Holomorfne funkcije

Naj bo $U \subseteq \mathbb{C}$ odprta. Naj bo $f: U \to \mathbb{C}$ funkcija. Ce za $a \in U$ obstaja:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

potem pravimo, da je f **holomorfna v a**, oz. da je **odvedljiva v kompleksnem smislu v točki a**. Zgornjo limito, če obstaja, označimo z $f'(a)$.
Ce pišemo $z = a + h$, potem dobimo ekvivalentno definicijo, ki je bolj poznana:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ce $f'(a)$ obstaja za vsak $a \in U$ potem je f **holomorfna** na U.
Ce je f holomorna na celi kompleksni ravnini oz. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna, potem ji pravimo, da je **cela**.

Primer

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{z^n - a^n}{z - a} = \lim_{z \to a} \frac{(z-a)(z^{n-1} + z^{z-2}a + \cdots + za^{n-2} + a^{n-1}}{z - a}$$
$$= \lim_{z \to a} (z^{n-1} + z^{n-2}a + \cdots + za^{n-2} + a^{n-1}) = na^{n-1}$$

Tudi konstantne funkcije so holomorfne z ničelnim odvodom. Večinoma so neholomorfne tiste preslikave, ki vsebujejo konjugacijo:

$$f(z) = \bar{z}; f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$|f(z) - f(z')| = |\bar{z} - \bar{z'}| = |\overline{z - z'}| = |z - z'|$$

Preslikava ohranja razdaljo, torej je zvezna. Poglejmo če je potem res holomorfna:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\overline{a+h} - \bar{a}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

Tu gre za limito v ravnini. Ce si pogledamo smeri $h = x$ in $h = iy$ vidimo, da je v prvem primeru limita enaka 1 v drugem primeru pa dobimo -1. Torej ta limita <u>**ne**</u> obstaja in funkcija ni holomorfna.

Trditev

Naj bo U odprta v $\mathbb{C}$ in f, g funkciji na U, ki sta holomorfni v $a \in U$:

i) Za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ je λf holomorfna v a in velja $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
ii) Funkcija $f + g$ je holomorfna v a in velja $(f+g)' = f' + g'$
iii) Funkcija $f \cdot g$ je holomorfna v a in velja $(fg)' = f'g + fg'$
iv) Ce $g(a) \neq 0$, potem je $\frac{f}{g}$ holomorfna v a in velja:
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
v) Velja tudi za kompozitum

Polinom in racionalna funkcija

Polinom $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je preslikava oblike $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, kjer so $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. Po zgornji trditvi so vsi polinomi **holomorfni**.

Racionalna funkcija f je funkcija oblike $\frac{p}{q}$, kjer sta p in q polinoma. f je holomorfna povsod razen na <u>končni</u> množici ničel polinoma q.

Cauchy-Riemannove enačbe

$A \subseteq \mathbb{C}; f: A \to \mathbb{C}$, potem za $z \in A$ zapišemo $z = x + iy$. Funkcijo lahko zapišemo kot:

$$f(z) = \mathrm{Re}\big(f(z)\big) + i\,\mathrm{Im}\big(f(z)\big) \leftrightarrow f(z) = \mathrm{Re}\, f(x,y) + i\,\mathrm{Im}\, f(x,y)$$

Tu lahko označimo $\mathrm{Re}\, f(x,y) = u(x,y)$ in $\mathrm{Im}\, f(x,y) = v(x,y)$. Tako dobimo zapis:

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Izrek[Cauchy-Riemannovi enačbi]

Naj bosta $u, v: U \to \mathbb{R}$ realni funkciji na $U \subseteq \mathbb{R}^2$:

i) Ce je $f = u + iv$ holomorfna, potem sta u in v (parcialno) odvedljivi in veljata **Cauchy-Riemannovi enačbi:**

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

ii) Ce sta u in v diferenciabilni in veljata zgornji enakotsti, potem je f **holomorfna** in velja:

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

Dokaz

$i)$

Ce je f holomorfna potem obstaja njen kompleksen odvod:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Izberemo si dve posebni smeri, recimo v smeri realne osi in imaginarne osi:

$$f'(z) = \lim_{h \to 0; h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0; h \in \mathbb{R}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}$$

Ker $f = u + iv$ iz limite po realni osi dobimo:

$$\Rightarrow f'(z) = \lim_{h \to 0; h \in \mathbb{R}} \left[\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\,\frac{v(x+h,y) - v(x.y)}{h}\right]$$

Ta limita obstaja, ko obstajata posamezni limiti ($f'(z)$ obstaja, torej obstajata posamezni limit). To pomeni, da obstajata u_x in v_x in velja:

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$$

Na podoben način lahko iz limite po imaginarni osi dobimo:

$$\Rightarrow f'(z) = \lim_{h \to 0; h \in \mathbb{R}} \left[\frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{ih} + i\,\frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{ih}\right] = \frac{1}{i}\left[u_y(x,y) + iv_y(x,y)\right]$$
$$= v_y(x,y) - i\,u_y(x,y)$$

Te dve limiti sta enaki. Primerjamo le se realna in imaginarna dela:

$$\Rightarrow u_x + iv_x = v_y - iu_y \Rightarrow u_x = v_y \;\; u_y = -v_x$$

$ii)$

Izberemo $z = x + iy \in U$ in $h = h_1 + ih_2$ tako majhen, da je v U. Dokazati moramo, da limita $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ obstaja, in je enaka $u_x(x,y) + iv_x(x,y)$.

Ker sta u in v diferenciabilni, lahko zapišemo:

$$u(x+h_1, y+h_2) = u(x,y) + u_x(x,y)h_1 + u_y(x,y)h_2 + \mathcal{O}_1(h)$$
$$v(x+h_1, y+h_2) = v(x,y) + v_y(x,y)h_1 + v_x(x,y)h_2 + \mathcal{O}_2(h)$$

kjer je $\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{O}_1(h)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{O}_2(h)}{|h|} = 0$

$$f(z+h) - f(z) = u(x+h_1, y+h_2) + iv(x+h_1, y+h_2) - \big(u(x,y) + iv(x,y)\big) =$$
$$= \big(u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y)\big) + i\big(v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y)\big) = (*)$$

Tu sedaj uporabimo zgornja izraza:

$$(*) = \Big(u_x(x,y)h_1 + u_y(x,y)h_2 + \mathcal{O}_1(h)\Big) + i\Big(v_x(x,y)h_1 + v_y(x,y)h_2 + \mathcal{O}_2(h)\Big) = (**)$$

Sedaj uporabimo Cauchy-Riemannovi enačbi:

$$(**) = \big(u_x(x,y)h_1 - v_x(x,y)h_2 + \mathcal{O}_1(h)\big) + i\big(v_x(x,y)h_1 + u_x(x,y)h_2 + \mathcal{O}_2(h)\big) =$$
$$= \big(u_x(x,y) + iv_x(x,y)\big)h_1 + \big(iu_x(x,y) - v_x(x,y)\big)h_2 + \big(\mathcal{O}_1(h) + i\mathcal{O}_2(h)\big) =$$
$$= \big(u_x(x,y) + iv_x(x,y)\big)h_1 + i\big(u_x(x,y) + iv_x(x,y)\big)h_2 + \big(\mathcal{O}_1(h) + i\mathcal{O}_2(h)\big) =$$
$$= \Big(u_x(x,y) + iv_y(x,y)\Big)(h_1 + ih_2) + \mathcal{O}(h)$$

Poglejmo sedaj limito po definiciji:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - (u_x + iv_x)\right| = \left|\frac{\mathcal{O}(h)}{h}\right| = \left|\frac{\mathcal{O}_1(h) + i\mathcal{O}_2(h)}{h}\right| \to^{h\to 0} \quad 0 \ \blacksquare$$

Primer[Konjugacija]

$f(z) = \bar{z}$ ni holomorfna. Ce pišemo $z = x + iy$ dobimo:

$$\Rightarrow f(z) = \bar{z} = x - iy \Rightarrow u(x,y) = x \quad v(x,y) = -y$$

Preverimo C-R enačbe: $u_x = 1 \ \ v_y = -1 \Rightarrow u_x \neq v_y \Rightarrow$ f res **<u>ni</u>** holomorfna.

