(\xi) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)e^{-i\xi x}dx$$

Predpostavke za to lastnost so $f \in L^1(\mathbb{R})$ in $x \mapsto xf(x)$. Ce uporabimo za isto lastnost funkcijo $x \mapsto xf(x)$ dobimo:

$$\left(\hat{f}\right)''(\xi) = (-i)^2\, \widehat{\chi^2 f}(\xi) = (-i)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)e^{-i\xi x}dx$$

Ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so vse funkcije $x \mapsto x^m f(x)$ tudi v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zato lahko naredimo zgornje. Po indukciji dobimo:

$$\left(\hat{f}\right)^{(n)}(\xi) = (-i)^n \widehat{\chi^n f}(\xi) = (-i)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)e^{-i\xi x}dx$$

$$\begin{aligned}\xi^m \left(\hat{f}\right)^{(n)} &= \xi^m (-i)^n \widehat{\chi^n f}(\xi) = \xi^{m-1}(-i)^n \xi \widehat{\chi^n f}(\xi) = \xi^{m-1}(-i)^n \frac{1}{i}\, \widehat{\chi^n f'}(\xi) = \cdots \\ &= \xi^{m-2}(-i)^n \frac{1}{i^2}\, \widehat{(\chi^n f)''}(\xi) = \cdots = (-i)^n (-i)^m\, \widehat{(\chi^n f)^{(m)}}\end{aligned}$$

Ker je $\xi \mapsto \xi^m f^{(n)}(\xi)$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$, je funkcija $\widehat{(\chi^n f)^{(n)}}$ omejena po prvi trditvi iz osnovnih lastnosti Fouriereve transformacije.

Inverzna Fouriereva transformacija

Eksponentna funkcija

Ključno vlogo igra funkcija $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g_0(x) = e^{-x^2/2}$. Velja:

$$\hat{g}_0 = g_0 \qquad \widehat{g_0}_{[a]} = \frac{1}{a} e^{-\left(\frac{x^2}{2a^2}\right)}; a > 0$$

Dokaz

~~$\hat{g}_0 = g_0$~~

Integriramo funkcijo $z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}$ po pozitivno orientiranem robu pravokotnika z oglišči $-A, A, A + i\xi, -A + i\xi$. Ker je $z \mapsto e^{-\frac{z^2}{2}}$ holomorfna na $\mathbb{C}$, je integral po sklenjeni poti po Cauchjevem izreku enak 0. Uporabimo trik.

Po definiciji je:

$$\hat{g}_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} e^{-\frac{\xi^2}{2}} dx = (*)$$

Sedaj vpeljemo novo spremenljivko $z = x + i\xi$, potem integriramo $e^{-\frac{z^2}{2}}$. Ce integriramo teče integral od $-A + i\xi$ do $A + i\xi$. Ker je limita integralov po navpičnicah 0, ko gre $A \to \infty$ dobimo:

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

Torej:

$$(*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

Sedaj se spomnimo da je $(g_0)_{[a]} = g_0(ax)$ in tako dobimo:

$$\widehat{(g_0)_{[a]}}(\xi) = \frac{1}{a} \hat{g}_0\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{1}{a} g_0(\xi) = \frac{1}{a} e^{-\left(\frac{\xi^2}{2a^2}\right)}$$

Aproksimacija s konvolucijami

Naj bo $g \in L^1(\mathbb{R})$ taka, da je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$. Za $\delta > 0$ definiramo:

$$g_{(\delta)} = \frac{1}{\delta} g\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

Tedaj je (uvedemo spremenljivko $t = x/\delta$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{(\delta)}(x)dx = \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{x}{\delta}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$$

Ce je na primer$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ima g zgornjo lastnost (Gaussova). Potem jo ima tudi funkcija $g_{(a)}(x) = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$. Ce ima na primer g kompakten nosilec, ga ima tudi $g_{(\delta)}$.

Trditev [Aproksimacija s konvolucijami]

Naj bo $g \in L^1(\mathbb{R})$ taka, da je $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$

i) Tedaj za vsako omejeno zvezno funkcijo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergirajo funkcije $\left(f * g_{(\delta)}\right)$ proti f enakomerno na vsakem koncnem intervalu $[a, b]$, ko gre $\delta \to 0$.

ii) Za vsako funkcijo $f \in L^1(\mathbb{R})$ konvergirajo funkcije $\left(f * g_{(\delta)}\right)$ proti f v normi prostora $L^1(\mathbb{R})$, ko gre $\delta \to 0$.

