Harmonične funkcije

Dvakrat zvezno odvedljiva funkcija $u: D \to \mathbb{R}$, kjer je D odprta v $\mathbb{R}^n$, se imenuje **harmonična** na D, če velja:

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$$

Diferencialni operator Δ se imenuje **Laplaceov** operator.

Primer: [Harmonične funkcije na $\mathbb{R}$]

$$u'' = 0 \to u' = A \to u = Ax + B$$

Harmonične funkcije na $\mathbb{R}$ so natanko linearne funkcije.

Radialno simetrična funkcija

Funkcija $u: U \to \mathbb{R}$, kjer je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je **radialno simetrična**, če je vrednost v dani točki odvisna le od razdalje do izhodišča. Torej je u radialno simetrična če velja:

$$u(x) = f(|x|) = f(r); \;\; |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = r$$

Newtonovi potenciali

Vse radialno simetrične rešitve $\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ so oblike:

$$u(x) = \frac{A}{|x|^{n-2}} + B; (n \neq 2)$$

$$u(x) = A \ln|x| + B; (n = 2)$$

Pri $n = 2$ po navadi izberemo:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$$

V primeru $n \neq 2$ pa izberemo:

$$u(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

kjer je ω_n **površina enotske sfere v $\mathbb{R}^n$**:

$$\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Tako definirane funkcije se imenujejo **Newtonovi potenciali**.

Kaj pa če »premaknemo izhodišče« v x_0?

Potem imamo funkcijo:

$$u(x) = f(|x - x_0|)$$

Vpeljemo:

$$v(x) = u(x + x_0)$$

$$\Rightarrow v(x) = u(x + x_0) = f(|(x + x_0) - x_0|) = f(|x|)$$

Tako smo dobili radialno simetrično funkcijo $v(x)$, ki je oblike kot po prejšnji trditvi:

$$u(x) = v(x - x_0)$$

$$u(x) = \frac{A}{|x - x_0|^{n-2}} + B; \quad (n \neq 2)$$

$$u(x) = A \ln|x - x_0| + B; (n = 2)$$

Harmonične funkcije v ravnini $\mathbb{R}^2$

Povezava s holomorfnimi

Naj bo $f: U \to \mathbb{C}$ holomorfna. Potem je f neskončnokrat odvedljiva.

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Tudi u, v sta neskončnokrat odvedljivi.

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u_y(x, y) - iv_y(x, y)$$

Zato obstajajo u_x, v_x, u_y, v_y. Ce upoštevamo se:

$$f''(z) = u_{xx}(x, y) + iv_{xx}(x, y) = u_{yx}(x, y) - iv_{yx}(x, y)$$

Vidimo, da obstajajo se $u_{xx}, v_{xx}, u_{yx}, v_{yx}$. Podobno obstajajo tudi $v_{yy}, u_{yy}, u_{xy}\ in\ v_{xy}$.

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y) = \frac{\partial}{\partial x}(v_y) - \frac{\partial}{\partial y}(v_x) = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

Tako vidimo, da je u **harmonična** in podobno je tudi v **harmonična**.

Trd. [Povezava med holomorfnimi in harmoničnimi]
Realni in imaginarni del holomorfne funkcije $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{U} \to \mathbb{C}$ sta harmonični funkcij. Na enostavno povezanem območju v ravnini $\mathbb{R}^2$ je vsaka harmonična funkcija realni del kake holomorfne funkcije.

Ce je $u: U \to \mathbb{R}$ harmonicna in je W odprti krog okoli točke (x, y), ki lezi v U. Ker je W enstovano povezano obmocje, obstaja holomorfna funkcija $f: W \to \mathbb{C}$, da je $\mathrm{Re}(f) = u$. Tako lahko gledamo W v kompleksnem preko preslikave $z = x + iy \mapsto (x, y)$.

Dokaz:
Naj bo D enostavno povezano obmocje v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $u: D \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija. Torej velja $u_{xx} + u_{yy} = 0$ na D. Iščemo taksen $v: D \to \mathbb{R}$, da je $f = u + iv$ **holomorfna** na $D \subseteq \mathbb{C}$. Vpeljemo novi funkcij:

$$M = -u_y \qquad N = u_x$$

Poglejmo polje $F(x, y) = \big(M(x), N(y)\big)$ in definirajmo:

$$v(x,y) = \int_\gamma (Mdx + Ndy)$$

Dokažimo, da je ta definicija neodvisna od izbire poti γ od (a,b) do (x,y) [Glej skico]. Ce sta γ_1 in γ_2 dve poti, potem je $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ sklenjena pot. Tako velja:

$$\int_{\gamma_1} (Mdx + Ndy) - \int_{\gamma_2} (Mdx + Ndy) = \int_\gamma (Mdx + Ndy) =$$