Lahko si pogledamo se alternativni pristop k C-R enačbam:

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy \Leftrightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Tako lahko preverimo C-R enačbe brez u in v:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Podobno lahko izračunamo se:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Poglejmo za $f = u + iv$ potem:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y)$$

Opazimo zanimivo:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) = 0 \ \Leftrightarrow u_x = v_y \ \ v_x = -u_y$$

To pomeni da je f neodvisna od $\bar{z}$ ko u, v rešita C-R enačbi oz. po domače, f je holomorfna natanko tedaj ko $\bar{z}$ ne nastopa v predpisu za f. Takrat velja

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iv_x + u_x) = u_x + iv_x = f'(z)$$

Konformnost holomorfnih funkcij

Preslikava $f: U_1 \to U_2$ je **konformna**, če ohranja kote med krivuljami

Naj bo $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ (zvezno) odvedljiva pot, ki gre skozi tocko $z_0 \in \mathbb{C}$. Zato obstajata $t_0 \in [0,1]$, da je $z_0 = \gamma(t_0)$. Tangentni vektor na γ v tocki $z_0 = \gamma(t_0)$ je enak $\dot{\gamma}(t_0)$. Naj bo f holomorfna funkcija, na nekem obcmocju, ki vsebuje tir poti γ. Tir od γ ponavadi oznacimo $\gamma^* = [\gamma] = \gamma[0,1]$.

Tedaj je $f \circ \gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$ tudi (zvezno) odvedljiva pot, ki gre skozi točko $f(z_0) = f\big(\gamma(t_0)\big) = (f \circ \gamma)(t_0)$

Trditev

Za tangentni vektor na pot $f \circ \gamma$ v točki $f(z_0)$ velja:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t_0) = f'(z_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0)$$

Dokaz

Točko $x + iy \in \mathbb{C}$ identificiramo s $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Naj bo $f = u + iv$

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Za izračun tangentnega vektorja na pot $f \circ \gamma$ v $f(z_0) = f\big(\gamma(t_0)\big)$ si pomagamo s preslikavo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s predpisom:

$$F(x, y) = \big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

Tangentni vektor na $f \circ \gamma$ v $t_0 \leftrightarrow F \circ \begin{bmatrix}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{bmatrix}$ v t_0:

$$\frac{d}{dt}\left(F \circ \begin{bmatrix}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}u_x & u_y \\ v_x & v_y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2\end{bmatrix} =$$

Tu uporabimo C-R enačbe:

$$= \begin{bmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x\dot{\gamma}_1 - v_x\dot{\gamma}_2 \\ v_x\dot{\gamma}_1 + u_x\dot{\gamma}_2 \end{bmatrix}$$

Zato je $(f \circ \gamma)'(t_0) = u_x(\gamma(t_0))\dot{\gamma}_1(t_0) - v_x(\gamma(t_0))\dot{\gamma}_1(t_0) + iv_x(\gamma(t_0))\dot{\gamma}_1(t_0) + iu_x(\gamma(t_0))\dot{\gamma}_2(t_0) =$
$$= \Big(u_x(\gamma(t_0)) + iv_x(\gamma(t_0))\Big)\big(\dot{\gamma}_1(t_0) + i\dot{\gamma}_2(t_0)\big) = f'(\gamma(t_0))\dot{\gamma}(t_0) = f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0) \ \blacksquare$$

Naj bosta dani odvedljivi poti γ_1 in γ_2, ki se sekata v točki $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$. Kot med tangentnima vektorjem $\dot{\gamma}_1(t_1)$ in $\dot{\gamma}_2(t_2)$ imenujemo **kot med krivuljama v presečišču**. To lahko zapišemo tudi z argumentom:

$$\dot{\gamma}_1(t_1) = |\dot{\gamma}_1(t_1)|e^{i\alpha_1} \quad \dot{\gamma}_2(t_2) = |\dot{\gamma}_2(t_2)|e^{i\alpha_2}$$

Potem je ta kot $\alpha_1 - \alpha_2$.

Izrek

Ce je $f: U_1 \to U_2$ holomorfna in je $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in U_1$, potem je f **konformna**.

Dokaz

Naj bosta γ in δ odvedljivi poti z vrednostmi v U_1, ki se sekata v tocki $z_0 = \gamma(t_0) = \delta(s_0)$, za neka parametra t_0 in s_0. Izračunajmo tangentna vektorja na krivulji $f \circ \gamma$ in $f \circ \delta$ v t_0 in s_0:

$$(f \circ \gamma)' = f'(z_0)\dot{\gamma}(t_0) \quad (f \circ \delta)' = f'(z_0)\dot{\delta}(s_0)$$

Zapišimo:

$$f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i\phi} \quad \dot{\gamma}(t_0) = |\dot{\gamma}(t_0)|e^{i\alpha} \quad \dot{\delta}(s_0) = |\dot{\delta}(s_0)|e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow (f \circ \gamma)'(t_0) = |f'(z_0)||\dot{\gamma}(t_0)|e^{i(\phi+\alpha)}$$
$$\Rightarrow (f \circ \delta)'(s_0) = |f'(z_0)||\dot{\delta}(s_0)|e^{i(\phi+\beta)}$$

Ker je $f'(z_0) \neq 0$, je kot v presečišču enak:

$$(\phi + \alpha) - (\phi + \beta) = \alpha - \beta \quad \blacksquare$$

Potenčne vrste

Potenčna vrsta je formalno podana kot:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \cdots$$

Konvergenca potenčne vrste

Zagotovo ta vrsta konvergira za $z = 0$. Ce vrsta konvergira v z, potem njeno vsoto označimo z $f(z)$. Naj bo $\mathcal{D}$ konvergenčno območje vrste:

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n < \infty \right\}$$

Za $z \in \mathcal{D}$ označimo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Izkaze se, da vrsta konvergira na vsakem zaprtem krogu $\overline{D}(0, r)$, kjer je $r < |z_0|$