V posebnem primeru vidimo, da funkcije $f * g_{(\delta)}$ konvergirajo proti f po točkah, ko gre $\delta \to 0$. Na intervalu je $[a, b]$ konvergenca enakomerna in zato tudi po tockah.

Dokaz

[Mogoče ga dodaš, sicer v zvezku] Uporabi se lastnost enakomerne zveznosti, da se preveri enakomerna konvergenca $f * g_{(\delta)}$ proti f.

Posledica

Za vsako zvezno funkcijo z nosilcem v $[a, b]$ in vsak $\epsilon > 0$ obstaja zaporedje gladkih funkcij f_n z nosilci v intervalu $[a - \epsilon, b + \epsilon]$, ki konvergirajo enakomerno proti f.

Weierstrassov aproksimacijski izrek

Za vsako zvezno funkcijo $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ in vsak $\epsilon > 0$ obstaja polinom $p \in \mathbb{R}[x]$, da $\forall x \in [a, b]$ velja:

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

Izrek pravi, da so polinomi gosti v $(C[a, b], d_\infty)$, kjer je d_∞ sup. metrika.

Dokaz [Ideja]

Uporabimo to prejšnjo trditev in za g vzamemo Gaussovo jedro $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, ki ga razvijemo v Taylorjevo vrsto in vzamemo dovolj pozno delno vsoto. Ta vsota je iskani polinom.

Inverzna formula za Fourierevo transformacijo

Za $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ velja:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi\,; \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

i) To formulo lahko zapišemo kot $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$

ii) S predpisom:

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

za $f \in L^1(\mathbb{R})$ je podana **inverzna Fourierova transformacija**.

iii) Zgornja formula ima smisel, ker je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

Opomba

Ce je tu $f \in L^1(\mathbb{R})$, ki ni nujno Schwartzeva funkcija in če je se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, potem se vedno velja:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

za **skoraj vse $x \in \mathbb{R}$.** To pomeni, da enakost ne velja na množici z Lebeguesovo mero 0 (npr. števne množice). Ce se funkciji ujemata povsod razen na množici z ničelno mero in sta obe v $L^1(\mathbb{R})$, potem se tudi integrala ujemata. To v praksi pomeni, da po navadi te funkcije enačimo.

Dokaz [Inverzne formule]

Glavna ideja: Iz $\hat{f}$ pod integralom želimo dobiti f (brez strehe). Dodali bomo funkcijo g, na katero bo ta streha prešla (kot per partes, ki prestavi odvod, samo to ***ni*** per partes). Veljati mora $g \in L^1(\mathbb{R})$.
Vzamemo:

$$g(\xi) = e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2}; a > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i(x-t)\xi}e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2}dt=$$

ker sta integrala absolutno konvergentna, lahko zamenjamo vrstni red pri integraciji:

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t-x)\xi}e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2}d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\widehat{(g_0)}_{[a]}(t-x)dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\widehat{(g_0)}_{[a]}(x-t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{1}{a}e^{-\frac{(x-t)^2}{2a^2}}dt=$$

Uvedemo novo spremenljivko $y=x-t$:

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\frac{1}{a}e^{-\frac{y^2}{2a^2}}dy=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)(g)_{[a]}(y)dy=(f*g_{[a]})(x)$$

Torej smo dokazali:

$$\left(f*g_{[a]}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}e^{-\frac{1}{2}a^2\xi^2}d\xi$$

Sedaj pošljemo $a\to 0$. Ker je $\hat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\subseteq L^1(\mathbb{R})$, se da dokazati, da desna stran konvergira proti:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

Leva stran pa po trditvi o aproksimaciji s konvolucijami konvergira proti $f(x)$ ∎.

Riemann-Lebesgueova lema

Za funkcijo $f\in L^1(\mathbb{R})$ velja:

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi)=0$$

Dokaz

Naj bo f najprej $f=\chi_{[a,b]}$. Tedaj je:

$$\left|\hat{f}(\xi)\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-i\xi x}dx\right|=\left|\frac{e^{-ib\xi}-e^{-ia\xi}}{-\sqrt{2\pi}i\xi}\right|\leq\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{|\xi|}\to 0;(|\xi|\to\infty)$$

Ker je Fouriereva transformacija linearna, trditev velja tudi v primeru, ko je f oblike:

$$f=\lambda_1\chi_{[a_1,b_1]}+\cdots+\lambda_n\chi_{[a_n,b_n]}$$

Naj bo sedaj $f\in C_c(\mathbb{R})$. Tedaj je f ničelna izven $[a,b]$. Ker je f enakomerno zvezna na $[a,b]$, za $\epsilon>0$ obstaja taka delitev $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, da je:

$$|f(t)-f(t')|<\frac{\epsilon}{b-a}$$

če sta t in t' v istem delitvenem intervalu.