Tu uporabimo **Greenovo formulo**:

$$= \iint_C (N_x - M_y) dxdy = \iint_C \left(u_{xx} - (-u_{yy})\right) dxdy = \iint_C \Delta u \, dxdy = 0$$

kjer je C obmocje omejeno s sklenjeno potjo $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$. Pokazali smo, da je dobro definirana. Po izreku iz Matematike III je polje F torej potencialno (neodvisno od poti ipd.) s potencialom v:

$$grad\ v = F \Leftrightarrow v_x = -u_y \quad v_y = u_x$$

Funkciji u in v zadoščata **C-R enačbam**. Po izreku o holomorfnih funkcijah, je funkcija:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

holomorfna, saj sta u, v diferenciabilni. ■

Posledica:
Vsaka harmonična funkcija $u: D \to \mathbb{R}$, kjer je D odrta je neskoncnokrat odvedljiva.

Dokaz:
Naj bo D_1 odprt krog s srediscem v (x,y), ki je v D. Po prejsnji trditvi obstaja holomorfna funkcija $f: D_1 \to \mathbb{C}$, da je $\mathrm{Re}(f) = u$. Zato je u neskoncno krat odvedljiva na D_1 in zato tudi na D ■.

Izrek o povprečni vrednosti

Naj bo $G \subseteq \mathbb{R}^2$ odprta in naj bo $u: G \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija. Naj bo $\overline{D}(a,r) \subseteq G$. Tedaj velja:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(a + re^{i\phi}\right) d\phi$$

Lastnost povprečne vrednosti je za harmonične funkcije karakteristična.

Dokaz:
Naj bo $\overline{D}(a,r) \subseteq D(a,R) \subseteq G$. Obstaja holomorfna funkcija:

$$f: D(a,R) \to \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(f) = u$$

Po Cauchyjevi formuli za f velja:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi =$$

Vpeljemo parametrizacijo $\xi = a + re^{i\phi}$ in dobimo:

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(a + re^{i\phi}\right)}{re^{i\phi}} ire^{i\phi} d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\phi}\right) d\phi$$

Sedaj upoštevamo se $f = u + iv$:

$$u(a) + i(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(u\left(a + re^{i\phi}\right) + iv\left(a + re^{i\phi}\right)\right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(a + re^{i\phi}\right) d\phi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} iv\left(a + re^{i\phi}\right) d\phi$$

Ce izenačimo realna dela dobimo ravno izrek ■.

Princip minima in maksima za harmonične funkcije

Nekonstantna harmonična funkcija u na obmocju D ne more zavzeti niti maksima niti minima. Na kompaktni možici K zvezna nekonstantna funkcija u, ki je harmonicna v notrajnjosti K, lahko zavzame svoj maksimum ali minimum le na robu.

Dokaz

Dokazali bomo le princip maksima, saj princip minima za u sledi iz principa maksima za $-u$.

Predpostavimo, da u doseze svoj maksimum v $a \in D$. Naj bo M ta maksimum. Definirajmo množico:

$$U = \{z \in D; u(z) = M\}$$

Vidimo, da je U ne prazna, ker je $a \in U$. Ker je u zvezna, je U zaprta. Dokazali bomo, da je U odprta. Potem bo U nepovezana, odprta in zaprta podmnozica povezane mnozice D in bo veljalo

$$\Rightarrow U = D$$

$$u(z) = M; \forall z \in D$$

Za dokaz odprtosti U izberimo $b \in U$ in poiscemo krog $D(b, R)$, da je vsebovan v U. Dokazali bomo, da je $D(b, R) \subseteq U$. Izberemo $0 < \rho < R$. Dokazali bomo, da je $\partial D(b, \rho) \subseteq U$. Potem bo sledilo:

$$D(b, R)\backslash\{b\} = \bigcup_{\rho<R} \partial D(b, \rho) \subseteq U \Rightarrow D(b, R) \subseteq U$$

Torej izberemo $0 < \rho < R$. Ker je $u(b) = M$ je maksimum u na D in je $u(b) \geq u\left(b + \rho e^{i\phi}\right);\ \forall \phi \in [0,2\pi]$. Integrirajmo to:

$$2\pi u(b) = \int_0^{2\pi} u(b) d\phi \geq \int_0^{2\pi} u\left(b + \rho e^{i\phi}\right) d\phi$$

Po izreku o povprečni vrednosti, sta integral enaka. Zato je:

$$\int_0^{2\pi} \left(u(b) - u\left(b + \rho e^{i\phi}\right)\right) d\phi = 0$$

Ker je $\phi \mapsto \left(u(b) - u\left(b + \rho e^{i\phi}\right)\right) \geq 0$ in zvezna, je $u(b) = u\left(b + \rho e^{i\phi}\right); \forall \phi \in [0,2\pi]$. Dodatna trditev za kompaktno množico sledi iz dejstva, da harmonična funkcija ne doseže ne maksima ne minima v notranjosti ■.