Konvergenčno območje potenčne vrste bomo izrazili kot območje $\mathcal{D}$,ki zadosca:

$$D(0,R) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \overline{D}(0,R)$$

Število R imenujemo **konvergenčni polmer/radij.** To seveda velja le, če je $R > 0$.
Izkazalo se bo, da velja **Cauchy-Hademarjeva formula**:

$$\frac{1}{R} = \operatorname{limsup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Število $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} b_n$, kjer je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realno zaporedje, je **»največje« stekališče** zaporedja $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

i) Ce je $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno, potem je <u>množica stekališč ϵ</u> zaporedja (b_n) neprazna in zato obstaja $\sup \epsilon$. Da se videti, da je $\sup \epsilon$ tudi stekališče
ii) Ce je zaporedje navzgor neomejeno, potem je $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} b_n = \infty$
iii) Ce je zaporedje navzgor omejeno in $\epsilon \neq \emptyset$, potem je $\sup \epsilon = \operatorname{limsup}_{n\to\infty} b_n$
iv) Ce je zaporedje navzgor omejeno in $\epsilon = \emptyset$, potem $\operatorname{limsup}_{n\to\infty} b_n = -\infty$

Trditev
Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje realnih števil. Tedaj je $a = \operatorname{limsup}_{n\to\infty} a_n$ natanko takrat, ko velja:

i) $\forall \epsilon > 0$ je $a_n > a + \epsilon$ le za končno mnogo indeksov
ii) $\forall \epsilon > 0$ je $a_n > a - \epsilon$ za neskončno mnogo indeksov

Dokaz (ideja v zvezku)
Izrek (mogoče dobro pogledati sliko)
Dana je potenčna vrsta $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$

i) Potenčna vrsta konvergira absolutno na $D(\alpha, R)$ in enakomerno na vsakemu zaprtemu krogu znotraj tega odprtega kroga.
ii) Potenčna vrsta divergira zunaj $\overline{D}(\alpha, R)$

O konvergenci na robni krožnici izrek ne pove ničesar, zato moramo robne točke posebej preveriti.

Izrek[Odvod potenčne vrste]
Naj bo $R > 0$ konvergencni polmer potenčne vrste $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Potem je f <u>**holomorfna**</u> funkcija na $D(0,R)$. Za njen kompleksni odvod velja:

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = g(z)$$

Odvod potenčne vrste ima isti konvergenčni radij R.

Dokaz
Dokazati moramo $w \in D(0,R)$, potem $f'(w)$ obstaja in $f'(w) = g(z)$ (profesor je označil w, da se ne zmede).

$$g(w) = \lim_{z\to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

Velja $|w| < \rho < R$. Izberimo se z, da je $|z| < \rho < R$.

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{z^n-w^n}{z-w}-nw^{n-1}\right)$$

Ker je :

$$\begin{aligned}\frac{z^n-w^n}{z-w}-nw^{n-1}&=(z^{n-1}+z^{n-2}w+\cdots+zw^{n-2}+w^{n-1})-nw^{n-1}\\&=(z-w)(z^{n-2}+2z^{n-3}w+\cdots+(n-2)zw^{n-3}+(n-1)w^{n-2})\end{aligned}$$

in ker velja:

$$\begin{aligned}\left|\frac{z^n-w^n}{z-w}-nw^{n-1}\right|&=|z-w||z^{n-2}+2z^{n-3}w+\cdots+(n-1)w^{n-2}|\\&\leq|z-w|(|z|^{n-2}+2|z|^{n-3}|w|+\cdots+(n-2)|z|\,|w|^{n-3}+(n-1)|w|^{n-2})\\&\leq|z-w|\rho^{n-2}\big(1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)\big)=|z-w|\rho^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

dobimo, da je:

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right|\leq\frac{1}{2}|z-w|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n(n-1)\rho^{n-2}$$

Preveriti moramo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|n(n-1)\rho^{n-2}$ konvergira.

Vrsta f konvergira na $D(0,R)\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}na_nz^{n-1}$ konvergira na $D(0,R)$.

$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)a_nz^{n-2}$ na $D(0,R)$. Po izreku konvergira celo absolutno. Torej:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)|a_n|\rho^{n-2}=M<\infty$$

$$\Rightarrow\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right|\leq\frac{1}{2}M|zw|$$

Ta ocena gre v limiti proti 0 in iz tega dobimo:

$$\lim_{z\to w}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}=g(w)\quad\blacksquare$$

Posledica

Naj $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n$ konvergira na krogu $D(\alpha,R)$. Potem je f neskoncno mnogo krat odvedljiva v kompleksnem smislu na $D(\alpha,R)$ in velja:

$$a_k=\frac{f^k(\alpha)}{k!};k\in\mathbb{N}_0$$

Eksponentna funkcija in kotne funkcije

Eksponentno funkcijo definiramo kot vsoto vrste:

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Ta predpis razširja realno definicijo eksponentne funkcije. Eksponentna funkcija je **cela**.

$$\sum_{(n=0)}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \to \frac{1}{R} = \text{limsup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \text{limsup}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$$

ker je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ (naraščajoče in navzgor neomejeno zaporedje)

$$\Rightarrow R = \infty$$

Tako e^z obstaja/konvergira za vse $z \in \mathbb{C}$. Po izreku ta vrsta konvergira absolutno na $\mathbb{C}$ in enakomerno na $\overline{D}(0, R)$

Sedaj lahko definiramo se ostale znane elementarne funkcije

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = -i \sin(iz) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \cos(iz) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Tudi te funkcije so **cele**. To so edine holomorfne razširitve funkcij $e^z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z$ na $\mathbb{C}$.

Sinus in kosinus lahko zapišemo z vrstama kot:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

Znotraj konvergenčnega območja (povsod) lahko odvajamo potenčne vrste členoma. Tako dobimo:

$$(\cos z)' = -\sin z \quad (\sin z)' = \cos z$$

$$(\sinh z)' = \cosh z \quad (\cosh z)' = \sinh z$$

Poglejmo si lastnost $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$; $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

$$e^z \cdot e^w = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \frac{1}{(n-j)!} z^j w^{n-j} = (*)$$

Tu prepoznamo na koncu skoraj binomsko. Ker e^z in e^w konvergirata absolutno, po izreku, ju množimo tako, da seštevamo mešane člene v poljubnem vrstnem redu.

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} z^j w^{n-j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}$$

Opazimo se:

i) $e^z e^w = e^w e^z$

ii) Ce je $w = -z$, $e^z e^{-z} = e^{-z} e^z = e^0 = 1$ zato $e^z \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$ in $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

Pogledamo lahko se povezavo med e^z in e^{x+iy}, kjer je $z = x + iy$:

$$|e^z| = \left|e^{x+iy}\right| = \left|e^x e^{iy}\right| = |e^x| \cdot \left|e^{iy}\right| = e^x \cdot \left|e^{iy}\right| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^x$$

$$\Rightarrow |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Rešimo se enačbo $e^z = 1$. Pišimo $z = x + iy \Rightarrow e^{x+iy} = 1$

$$e^x \cdot e^{iy} = 1 = e^0 = 1e^{i0} \Rightarrow e^x = 1\ \ e^{iy} = e^{i0}$$

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$e^{i\phi} = e^{iy} \Leftrightarrow \cos\phi + i\sin\phi = \cos y + i \sin y$$

$$\phi = 0 \Rightarrow \cos y = 1\ \sin y = 0 \Leftrightarrow y = 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Torej je $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}$. Iz tega sledi:

$$e^z = e^w \Leftrightarrow e^{z-w} = 1 \Leftrightarrow z - w = 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}$$

Integracija kompleksnih funkcij

Naj bosta $u, v: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji. Potem definiramo integral funkcije $f = u + iv$ kot:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \big(u(t) + iv(t)\big)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Ce sta u, v integrabilni, potem je f **integrabilna**.