Izberemo $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ in definiramo:

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\chi_{[x_{j-1},x_j]}$$

Izračunajmo:

$$\|f - s\|_1 = \int_a^b |f(x) - s(x)|dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - s(x)|dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(x) - f(t_j)|dx$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a}(x_j - x_{j-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}\left((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})\right) = \epsilon$$

Zapišemo:

$$f = f - s + s$$

Ker je

$$|\hat{f}(\xi)| = |(\widehat{f - s + s})(\xi)| = |(\widehat{f-s})(\xi) + \hat{s}(\xi)| \leq |(\widehat{f-s})(\xi)| + |\hat{s}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f - s\|_1 + |\hat{s}(\xi)|$$
$$\leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} + |\hat{s}(\xi)|$$

Ker za s velja trditev, obstaja tak $M > 0$, da je $|\hat{s}(\xi)| < \epsilon$, ce je $|\xi| \geq M$. Za tak ξ velja:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \epsilon\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

Zato tudi f zadošča Riemann-Lebesgueovi lemi. Ce je $f \in L^1(\mathbb{R})$ poljubna, najdemo tako funkcijo $s \in C_c(\mathbb{R})$, da je $\|f - s\|_1 < \epsilon$. Tedaj po zgoraj dokazanem obstaja tak $M' > 0$, da velja:

$$|\hat{s}(\xi)| < \epsilon; |\xi| \geq M'$$

To pomeni:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |(\hat{f} - \hat{s})(\xi)| + |\hat{s}(\xi)| \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} + \epsilon \qquad \blacksquare$$

Plancheretov izrek

Fouriereva transformacija $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ slika L^1 funkcije v zvezne funkcije, ki gredo proti 0 v neskončnosti (glej Riemann-Lebesgueovo lemo). Po drugi strani pa velja:

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}); \;\; f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Ce opremimo $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ z $\|\cdot\|_1$, je zaradi $C_c(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gost v $L^1(\mathbb{R})$. Zato bi načeloma $\mathcal{F}$ razsirili po zveznosti na $L^1(\mathbb{R})$ ampak s tem ne bi dobili nič novega. Radi bi razširili na nekaj drugega.

Lema
Fouriereva transformacija $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ je bijektivna.

Dokaz

Ce je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}, \hat{\hat{f}}, \hat{\hat{\hat{f}}}, \dots \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Inverzna formula pravi $\mathcal{F}^2(f)(x) = f(-x)$. Ce je $g = \mathcal{F}^2(f)$:

$$(\mathcal{F}^2 g)(x) = g(-x) \Rightarrow \mathcal{F}^4(f)(x) = \mathcal{F}^2(f)(-x) = f\big(-(-x)\big) = f(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^4 = Id$$

Ce je $a \circ b = Id$ potem je a surjektivna in b injektivna. Iz tega sledita **surjektivnost** $\mathcal{F} \circ (\mathcal{F}^3)$ in **injektivnost** $\mathcal{F}^3 \circ \mathcal{F}$. Iz tega sledi, da je $\mathcal{F}$ **bijektivna** ∎.

Skalarni produkt na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Definirajmo:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx\,; \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Preslikava $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je dobro definiran skalarni produkt na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Dokaz [Dobra definiranost]
Dokažimo, da integral konvergira absolutno. Upoštevamo, da sta $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ in sta torej omejeni:

$$\left|f(x)\overline{g(x)}\right| < \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2) < \frac{M}{2}(|f(x)| + |g(x)|)$$

Ker $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ integral konvergira in zato nas integral konvergira absolutno ∎.

Norma in pripadajoča metrika

Ker je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

norma na $\mathcal{S}$ $(\mathbb{R})$. Pripadajoča metrika je definirana kot:

$$d_2(f, g) = \|f - g\|_2$$

Trditev [Fouriereva transformacija ohranja skalarni produkt]
Za $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ velja:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

Ce je $g = f$ dobimo:

$$\|f\|_2 = \left\|\hat{f}\right\|_2 \quad d_2(f, g) = \|f - g\|_2 = \left\|\widehat{f - g}\right\|_2 = \left\|\hat{f} - \hat{g}\right\|_2 = d_2\big(\hat{f}, \hat{g}\big)$$

Zato je Fouriereva transformacija na $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ **bijektivna izometrija**.