Poissonova formula in Dirichletova naloga

Naj bo $g: \partial D(0,1) \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Iščemo tako zvezno funkcijo $u: \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$, da je $u\big|_{\partial D(0,1)} = g$. V notranjosti pa je harmonična. Temu problemu rečemo **Dirichletova naloga za krog**.

Poissonovo jedro

Poissonovo jedro je funkcija:

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2};\ 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}$$

Velja naslednje:

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right)$$

Oz. če uvedemo $z = re^{i\theta}$ dobimo:

$$P_r(\theta) = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + \bar{z}}{1 - \bar{z}}\right)$$

Lastnosti Poissonovega jedra:

Poissonovo jedro P_r je zvezna funkcija, za katero veljajo naslednje trditve:

i) $P_r > 0$
ii) Funkcija je soda: $P_r = (-\theta) = P_r(\theta)$ in 2π-periodicna
iii) Za $0 \leq \delta \leq \theta \leq \pi$ velja $P_r(\theta) \leq P_r(\delta)$
iv) $\lim_{r \to 1} P_r(0) = \infty$
v) Za vsak $\delta > 0$ je $\lim_{r \to 1} P_r(\theta) = 0$ enakomerna za $\delta \leq |\theta| \leq \pi$

Dokaz

P_r je zvezna povsod, kjer je definirana. Nedefinirana je natanko tedaj, ko je $\cos\theta = \frac{r^2+1}{2r}$. Za $r = 0$ je $P_0(\theta) = 1$ in je zvezna. Za $r > 0$ je $\frac{r^2+1}{2r} \geq 1$. Ker je $\frac{r^2+1}{2r} = 1 \Leftrightarrow r = 1$, je P_r definirana na $0 \leq r < 1$ in zato zvezna.

i) $P_r(\theta) > 0$

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - 2r\cos\theta + r^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 + r^2}{2r} > \cos\theta$$

Zadnja neenakost drži za $r \in (0,1)$. Za $r = 0$ je $P_0(\theta) = 1 > 0$. Tako velja lastnost.

ii) Sodost P_r in 2π-periodicnost sledita iz lastnosti kosinusa.

iii) $0 \leq \delta \leq \theta \leq \pi \Rightarrow P_r(\theta) \leq P_r(\delta)$ ker:

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} \leq \frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2}$$

$$1-2r\cos\delta + r^2 \leq 1-2r\cos\theta + r^2$$

$$2r\cos\theta \leq 2r\cos\delta$$

$$\cos\theta \leq \cos\delta$$

Zadnja neenakost drži, saj je kosinus padajoča funkcija na $[0,\pi]$.

iv)

$$\lim_{r\to 1} P_r(0) = \lim_{r\to 1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \lim_{r\to 1}\frac{1+r}{1-r} = \infty$$

v) Fiksirajmo $\delta > 0$. Velja $\lim\limits_{r\to 1} P_r(\delta) = \lim\limits_{r\to 1}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta + r^2} = 0$. Ce je $\pi \geq |\theta| \geq \delta \Rightarrow$ Po iii) sledi $0 < P_r(\theta) < P_r(\delta)$. Ker je $\lim\limits_{r\to 1} P_r(\delta) = 0$, je limita $\lim\limits_{r\to 1} P_r(\theta) = 0$ enakomerno za $0 < \delta \leq |\theta| \leq \pi$ ■

Poissonova formula

Za vsako funkcijo u, ki je harmonicna v $D(0,1)$ in zvezna na zaprtju $\overline{D}(0,1)$ velja:

$$u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\phi)\cdot u(e^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}u(e^{i\theta})\,d\theta$$

Za vse $0 \leq r < 1$ in $\phi \in \mathbb{R}$.

Poissonova formula nam nakaze, kako rešimo Dirichletovo nalogo. Ce rešitev Dirichletove naloge obstaja, potem po Poissonovi formuli velja:

$$u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}g(e^{i\theta})d\theta$$

Potrebno je dokazati enoličnost rešitve, harmoničnosti v $D(0,1)$ in zveznost na $\overline{D}(0,1)$.