Linearnost integrala

$f, g: [a, b] \to \mathbb{C}$ in integrabilni in $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\int_a^b \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)dt = \alpha\int_a^b f(t)dt + \beta\int_a^b g(t)dt$$

Ker je vsaka realna zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$ integrabilna, je tudi vsaka kompleksna zvezna funkcija na zaprtem intervalu integrabilna.

Integrabilnost

Integrabilnost kompleksne funkcije lahko na povsem ekvivalenten način definiramo kot limito **Riemannovih vsot** oblike:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}); \xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$$

ko gre sirina najdaljsega intervala delitve $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ proti 0.

Trditev:
Naj bo $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ integrabilna. Tedaj velja:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Skica dokaza
Naj bo $\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$ neka Riemannova vsota, ki pripada delitvi $a < t_0 < \cdots < t_n = b$.

$$\Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(t_j - t_{j-1})\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)|(t_j - t_{j-1})$$

V limiti bo to potem res enako:

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad \blacksquare$$

Krivuljni integral

Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ mnozica in naj bo $\gamma: [a, b] \to D$ zvezno odvedljiva. Torej $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, kjer sta γ_1, γ_2 zvezno odvedljivi. Ce je $f: D \to \mathbb{C}$ zvezna potem definiramo **krivuljni integral**:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt$$

Ce je γ odsekoma odvedljiva (slika v zvezku), potem $[a, b]$ razdelimo na podintervale $[t_{j-1}, t_j]$ na katerih je γ zvezno odvedljiva, nato pa definiramo **krivuljni integral**:

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt$$

[V zvezku primer za krožnico]

Locni element dolžine

Locni element dolžine zvezno odvedljive poti je enak:

$$ds = \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2}dt = |\dot{\gamma}(t)|dt$$

Dolžina poti je enaka:

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|dt$$

Trditev[Pomembna za ocene]
Velja:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|ds$$

Dokaz

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)dt\right| \leq \int_a^b \left|f(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\right|dt = \int_a^b \left|f(\gamma(t))\right||\dot{\gamma}(t)|dt = \int_\gamma |f(z)|ds$$

Ocena maksimuma funkcije

Ce je f zvezna funkcija, tedaj $|f|$ doseze maksimum na M oz. $|f(z)| \leq M\ \forall z \in \gamma^*$. Tako iz trditve dobimo:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|ds = M\int_\gamma ds = M\, l(\gamma)$$

pri čemer je $l(\gamma)$ dolžina krivulje γ.

Trditev

Ce je $\phi\colon [c,d] \to [a,b]$ naraščajoča zvezno odvedljiva bijekcija, potem je

$$\int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

Zapisano drugače:

$$\int_c^d f(\gamma(\phi(t))\cdot(\gamma \dot{\circ} \phi)(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Ce vpeljemo $s = \phi(t)$, dobimo zgornjo enačbo.

Pot in nasprotna pot

Naj bo sedaj $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ pot. Točki $\gamma(a)$ pravimo **začetna točka**, točki $\gamma(b)$ pa **končna točka**. Ce sta $\gamma(a) = \gamma(b)$ potem je pot **sklenjena**. Lahko definiramo tudi **nasprotno pot**, ki jo označimo z γ^-. Ce je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ pot in $\gamma(t)$ parametrizacija, potem je $\gamma^-(t) = \gamma(b+a-t)$ parametrizacija poti γ^-. To je res, ker je $t \mapsto a+b-t$

Ce imamo poti γ_1 in γ_2 pri čemer je končna točka γ_1 enaka začetni točki γ_2, potem lahko γ_1 in γ_2 v skupni točki staknemo in dobimo novo pot $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

Zakaj lahko gledamo vse poti na $[0,1]$

Preslikava $t \to \frac{t-a}{b-a}$ je naraščajoča na $[a,b]$, ki slika $a \to 0$ in $b \to 1$. Ce sta $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ in $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, definiramo:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t);\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1);\ \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

Stiki nam velikokrat dajo zanke oz. sklenjene poti. Ce je $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ in $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, potem je $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ zanka.

Trditev

Za integral po nasprotni poti velja:

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$$

Dokaz

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = \int_a^b f\big(\gamma^-(t)\big)\dot{\gamma}^-(t)dt = -\int_a^b f\big(\gamma(b+a-t)\big)\dot{\gamma}(b+a-t)dt =$$

kjer je minus v tretjem členu posledica posrednega odvoda argumenta $\dot{\gamma}(b+a-t)$. Tu uvedemo spremenljivko $s = b + a - t \to ds = -dt$

$$= \int_b^a f\big(\gamma(s)\big)\dot{\gamma}(s)ds = -\int_a^b f\big(\gamma(s)\big)\dot{\gamma}(s)ds = -\int_\gamma f(z)dz \quad \blacksquare$$

Trditev

Za vsako holomorfno funkcijo $f: D \to \mathbb{C}$ in vsako pot $\gamma: [a, b] \to D$ velja:

$$\int_\gamma f'(z)dz = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big)$$

Iz definicije ne sledi direktno, da je f' zvezna. Zato v tej trditvi načeloma moramo privzeti, da je f' zvezen. To bomo privzeli pod dodatno predpostavko brez dokaza.

Dokaz

$$\int_\gamma f'(z)dz = \int_a^b f'\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(f\big(\gamma(t)\big)dt\Big) = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big)$$

Ce je γ sklenjena, potem je $\int_\gamma f'(z)dz = 0$

Izrek

Naj bo $f: D \to \mathbb{C}$ taka zvezna funkcija na obmocju D, da je $\int_\gamma f(z)dz = 0$ za vsako sklenjeno pote γ v D. Potem obstaja taka holomorfna funkcija F na D, da je $F' = f$.

Torej recimo za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ je funkcija $f_n(z) = z^n$ zvezna na $\mathbb{C}$. Ker je $\left(\frac{1}{n+1} z^{n+1}\right)' = z^n$ lahko dokažemo, da je:

$$\int_\gamma z^n dz = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}_0$$

in za vsako odsekoma zvezno odvedljivo pot.