Dokaz

Za dokaz uporabimo inverzno Fourierevo transformacijo:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\xi)e^{\imath x\xi}}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \langle \hat{f},\hat{g}\rangle \quad \blacksquare$$

Hilbertov prostor

Ce je $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ prostor s skalarnim produktom, potem ga opremimo z normo $\|v\| = \langle v,v\rangle$ oz. metriko podano z normo $d(u,v) = \|u-v\|$. Ce je (V,d) **poln metrični prostor**, potem je $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ **Hilbertov prostor**.

Unitarni operator

Unitarni operator $U: H \to H$, kjer je H Hilbertov prostor, je tak operator (linearna preslikava) za katero velja:

$$U^*U = UU^* = I_H$$

Oz. Ekvivalentno je, da je U surjektiven in $\langle Ux,Uy\rangle = \langle x,y\rangle;\ \forall x,y \in H$
Oz. Ekvivalentno je, da je U surjektiven in $\|Ux\| = \|x\|;\ \forall x \in H$.

Prostor $L^2(\mathbb{R})$

Prostor $L^2(\mathbb{R})$ definiramo kot napolnitev prostora glede na d_2 definirano kot:

$$d_2(f,g) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-g(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ali so Schwartzove funkcije vsebovane v $L^2(\mathbb{R})$?

Vemo $C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$. Kaj pa $C_c(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$?

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists M > 0$, da je $|f(x)| \leq \frac{M}{1+x^2} \Rightarrow |f(x)|^2 \leq \frac{M^2}{(1+x^2)^2}$. Ker obstaja $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M^2}{(1+x^2)^2}dx < \infty$, je $f \in L^2(\mathbb{R})$. Torej so $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ **goste** v $L^2(\mathbb{R})$.

Izrek: Plancheretov izrek

Fourierevo transformacijo lahko iz prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ enolicno razsirimo do unitarnega operatorja na Hilbertovem prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Dokaz [Plancheretov izrek]

Naj bo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Definirajmo $\hat{f}$. Naj bo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ki konvergira proti f v $L^2(\mathbb{R})$. Zato je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo. Ker je :

$$\|f_n - f_m\| = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|$$

je $\left(\hat{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo v $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$. Zato obstaja:

$$f_0 = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$$

Definirajmo $\hat{f} = f_0$. Ali je ta definicija dobra?
Naj bo $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neko drugo zaporedje v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ki konvergira proti f. Zato gre $(f_n - g_n) \to 0$. Ker je:

$$\left\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\right\| = \|f_n - g_n\| \to 0$$

in ker je $\hat{f}_n \to f_0$, tudi $\hat{g}_n \to f_0$. Zato je f_0 neodvisen od izbire zaporedja (npr. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$), ki konvergira k f. Tako je naša razširitev definirana s predpisom:

$$\hat{f} = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$$

dobra. Skalarni produkt na $L^2(\mathbb{R})$ definiramo preko limite. Ce sta $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, potem poiscemo zaporedji $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ali $C_c(\mathbb{R})$ taki, da $f_n \to f$ in $g_n \to g$. Definiramo:

$$\langle f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle$$

To je dobro definiran skalarni produkt na $L^2(\mathbb{R})$, ki porodi polno metriko d_2. Iz tega sledi, da je $L^2(\mathbb{R})$ **Hilbertov prostor**.
Preverimo ali Fouriereva transformacija ohranja ta skalarni produkt:

$$\underline{\left\langle \hat{f}, \hat{g}\right\rangle = \langle f, g\rangle; \quad f, g \in L^2(\mathbb{R})}$$

$$\left\langle \hat{f}, \hat{g}\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle \hat{f}_n, \hat{g}_n\right\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle f_n, g_n\rangle = \langle f, g\rangle$$

Preverimo se surjektivnost:

$$\underline{\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})}$$

Ce je $f \in L^2(\mathbb{R})$ obstaja zaporedje funkcij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$, da $f_n \to f$. Tedaj velja:

$$\hat{f}_n \to \hat{f} \Rightarrow \hat{\hat{f}}_n \to \hat{\hat{f}} \Rightarrow \hat{\hat{\hat{f}}}_n \to \hat{\hat{\hat{f}}} \Rightarrow \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}}_n \to \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f_n \to f$$

Tako vidimo, da je $\mathcal{F}^4 = Id$ na $L^2(\mathbb{R})$ in iz tega sledi, da je $\mathcal{F}$ **surjektivna** na $L^2(\mathbb{R})$ ■.