Dokaz [Poissonove formule]

Najprej predpostavimo, da je u harmonicna na neki odprti okolici okoli $\overline{D}(0,1)$. Tedaj obstaja holomorfna f na odprti okolici od $\overline{D}(0,1)$, da je $u = \mathrm{Re}(f)$. Po Cauchyjevi formuli velja:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{1-\bar{\xi}z}\cdot\frac{d\xi}{\xi} \qquad (*)$$

Ker je $|z| < 1$, je funkcija $\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{1-\bar{\xi}z}$ holomorfna v okolici zaprtega kroga $\overline{D}(0,1)$ (Pravzaprav je holomorfna na $D\left(0,\frac{1}{|z|}\right)$). Po Cauchyjevem izreku velja:

$$\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{1-\bar{z}\xi}d\xi = 0$$

Zato je:

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(\xi)\left(\frac{1}{1-\bar{z}\xi}-1\right)\cdot\frac{d\xi}{\xi}=\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{f(\xi)}{1-\bar{z}\xi}d\xi=0 \quad (**)$$

Skupaj seštejemo $(*)$ in $(**)$:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}f(\xi)\left(\frac{1}{1-\bar{\xi}z}+\frac{1}{1-\bar{z}\xi}-1\right)\frac{d\xi}{\xi}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}f(\xi)\frac{1-|z|^2}{|1-\bar{z}\xi|^2}\frac{d\xi}{\xi}$$

Sedaj uvedemo $z=re^{i\phi}; r\in[0,1)$ in $\xi=e^{i\theta};\ \theta\in[0,2\pi]$:

$$f\left(re^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}f\left(re^{i\theta}\right)\frac{1-r^2}{\left|1-re^{i(\theta-\phi)}\right|^2}\,d\theta\,\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(re^{i\theta}\right)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}d\theta$$

Vzamemo realni del in dobimo Poissonovo formulo za harmonično funkcijo u definirano na odprti okolici kroga $\overline{D}(0,1)$.

Splošnejše: Naj bo $\rho\in(0,1)$. Definirajmo funkcijo $u_\rho(z)=u(\rho z)$. Ker je u harmonicna na $D(0,1)$, je u_ρ harmonična na $D\left(0,\frac{1}{\rho}\right)$. Po zgornjem primeru za vsak $\rho\in(0,1)$ velja:

$$u_\rho\left(re^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-\phi)\,u_\rho\left(e^{i\theta}\right)d\theta;\ \ \forall r\in[0,1),\forall\phi\in[0,2\pi]$$

$$\Rightarrow u\left(r\rho e^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-\phi)u\left(\rho e^{i\theta}\right)d\theta$$

Ker je u (enakomerno) zvezna na $\overline{D}(0,1)$, ko posljemo $\rho\to1$, dobimo v limiti:

$$u\left(re^{i\phi}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta-\phi)u\left(e^{i\theta}\right)d\theta \qquad \blacksquare$$

Posledica:

Za Poissonovo jedro velja:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta=1$$

To dokažemo tako, da izberemo $u\equiv1$ in $\phi=0$, ter vstavimo v Poissonovo formulo.

Rešitev Dirichletovega problema

Naj bo g zvezna na $\partial D(0,1)$. Tedaj obstaja natanko ena zvezna funkcija u na $\overline{D}(0,1)$, ki je harmonicna v $D(0,1)$ in zadošča $u\big|_{\partial D(0,1)}=g$.

Dokaz [Enoličnost rešitve problema]

Recimo, da sta u_1 in u_2 resitvi Dirichletovega problema. Potem je $\Delta u_1=\Delta u_2=0$ na $D(0,1)$ in $u_1\big|_{\partial D(0,1)}=u_2\big|_{\partial D(0,1)}=g$. Definirajmo $u=u_1-u_2$. Zanjo velja, da je zvezna na $\overline{D}(0,1)$, harmonicna na $D(0,1)$ in $u\big|_{\partial D(0,1)} = 0$. Ker je krog kompakten sta minimum in maksimum funkcije u dosežena na robu $\partial D(0,1)$. Ker je $u\big|_{\partial D(0,1)} = 0$, je $u \equiv 0$ povsod. Zato velja $u_1 = u_2$.

Dokaz[Harmoničnost in zveznost]

Definirajmo u:

$$u(z) = g(z); \quad z \in \partial D(0,1)$$

$$u(z) = u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi) g(e^{i\theta}) d\theta \,; z \in D(0,1)$$

Dokazati moramo, da je $u\big|_{\partial D(0,1)} = g$, u je harmonicna na $D(0,1)$ in u je zvezna na $\overline{D}(0,1)$. Prva lastnost velja po konstrukciji/definiciji.