Dokaz

Najprej moramo poiskati predpis za F. Ker je D odprta in povezana, je povezana s kosoma zvezno odvedljivimi potmi. Izberimo fiksen $a \in D$ in za $z \in D$ definiramo:

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw$$

kjer je γ pot med a in z (glej sliko). Velja $\int_{\gamma_1} f(w)dw = \int_{\gamma_2} f(w)dw$. Napišemo $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$. Po predpostavki je:

$$\int_{\gamma} f(w)dw = 0$$

ker pomeni:

$$\int_{\gamma_1} f(w)dw + \int_{\gamma_2^-} f(w)dw = \int_{\gamma_1} f(w)dw - \int_{\gamma_2} f(w)dw = 0$$

To nam pokaze, da je nas predpis za F dobro definiran.
Tako moramo dokazati $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$ oz., če je $|h|$ dovolj majhen:

$$\left|\frac{1}{h}\big(F(z+h) - F(z)\big) - f(z)\right| < \epsilon$$

Naj bo F integral od a do z po katerikoli poti:

$$F(z) = \int_a^z f(w)dw$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{h}\left[\int_a^{z+h} f(w)dw - \int_a^z f(w)dw\right] - f(z)\right|$$

Naj bo h tako majhen, da je daljica $[z, z+h] \subseteq D$. Naj bo $\epsilon > 0$. Potem obstaja $\delta > 0$, da je:

$$|f(z+h) - f(z)| < \epsilon\ \ \forall |h| < \delta$$

Brez škode za splošnost je δ taksen, da $[z, z+h] \subseteq D$ ce je $|h| < \delta$. Tako nismo nič spremenili, dobimo:

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{h}\left[\int_a^{z+h} f(w)dw - \int_a^z f(w)dw\right] - \frac{f(z)}{h}\int_{[z,z+h]} dw\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} f(w)dw - \int_{[z,z+h]} f(z)dw\right|$$
$$= \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} \big(f(w) - f(z)\big)dw\right| = (*)$$

To lahko navzgor ocenimo če pogledamo maks vrednost $\max\big(f(w) - f(z)\big) = \epsilon$, tako dobimo oceno:

$$(*) \le \frac{1}{|h|}\epsilon\, l([z, z+h]) = \frac{1}{|h|}\epsilon\, h = \epsilon$$

Torej je po definiciji limite $F'(z) = f(z)$. ■

Ovojno število ali indeks

(Glej slike)

Naj bo $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ sklenjena pot in naj bo $z \notin \gamma^* = [\gamma] = \gamma[a, b]$ (ni na poti gama). **Ovojno število ali indeks** poti γ glede na z definiramo kot:

$$\operatorname{ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t) - z}dt$$

ker je $\xi \mapsto \frac{1}{\xi - z}$ holomorfna na $\mathbb{C}\backslash\{z\}$, je zvezna in zato zgornji integral obstaja.

Lema

Naj bo $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ pot in naj bo funkcija $f: \gamma^* \to \mathbb{C}$ zvezna. Tedaj je $F: \mathbb{C}\backslash\gamma^* \to \mathbb{C}$, ki je podana s predpisom:

$$F(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

holomorfna. Funkcijo F na vsakem odprtem krogu $D(a,r) \subseteq \mathbb{C}\backslash\gamma^*$ lahko razvijemo v potenčno vrsto:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n\,; \quad a_n = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}$$

Dokaz leme

$z \in D = \mathbb{C}\backslash\gamma^*$. Ker je $\xi \mapsto \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ je zvezna na γ^*, ker je f zvezna na γ^* in nima polov (po predpostavki o z). Zato je F dobro definirana preslikava. Izberimo $a \in D$ (poglej slikco). Naj bo $r > 0$ tak, da je cel krog $D(a,r) \subseteq \mathbb{C}\backslash\gamma^*$. Razvijemo F na $D(a,r)$ v potencno vrsto:

$$\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| \le \frac{|z-a|}{r} = q < 1\ \forall \xi \in \gamma^*$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} = \frac{1}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n =$$

Tu prepoznamo geometrijsko vrsto:

$$= \frac{1}{\xi-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi-z}$$

Ker je:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z} = f(\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\xi)\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

in ker velja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\xi)\frac{|z-a|^n}{|\xi-a|^{n+1}} = \frac{M}{|\xi-a|}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right|^n \le \frac{M}{d(a,\gamma^*)}\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

funkcijska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} f(\xi)\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$ (po Weierstrassu) konvergira enakomerno na γ^*. Zgoraj je $M = \max_{\xi\in\gamma^*}|f(\xi)|$ in $d(a,\gamma^*)$ razdalja od a do γ^*. Zato po izreku upoštevamo $\sum\int f_n = \int \sum f_n$, da dobimo:

$$F(z) = \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi = \int_\gamma\left(\sum_{n=0}^{\infty} f(\xi)\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}\right)d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\,(z-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \blacksquare$$

Izrek

Naj bo γ sklenjena pot $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ in naj bo $D = \mathbb{C}\backslash\gamma^*$. Tedaj je $z \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(z)$ zvezna funkcija, katere vrednosti so cela števila. Funkcija indeks je zato konstantna, na vsaki komponenti za povezanost množice D, na njeni neomejeni komponenti pa je ničelna.

Dokaz

$$\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1 \cdot d\xi}{\xi - z}\ ; z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^* = D$$

Po prejšnji lemi je $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ zvezna funkcija. Sedaj uporabimo profesorjev »brutalni trik«:

Definiramo:

$$F(t) = (\gamma(t) - z)e^{-\int_a^t \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}du}$$

Da se hitro preveriti da je $F'(t) = 0\ \forall t \in [a,b]$. Zato je F konstantna funkcija $F(a) = F(b)$.

$$F(a) = (\gamma(a) - z)e^{-\int_a^a \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}du} = (\gamma(b) - z)e^{-\int_a^b \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}du} = F(b)$$

Ker je krivulja sklenjena $\gamma(a) = \gamma(b)$ in $z \notin \gamma^*$. Zato je:

$$e^{-\int_a^b \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u)-z}du} = 1$$

To je izpolnjeno, ko je eksponent $2n\pi i$:

$$\Rightarrow\ -\int_a^b \frac{\dot\gamma(u)}{\gamma(u) - z}du = 2n\pi i; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Iz tega vidimo, da je $-\mathrm{ind}_\gamma(z) = n$ in ker je n celoštevilski $\Rightarrow \mathrm{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$. Ker je $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ zvezna funkcija, ki doseže le celoštevilske vrednosti, je konstantna na vsaki povezani komponenti v $D = \mathbb{C}\backslash\gamma^*$.

Treba je dokazati le se, da je $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0,\ \forall z$ iz neomejene komponente $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$.

Zagotovo je $\mathrm{ind}_\gamma(z)$ konstanten na neomejeni komponenti. Ce je z iz neomejene komponente, potem je:

$$\left|\mathrm{ind}_\gamma(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t) - z}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\dot\gamma(t)|}{|\gamma(t) - z|}dt \leq \frac{M}{2\pi}\int_a^b \frac{dt}{d(z,\gamma^*)}$$
$$= \frac{M}{2\pi}\frac{b-a}{d(z,\gamma^*)} \to_{|z|\to\infty} 0$$

Upoštevali smo, da je:

$|\dot\gamma(t)| < M\ \forall t \in [a,b], \gamma^*$ je kompaktna, $|\gamma(t) - z| \geq d(z,\gamma^*)$

Ker je $\mathrm{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ in velja $\left|\mathrm{ind}_\gamma(z)\right| \to 0$ je $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$, za z iz neomejene komponente za povezanost od $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$. ■

Recimo, če je γ pozitivno orientriana kroznica s polmerom r in s središčem v a, potem velja (za $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$) :

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1; & |z-a| < r \\ 0; & |z-a| > r \end{cases}$$