Harmoničnost:

$$u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi) g(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{1 + re^{i(\theta-\phi)}}{1 - re^{i(\theta-\phi)}}\right) g(e^{i\theta}) d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + re^{i\phi}}{e^{i\theta} - re^{i\phi}} g(e^{i\theta})\, d\theta$$

Vpeljemo $f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} g(e^{i\theta}) d\theta$, ki je holomorfna na $D(0,1)$ (Po domači nalogi.). Ker je $u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(f(re^{i\phi})\right)$ je u **harmonična** na $D(0,1)$ in je zato tudi **zvezna** na $D(0,1)$.

Zveznost na robu:

Najprej dokažimo $\lim_{r\to 1} u(re^{i\phi}) = g(e^{i\phi})$

$$|u(re^{i\phi}) - g(e^{i\phi})| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi)\left(g(e^{i\theta}) - g(e^{i\phi})\right) d\theta\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi)|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\phi})| d\theta$$

Ker je g enakomerno zvezna $\forall \epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja:

$$|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\phi})| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ce je $|\theta - \phi| < \delta$. Integral razdelimo na dva integrala. Prvi teče od $[\phi - \delta, \phi + \delta]$, drugi pa po njegovem komplementu v $[0,2\pi]$.

1. <u>Integral:</u>

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} P_r(\theta - \phi)|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\phi})| d\theta \leq \frac{\epsilon}{4\pi}\int_{\phi-\delta}^{\phi+\delta} P_r(\theta - \phi) d\theta \leq \frac{\epsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - \phi) d\theta$$
$$= \frac{\epsilon}{4\pi}\, 2\pi = \frac{\epsilon}{2}$$

2. Integral:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\phi|\geq\delta} P_r(\theta-\phi)\,\left|g\left(e^{i\theta}\right)-g\left(e^{i\phi}\right)\right|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-\phi)2M\,d\theta$$

Kjer 2 sledi iz trikotniške neenakosti $|a+b| = \left||a|\right| + \left||b|\right| = M + M$ in je $M = \max_{\partial D(0,1)}|g|$. Zato je:

$$\leq \frac{M}{\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\delta)d\theta = 2MP_r(\delta) < \frac{\epsilon}{2}$$

Ker velja $\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = 0$, je $2MP_r(\delta) < \epsilon/2$, ce je r dovolj blizu 1. Zato za r blizu 1 velja:

$$\left|u\left(re^{i\phi}\right) - g\left(e^{i\phi}\right)\right| < \epsilon$$

Zveznost v $e^{i\phi}$:

$$\left|g\left(e^{i\phi}\right) - u\left(re^{i\psi}\right)\right| \leq \left|g\left(e^{i\phi}\right) - g\left(e^{i\psi}\right)\right| + \left|g\left(e^{i\psi}\right) - u\left(re^{i\psi}\right)\right|$$

Ker je g zvezna obstaja tak $\delta > 0$, da je $\left|g\left(e^{i\phi}\right) - g\left(e^{i\psi}\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}$ za $|\phi - \psi| < \delta$. Za drugi izraz uporabimo zgornje (??). ■

Harmonične funkcije v $\mathbb{R}^3$

Radialno simetrične funkcije

V $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ so **radialno simetrične harmonične funkcije** natanko oblike:

$$u(x) = \frac{A}{|x|} + B;\ \ |x| = \|x\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r, A, B \in \mathbb{R}$$

Izberimo $B = 0$ in $A = -1/4\pi$. Tako dobimo:

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi r} = -\frac{1}{4\pi|x|};\ \ r > 0$$

Ta funkcija se imenuje **osnovna (fundamentalna) rešitev** Laplaceove enačbe. S koordinatami jo lahko zapišemo kot:

$$u(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Podobno (kot že vemo) so funkcije $x \mapsto \frac{1}{\|x-x_0\|}$ harmonične na $\mathbb{R}^3\backslash\{x_0\}$.

Normala in normalni odvod

Naj bo D odprta, povezana in omejena mnozica v $\mathbb{R}^3$, katere rob je ploskev razreda C^1. Ploskev v okolici vsake točke opišemo z zvezno odvedljivo vektorsko funkcijo $\vec{r} = \vec{r}(t,s)$, pri cemer parametra (t,s) tečeta po nekem ravninskem območju, tako, da vedno velja:

$$\vec{r}_t \times \vec{r}_s \neq 0$$

Enotsko navezen usmerjeno normalo v točki $\vec{r}$ označimo z $\vec{n}(\vec{r})$ oz. $\vec{n}$ (če je jasno katera točka je mišljena). Naj bo $\vec{F}$ zvezno odvedljivo vektorsko polje na $\overline{D} = D \cup \partial D$ (rob je naša ploskev).

Takrat po Gaussovem izreku velja:

$$\iint_{\partial D} \vec{F} d\vec{S} = \iiint_D div\, \vec{F} dV$$

Ponovitev:

$$\iint_{\partial D} \vec{F} d\vec{S} = \iint_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_A (\vec{F} \cdot \vec{n}) \sqrt{EG - F^2} dudv$$

$$grad\, F(\vec{r}) = \nabla F(\vec{r}) = \left(F_x(\vec{r}), F_y(\vec{r}), F_z(\vec{r})\right)$$

$$div\, \vec{F}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{r}) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{r}) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\vec{r}); \vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

Normalni (v smeri normale) odvod zvezno odvedljive funkcije u v točki $\vec{r}$ ploskve ∂D je definiran kot:

$$\partial_{\vec{n}} u(\vec{r}) = \nabla u(\vec{r}) \cdot \vec{n}(\vec{r})$$

[Primer v zvezku normalnega odvoda na krogli]

Greenove identitete

Za poljubni dvakrat zvezno odvedljivi funkciji u, v na kaki zaprti okolici mnozice D vejajo naslednje <u>**Greenove identitete**</u>:

i)

$$\iint_{\partial D} v \cdot \partial_{\vec{n}} u\, dS = \iiint_D (v \cdot \Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dV$$

ii)

$$\iint_{\partial D} (v\, \partial_{\vec{n}} u - u\, \partial_{\vec{n}} v)\, dS = \iiint_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dV$$

iii) Za vsak $\vec{r}_0 \in D$ velja:

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \left[\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}\, \partial_{\vec{n}} u(\vec{r}) - u(\vec{r})\, \partial_{\vec{n}} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}\right)\right] dS - \iiint_D \frac{\Delta u}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}\, dV$$

Dokaz [1. identiteta]

$$v \cdot \partial_{\vec{n}}\, u = v \cdot (\nabla u \cdot \vec{n}); \quad d\vec{S} = \vec{n} dS$$

Uporabimo Gaussov izrek:

$$\Rightarrow \iint_{\partial D} v\, \partial_{\vec{n}} u\, dS = \iint_{\partial D} v \cdot \nabla u\, d\vec{S} = \iiint_D \nabla \cdot (v \cdot \nabla u)\, dV = (*)$$

$$v \cdot \nabla u = v \cdot (u_x, u_y, u_z)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (v \cdot \nabla u) = (vu_x)_x + (vu_y)_y + (vu_z)_z = (v_x u_x + vu_{xx}) + (v_y u_y + vu_{yy}) + (v_z u_z + vu_{zz})$$
$$= (v_x u_x + v_y u_y + v_z u_z) + (vu_{xx} + vu_{yy} + vu_{zz}) = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u$$

$$(*) = \iiint_D (v \cdot \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)\, dV$$

Dokaz [2. identiteta]

Zamenjamo vlogo u in v v prvi identiteti in odštejemo od prve.

Dokaz [3. identiteta]

Uporabimo 2. identiteto v primeru funkcije $v(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$ za obmocje $D\setminus\overline{K}(\vec{r}_0,\delta)$. Krajse ta izrez pisemo kot $K(\vec{r}_0,\delta) = K_\delta$. Seveda izberemo tak $\delta > 0$, da je $\overline{K}_\delta \subseteq D$. Iz 2. identitete dobimo:

$$\iint_{\partial(D\setminus K_\delta)} (u\,\partial_{\vec{n}}v - v\,\partial_{\vec{n}}u)dS = \iiint_{D\setminus K_\delta} (v\Delta u - u\Delta v)dV =$$

Sedaj upoštevamo, da je v harmonicna na $\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{r}_0\} \Rightarrow \Delta v = 0$

$$= \iiint_{D\setminus K_\delta} v\Delta u\, dV$$

Integral lahko razdelimo (negativen predznak zaradi drugačno orientirane normale delčka, ki ga izrežemo):

$$\Rightarrow \iint_{\partial D} (u\,\partial_{\vec{n}}v - v\,\partial_{\vec{n}}u)\,dS - \iint_{K_\delta} (u\,\partial_{\vec{n}}v - v\,\partial_{\vec{n}}u)\,dS = \iiint_D v\Delta u\,dV - \iiint_{K_\delta} v\Delta u\,dV$$