Ce je $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, kjer je γ_1 zanka, ki točko obkroži v pozitivni smeri, γ_2 pa zanka, ki točko obkroži v negativni smeri potem je:

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(z) + \operatorname{ind}_{\gamma_2}(z) = 1 - 1 = 0$$

Cauchyjeva formula in Cauchyjev izrek

Izrek[Cauchyjev izrek]

Naj bo γ taka sklenjena pot v neprazni odprti mnozici D, da je $\operatorname{ind}_\gamma(w) = 0$ za vsak $w \in \mathbb{C}\backslash D$. Tedaj za vsako holomorfno funkcijo f na D velja:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Dokaz

Zopet dokaz, za primer, ko privzamemo, da je f' zvezna.

$$f = u + iv; \quad u = \operatorname{Re} f \quad v = \operatorname{Im} f$$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy) = (*)$$

Tu uporabimo **Greenovo formulo**:

$$\int_\gamma (Pdx + Qdy) = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\Rightarrow (*) = -\int_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

To je enako 0, ker je f holomorfna in zanj veljajo C-R enačbe $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ in $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ∎

[Poglej nekaj primerov v zvezku]

Posledica[Cauchyjev izrek za obmocja]

Naj bo Ω obmocje in $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna. Naj bo D omejeno obmocje s kosoma gladkim robom in naj bo $D \cup \partial D \subseteq \Omega$. Tedaj velja (glej sliko):

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

Izrek[Cauchyjeva formula]

Naj bo γ taka sklenjena pot v neprazni odprti množici D, da je $\operatorname{ind}_\gamma(w) = 0; \forall w \in \mathbb{C}\backslash D$. Tedaj za vsako holomorfno funkcijo $f: D \to \mathbb{C}$ in vsak $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$ velja:

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

Dokaz z črno magijo

Spet dokaz le v primeru, ko je f' zvezna. Izberemo $z \in D$ in definiramo:

$$g(\xi) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$$

g je definirana na $D\backslash\{z\}$ in tam holomorfna. (Glej sliko) Definiramo $\gamma' = \gamma \cup \delta r^-$, kjer je δr^- negativno orientirana krožnica s središčem v z in polmerom r, tako da je $D(z,r) \subseteq D\backslash\gamma^*$. (Na silo sklenemo ti dve poti, integral po isti poti v obeh smereh se ne pozna)

Po Cauchyjevem izreku je:

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\gamma'} g(\xi)d\xi &= \int_{\gamma'} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}d\xi = \int_{\gamma'} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \int_{\gamma'} \frac{f(z)}{\xi - z}d\xi \\ &= \int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \int_{\delta r} \frac{f(z)d\xi}{\xi - z} - f(z)\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} + f(z)\int_{\delta r} \frac{d\xi}{\xi - z} = \end{aligned}$$

V tretjem členu prepoznamo predpis za indeks, ki mu manjka se $2\pi i$:

$$= \int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - f(z) \cdot 2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z) - \int_{\delta r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}d\xi$$

Ta enakost velja za vsak r, da je $D(z,r) \subseteq D\backslash\gamma^*$. Dokažimo, da je $\lim\limits_{r\to 0} \int_{\delta r} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}d\xi = 0$

Najprej zapišemo:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\delta r} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}d\xi\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it}) - f(z)}{re^{it}} ire^{it}dt\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(z + re^{it}) - f(z)}{re^{it}} ire^{it}\right| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left|f(z + re^{it}) - f(z)\right| dt \leq (*) \end{aligned}$$

Ker je f zvezna v z, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, da je:

$$\left|f(z + re^{it}) - f(z)\right| < \epsilon; \;\; r < \delta$$

$$\Rightarrow (*) \leq \int_0^{2\pi} \epsilon dt = 2\pi\epsilon$$

$$\Rightarrow \left|2\pi i \operatorname{ind}_\gamma(z) \; f(z) - \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi\right| \leq 2\pi\epsilon \to_{\epsilon\to 0} 0 \quad \blacksquare$$

Posledica[Cauchyjeva formula za območja]

Naj bo Ω obmocje in $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfna. Naj bo D taka omejena, obdana z odsekoma gladkim robom, da je $D \cup \partial D \subseteq \Omega$. Tedaj za nek $z \in D$ velja **Cauchyjeva formula**:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ in nek $z \in D$ velja:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Dokaz

Prva formula sledi iz Cauchyjeve formule, druga pa iz odvajanja integrala s parametrom.

Ce je D krog $D(a, r)$ in ce v zgornji Cauchyjevi formuli za območja vstavimo $z = a$, dobimo:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - a} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{it}\right) dt$$

Cauchyjeva formula za kolobar

Naj bo f holomorfna na okolici **zaprtega kolobarja**

$$\bar{A}(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}; r \leq |z - a| \leq R\}$$

Tedaj za vsak z iz **odprtega kolobarja**

$$A(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}; r < |z - a| < R\}$$

velja:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{|\xi - a| = R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right]$$

kjer $|\xi - a| = R$, $|\xi - a| = r$ predstavkjata pozitivno orientirani krožnici s središčem v a in polmeroma R in r (glej sliko).

Razvoj v vrsto (posledica C. formule za kolobar)

Naj bo f holomorfna funkcija na odprti množici D. Tedaj se da f razviti v potenčno vrsto

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \cdots$$

na vsakem krogu $D(a, r) \subseteq D$. Pri tem velja:

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

f je **neskončnokrat odvedljiva.**

Ce je $f: D(a, r) \to \mathbb{C}$ holomorfna, potem se da na celem krogu $D(a, r)$ razviti v potenčno vrsto.

Dokaz

Del trditve o razvoju v potenčno vrsto sledi iz Leme, ki je formulirana pred indeksom in Cauchyjevo formula. Iz tiste leme tudi sledijo formule za razvoj koeficientov. Ker je možno f razviti v potencno vrsto znotraj krogcev vsebovanih v D, je na vsakem od teh krogcev neskončnokrat odvedljiva funkcija ■.

Cauchyjeve ocene

Naj bo $f: D(a,r) \to \mathbb{C}$ holomorfna in naj velja $|f(z)| \leq M \; \forall z \in D(a,r)$. Tedaj za $\forall n \in \mathbb{N}_0$ velja:

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!\,M}{r^n}$$

Dokaz

Naj bo $0 < \rho < r$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$$

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f\left(a + \rho e^{it}\right)}{(\rho e^{it})^{n+1}} \, i\rho e^{it}\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left|f\left(a + \rho e^{it}\right)\right|}{\rho^n} dt$$
$$\leq \frac{n!\,M}{2\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} dt = \frac{n!\,M}{\rho^n} \to_{\rho \to r} \frac{n!\,M}{r^n} \quad ■$$

Izrek[Liouvilleov izrek]

Cela omejena holomorfna funkcija je konstantna.

Dokaz

Ker je f cela in omejena, je $|f(z)| < M \; \forall z \in \mathbb{C}$. Izberimo si $a \in \mathbb{C}$ in $r > 0$. Poglejmo Cauchyjevo oceno za f' in $D(a,r)$. Dobimo:

$$|f'(a)| \leq \frac{M}{r} \to_{r \to \infty} 0$$

Njen odvod je torej $0 \Rightarrow f' \equiv 0$ na $\mathbb{C}$:

$$0 = \int_a^z f'(\xi) d\xi = f(z) - f(a) \Rightarrow f(z) = f(a) \equiv C; \quad \forall z \quad ■$$

Izrek[Osnovni izrek algebre]

Vsak nekonstanten polinom ima v $\mathbb{C}$ vsaj eno ničlo.

Dokaz

Naj bo $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ nek kompleksen polinom, ki nima ničle nad $\mathbb{C}$. Dokažimo, da je konstanten.

Ker nima ničel lahko tvorimo in brez škode za splošnost privzamemo, da je $a_n = 1$:

$$f(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{1}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

Dokazali bomo, da je f omejena na komplementu nekega (vsakega) kroga. Ker je zvezna, je omejena na zaprtih krogih $\Rightarrow f$ je po Liouvilleovem izreku konstantna $\Rightarrow p = 1/f$ je konstantna.

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)$$

Sedaj uporabimo obratno trikotniško neenakost:

$$\Rightarrow |p(z)| \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_1|}{|z^{n-1}|} - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right)$$

Zato obstaja tak $r > 0$, da za $|z| \geq r$ velja (npr. arbitrarno izbrano) $|p(z)| \geq \frac{1}{2}$. Zato je $|f(z)| \leq 2$ za $|z| > r$. Iz komentarja prej sledi, da je f omejena in ker je cela je potem konstantna. ∎

Ničle holomorfnih funkcij

Naj bo $f: D \to \mathbb{C}$ holomorfna in $D \subseteq \mathbb{C}$ odprta. Naj bo $D(a, r) \subset D$. Takrat lahko f na $D(a, r)$ razvijemo v potenčno vrsto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

Število a je nicla za $f \Leftrightarrow f(a) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0$. Ce je $a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}_0$, potem je $f \equiv 0$ na D.

Predpostavimo, da obstaja $m \in \mathbb{N}$,da je $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ in $a_m \neq 0$. Potem je:

$$f(z) = a_m(z-a)^m + a_{m+1}(z-a)^{m+1} + \cdots = (z-a)^m(a_m + a_{m+1}(z-a) + \cdots) = (z-a)^m g(z)$$

Ker je $g(a) = a_m \neq 0$, a <u>**ni**</u> ničla za g. Zato je ***a m*-kratna nicla** za f.
Ker je $g(a) \neq 0$, zaradi zveznosti funkcije g, na neki okolici za a g nima ničle (glej slikco). Ce je $f(b) = 0$ za nek $b \in D(a, r)$ potem je $g(b) = 0$, kar je <u>protislovje</u>. Zato v tem primeru obstaja okolica za a na kateri je a edina ničla za f.

Pravimo, da je a <u>**izolirana ničla**</u> za f.

Definirajmo funkcijo $h: D \to \mathbb{C}$ s predpisom:

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-a)^m}; & z \in D \backslash \{a\} \\ a_m; & z = a \end{cases}$$

Funkcija h je holomorfna na $D \backslash \{a\}$, ker je tam holomorfna $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^m}$. Ker se h in g ujemata na $D(a, r)$ je zato h holomorfna na D in velja:

$$f(z) = (z-a)^m \cdot h(z); \quad \forall z \in D$$

Stekališče množice

Točka a je **stekališče** množice A, če je v neki okolici točke a, od a različna točka množice A.
Množica A je **množica s stekališčem**, če vsebuje kako svoje stekališče.

Izrek

Naj bo D obmocje v $\mathbb{C}$ in $f: D \to \mathbb{C}$ holomorfna funkcija. Naj bo

$$\mathcal{Z}(f) = \{a \in D; f(a) = 0\}$$

množica ničel funkcije f. Tedaj je $f \equiv 0$ na D ali pa $\mathcal{Z}(f)$ nima stekališča v D. V drugem primeru za vsak $a \in \mathcal{Z}(f)$ obstaja natanko doloceno naravno stevilo $m(a)$ in holomorfna funkcija g na D, da je $g(a) \neq 0$ in $f(z) = (z-a)^{m(a)} g(z)$.

Dokaz

Naj bo A množica stekališč za $\mathcal{Z}(f)$.

Ce je $A = \emptyset$, potem so nicle izolirane in po zgornji diskusiji, je vsaka ničla stopnje $m(a)$ in zato iskana funkcija g obstaja.

Recimo da $A \neq \emptyset$. Zaradi zveznosti funkcije f na $A \subseteq \mathcal{Z}(f)$. Dokazali bomo, da je A hkrati odprta in zaprta podmnožica v D. Ker je A neprazna, D pa povezana, bo sledilo $A = D$.

A zaprta

Ker je stekališče zaporedja stekališč tudi stekališče.

A odprta

Naj bo $a \in A$. Iščemo $r > 0$, da je $D(a,r) \subseteq A$. Potem bo po definiciji odprtosti A odprta množica. Ker je $a \in D$ in D odprta, obstaja $r > 0$, da je $D(a,r) \subseteq D$. Naj bo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

razvoj funkcije v potenčno vrsto na $D(a,r)$. Ce f ni enaka 0 na $D(a,r)$, potem lahko zapišemo:

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

Za neki $m \in \mathbb{N}$ in neko holomorfno funkcijo g, ki nima ničle v a. Po zgornjem je a edina nicla za f na nekem krogu $D(a,r)$. Zato je a izolirana ničla in zato ne more biti stekališče ničel. To protislovje pokaze, da je $f(z) \equiv 0 \ \forall z \in D(a,r)$.

Ker so točke kroga stekališča za krog, je $D(a,r) \subseteq A$. Zato je A odprta množica.

Ker je neprazna in zaprta je $A = D$ in zato $f \equiv 0$. ■

Enakost dveh funkcij

Naj bosta $f, g: D \to \mathbb{C}$ holomorfni na območju D. Ce je $f\big|_A = g\big|_A$ (torej se ujemata na množici A) in ima mnozica A stekalisce, potem je $f \equiv g$ na D.

[Zanimiv primer z e^x v zvezku]

Dokaz

$h = f - g \equiv 0$ na A, Po prejsnjem izreku je $h \equiv 0$ na D oz. $f \equiv g$ na D.

Število ničel holomorfne funkcije

Naj bo f holomorfna funkcija na območju D in naj bo $K \subseteq D$ kompaktna množica. Ce je f nenicelna, potem ima f na K lahko le koncno mnogo nicel, na D pa kvečjemu neskončno mnogo.

Dokaz

Množica $K \cap \mathcal{Z}(f)$ je mnozica nicel za f iz K. Ce je ta množica neskončna, potem ima f neskoncno nicel na K, ki je množica s stekališčem. Po izreku je potem $f \equiv 0$, ker je protislovje. V splošnem bomo D »izčrpali« s kompaktnimi množicami (glej sliko).

Definirajmo:

$$D_n = \left\{z \in D; |z| < n, d(z, \partial D) > \frac{1}{n}\right\} \quad \overline{D}_n = \left\{z \in D; |z| \leq n, d(z, \partial D) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

Velja $D_1 \subseteq \overline{D}_1 \subseteq D_2 \subseteq \overline{D}_2 \subseteq \cdots$ in:

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{D}_n$$

Ničle od f so ravno ničle za $f\big|_{\overline{D}_n}$ za vse n. Ker je $\overline{D}_n$ kompaktna ima f na $\overline{D}_n$ največ končno mnogo ničel $\Rightarrow \mathcal{Z}(f)$ je največ števno neskončna. ■.