Naredili bomo limito $\delta \to 0$. Spomnimo se parametrizacij krogle K_δ in sfere ∂K_δ:

Krogla: $\phi \in [0,2\pi], \rho \in [0,\delta], \theta \in [0,\pi], |\det J| = \rho^2 \sin\theta$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho\cos\phi\sin\theta \\ y &= y_0 + \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= z_0 + \rho\cos\theta \end{aligned}$$

Sfera: $\sqrt{EG - F^2} = \delta^2 \sin\theta$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \delta\cos\phi\sin\theta \\ y &= y_0 + \delta\sin\phi\sin\theta \\ z &= z_0 + \delta\cos\theta \end{aligned}$$

Tako lahko integriramo:

$$\iiint_{K_\delta} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\delta \frac{1}{\rho}\Delta u\,\rho^2\sin\theta\;d\rho \to 0; (\delta \to 0)$$

In:

$$\iint_{\partial K_\delta} v\,\partial_{\vec{n}}u\,dS = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{\delta}\partial_{\vec{n}}u\,\delta^2\sin\theta\,d\phi \to 0; (\delta \to 0)$$

Zato je:

$$\iint_{\partial D} (u\,\partial_{\vec{n}}v - v\,\partial_{\vec{n}}u)\,dS = \lim_{\delta\to 0} \iint_{\partial K_\delta} u\,\partial_{\vec{n}}v\,dS = \iiint_D v\cdot\Delta u\,dV$$

Dokazati moramo le se:

$$4\pi u(\vec{r}_0) = \lim_{\delta\to 0} \iint_{\partial K_\delta} u \cdot \partial_{\vec{n}} v \, dS$$

Prej smo izračunali (primer v zvezku) da je normalni odvod funkcije $1/\|\vec{r}-\vec{r}_0\|$ enak $-1/\delta^2$. V temu primeru pride se en minus zraven, ker normala kaze v notranjost.

$$\left| \iint_{\partial K_\delta} u \, \partial_{\vec{n}} v dS - 4\pi u(\vec{r}_0) \right| = \left| \iint_{\partial K_\delta} \frac{u(\vec{r})}{\delta^2} dS - 4\pi u(\vec{r}_0) \right| =$$

Ker je $4\pi\delta^2$ ravno površina sfere K_δ je $4\pi = \frac{1}{\delta^2} \iint_{\partial K_\delta} dS$

$$= \left| \iint_{\partial K_\delta} \left(\frac{u(\vec{r})}{\delta^2} - \frac{u(\vec{r}_0)}{\delta^2} \right) dS \right| \leq \frac{1}{\delta^2} \iint_{\partial K_\delta} |u(\vec{r}) - u(\vec{r}_0)| \, dS =$$

Ker je u zvezna (enakomerno?) obstaja tak $\delta_1 > 0$, da je $|u(\vec{r}) - u(\vec{r}_0)| < \epsilon$, če je $|\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta_1$. Naj bo $0 < \delta < \delta_1$. Potem je:

$$\leq \frac{1}{\delta^2} \iint_{\partial K_\delta} \epsilon dS = \frac{\epsilon 4\pi\delta^2}{\delta^2} = 4\pi\epsilon$$

In tako po definiciji limite velja:

$$\lim_{\delta\to 0} \iint_{\partial K_\delta} u \, \partial_{\vec{n}} v \, dS = 4\pi u(\vec{r}_0) \quad \blacksquare$$

Posledica:

Za vsako harmonično funkcijo u na okolici množice $\overline{D}$ velja:

$$\iint_{\partial D} \partial_{\vec{n}} u \, dS = 0$$

To dokažemo tako, da uporabimo 1. identiteto za funkcijo $v = 1$ in upostevamo, da je u harmonicna.

Izrek o povprečju

Naj bo u harmonicna funkcija na območju D. Naj bo $\vec{r}_0 \in D$ in $R > 0$ tak, da je zaprta krogla $\overline{K}(\vec{r}_0, R)$ vsebovana v D. Potem je:

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial K(\vec{r}_0, R)} u(\vec{r}) dS$$

Dokaz

Uporabimo 3. Greenovo identiteto za kroglo $K(\vec{r}_0, R)$:

$$u(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial K} \left[\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \, \partial_{\vec{n}} u - u(\vec{r}) \, \partial_{\vec{n}} \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} \right) \right] dS - \frac{1}{4\pi} \iiint_K \frac{\Delta u}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} dV$$

Tu za prvi člen v prvem integralu upoštevamo prejšnjo posledico. V zadnjem integralu pa upoštevamo, da je u harmonicna in je $\Delta u = 0$. Tako dobimo ravno izrek $\blacksquare$.

Princip maksima in minima

Nekonstantna harmonična funkcija na območju $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ne more zasesti v D niti maksima niti minima. Na kompaktni množici $K \subseteq \mathbb{R}^3$ zvezna funkcija na okolici K, ki je harmonicna v notranjosti K, zavzame svoj maksimum in minimum na robu K.

Dokaz:

Dokaz je povsem enako kot v primeru $\mathbb{R}^2$.

Dirichletov problem in Greenova funkcija

Naj bo D omejeno območje z gladkim robom. Naj bo $f: \partial D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Iščemo tako zvezno funkcijo $u: \overline{D} \to \mathbb{R}$,da je:

i) $u\big|_{\partial D} = f$
ii) $\Delta u = 0$ na D

Poglejmo najprej posebni primer, ko je $f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$, pri čemer je $\vec{r}_0 \in D$. Ker je $\vec{r}_0 \in D$, je f zvezna na ∂D. Recimo, da znamo rešiti zgornji Dirichletov problem v tem posebnem primeru. Naj bo $v(\vec{r},\vec{r}_0)$ rešitev tega posebnega Dirichletovega problema. To pomeni, da je v harmonicna na D in:

$$v(\vec{r},\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}; \forall \vec{r} \in \partial D$$

Uporabimo 2. Greenovo identiteto za v in poljubno harmonično funkcijo u. Dobimo:

$$\iint_{\partial D} \left(u(\vec{r}) \partial_{\vec{n}} v(\vec{r},\vec{r}_0) - \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|} \, \partial_{\vec{n}} u(\vec{r}) \right) dS = 0$$

Uporabimo se 3. Greenovo identiteto:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}_0) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \left[\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|} \partial_{\vec{n}} u(\vec{r}) - u(\vec{r}) \, \partial_{\vec{n}} \left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|} \right) \right] dS \\ &= \iint_{\partial D} u(\vec{r}) \partial_{\vec{n}} v(\vec{r},\vec{r}_0) \, dS - \iint_{\partial D} \frac{1}{4\pi} u(\vec{r}) \partial_{\vec{n}} \left(\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_0\|} \right) dS \\ &= \iint_{\partial D} u(\vec{r}) \left(\partial_{\vec{n}} \left(v(\vec{r},\vec{r}_0) - \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|} \right) \right) dS \; = (*) \end{aligned}$$

Funkcija:

$$G(\vec{r},\vec{r}_0) = v(\vec{r},\vec{r}_0) - \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$$

se imenuje **Greenova funkcija** za območje D. Obstoj Greenove funkcije za splošno območje je težko dokazati. Ce Greenova funkcija obstaja, potem je ena sama.

Funkcija:

$$\partial_{\vec{n}} G(\vec{r},\vec{r}_0)$$

ki je definirana na $\partial D \times D$ se imenuje **Poissonovo jedro** (roza obarvano). $(*)$ pa je **Poissonova formula**.

Lastnosti Greenove funkcije

i) $\vec{r} \mapsto G(\vec{r}, \vec{r}_0) + \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}$ je harmonična na D in zvezna na $\overline{D}$.

ii) Za $\vec{r} \in \partial D$ je $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0$

Enoličnost Greenove funkcije

Recimo, da sta G_1 in G_2 Greenovi funkciji. Sedaj tvorimo funkcijo $G = G_1 - G_2$:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = G_1(\vec{r}, \vec{r}_0) - G_2(\vec{r}, \vec{r}_0) = \left(G_1(\vec{r}, \vec{r}_0) + \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\right) - \left(G_2(\vec{r}, \vec{r}_0) + \frac{1}{4\pi\|\vec{r}-\vec{r}_0\|}\right)$$

$\Rightarrow G$ je harmonična v $\vec{r} \in D$. Ker je $G_1 \equiv G_2 \equiv 0$ na ∂D v spremenljivki $\vec{r} \Rightarrow G \equiv 0$ na ∂D v spremenljivki $\vec{r}$.

Ker je G harmonicna na D in 0 na robu, je po principu maksima manjša ali enaka 0 na $\overline{D}$. Podobno po principu minima je večja ali enaka 0. $\Rightarrow G \equiv 0$ je konstantna na $\overline{D}$. Tako dobimo $G_1 = G_2$.

[V zvezku je primer določitve G in Poissonovega jedra za enotsko kroglo]