Razvoj v Laurentovo vrsto in tipi singularnosti

Naj bo $A = A(a, r, R)$ kolobar in naj bo f holomorfna funkcija, definirana na neki okolici zaprtega kolobarja $\bar{A}$ (glej slikco) $\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_1^-$. Po Cauchyjevi formuli za kolobar za $z \in A(a, r, R)$ velja:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Izrek[Razvoj v Laurentovo vrsto]

Vsako holomorfno funkcijo definirano na okolici zaprtega kolobarja:

$$\bar{A}(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}; r \leq |z - a| \leq R\}$$

lahko za vsak $w \in A(a, r, R)$ razvijemo v **Laurentovo vrsto**:

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi\,; \;\; n \geq 0 \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi\,; \;\; n < 0$$

Prva vrsta konvergira za $\forall w$ znotraj $D(a, R)$, druga vrsta konvergira $\forall w$ zunaj $\overline{D}(a, r)$. Vrsti predstavljata holomorfni funkciji na območju konvergence.
Prvo vrsto (člen) imenujemo **regularni del**, ki je holomorfen in predstavlja ničle, druga vrsta pa je **glavni del** razvoja v Laurentovo vrsto, ki je neholomorfen in predstavlja pole.

Dokaz

Naj bo $z \in A(a,r,R)$. Potem:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi - a + a - z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi - a + a - z}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{(\xi - a)\left(1 - \frac{z-a}{\xi - a}\right)}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{(z-a)\left(1 - \frac{\xi - a}{z-a}\right)}d\xi = (*)$$

Ker je z iz notranjosti $A(a,r,R)$ in $|\xi - a| = R$ je:

$$\left|\frac{z-a}{\xi - a}\right| < \frac{|z-a|}{R} < 1$$

Zato velja:

$$\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi - a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi - a}\right)^n$$

in ta konvergenca je enakomerna na γ_2. Podobno velja tudi za γ_1, kjer spet velja enakomerna konvergenca na γ_1:

$$\frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi - a}{z-a}\right)^n$$

$$\Rightarrow (*) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_{\gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - a)^{n+1}} + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^{-n-1}\int_{\gamma_1} f(\xi)(\xi - a)^n\, d\xi$$

Iz prvega razvoja prepoznamo ustrezni c_n za $n \geq 0$. V drugem pa preindeksiramo $-n-1 = m$ in dobimo se drugi del razvoja z ustreznim c_n za $n < 0$. ■

Neodvisnost od izbire krožnic

Razvoj v Laurentovo vrsto je neodvisen od izbire krožnic. $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$ naj bo razvoj za kolobar $A(a,r,R)$. Hitro se vidi, da glavni del vrste konvergira absolutno in enakomerno na $\{z \in \mathbb{C}; |z-a| \geq \rho\}; \forall\rho > r$. Podobno regularni del vrste konvergira absolutno in enakomerno na $\{z \in \mathbb{C}; |z-a| \leq \rho\}; \forall\rho < R$. (Poglej slikce bo bolje)

Singularnosti

Ce je f holomorfna na odprti mnozici U povsod razen v tocki $a \in U$ potem je a **izolirana singularna točka** za f. Tedaj lahko f razvijemo v Laurentovo vrsto na katerem koli kolobarju $A(a,r,R); r > 0$. Na ta način dobimo razvoj v Laurentovo vrsto okoli točke a na $D(a,R)\backslash\{a\}$. Včasih označimo $D'(a,r) = D(a,r)\backslash\{a\}$, kar imenujemo **punktiran krog/disk**.

Naj bo:

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

Laurentov razvoj f je holomorfen na $D'(a,r)$. Točka a pa je **izolirana singularnost**.

Pravimo, da je točka a:

i) **Odpravljiva singularnost**, če je $c_{-1} = c_{-2} = \cdots = 0$ oz. $c_{-n} = 0; \forall n \in \mathbb{N}$
V tem primeru lahko definiramo $f(a) = c_0$. Tedaj se f ujema s potencno vrsto na $D(a, r)$ in je zato holomorfna na $D(a, r)$.

ii) **Pol**, če obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da je $c_{-m} \neq 0$ in $c_{-n} = 0; \forall n > m$. Potem je a **pol reda m.**

iii) **Bistvena singularnost**, če je $c_{-n} \neq 0$ za neskončno mnogo $n \in \mathbb{N}$

Trditev

Ce je holomorfna funkcija omejena v okolici izolirane singularne točke a, potem je a odpravljiva singularnost.

Dokaz

$$c_{-n} = 0; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-n+1}} d\xi = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|c_{-n}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{-n+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\xi)|}{|\xi - a|^{-n+1}} ds = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{M}{r^{-n+1}} dS = \frac{1}{2\pi} r^{n-1} M 2\pi r$$
$$= Mr^n \to_{r\to 0} 0 \ \blacksquare$$

Izrek[Casorati-Weierstrassov] (Glej sliko)

Naj bo a bistvena singularnost za holomorfno funkcijo f. Tedaj $\forall w \in \mathbb{C}$ ter poljubni $\epsilon, \delta > 0$ obstaja tak $z \in D'(a, \delta)$, da je:

$$|f(z) - w| < \epsilon$$

Dokaz

Predpostavimo, da obstaja tak $w \in \mathbb{C}$ in $\epsilon, \delta > 0$, da je f holomorfna na $D'(a, \delta)$ in da velja:

$$|f(z) - w| \geq \epsilon \quad \forall z \in D'(a, \delta)$$

Definirajmo funkcijo:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

Tedaj je g holomorfna na $D'(a, \delta)$. Zato je a za g odpravljiva singularnost (kar pravi trditev od prej). Zato lahko razvijemo in zapišemo:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n; \quad z \in D(a, \delta)$$

oz. lahko zapišemo:

$$g(z) = (z - a)^m h(z)$$

za $m \in \mathbb{N}_0$ in za h holomorfno na in ki nima ničel na $D(a, \delta)$. Sedaj izrazimo f:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w = \frac{1}{(z-a)^m \cdot h(z)} + w$$

Ker je h holomorfna na $D(a,\delta)$ in tu nima ničel je $1/h$ holomorfna na $D(a,\delta)$. Naj bo$\frac{1}{h(z)} =$

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

razvoj v potenčno vrsto za $1/h$ na $D(a,\delta)$. Tako lahko f izrazimo kot:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + w = \frac{1}{(z-a)^m} (b_0 + b_1(z-a) + \cdots) + w$$

Zato je a pol reda m za f, kar je protislovje. ∎

Točka ∞

Naj bo $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Točka ∞ je odpravljiva singulatnost za f, ce je 0 odpravljiva singularnost za $z \mapsto \hat{f}(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$. Podobno bi definirali pojma pola in bistvene singularnosti (je kot da se obrneta ničel in polov)

Logaritem in potence

Naj bo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Število w je **logaritem** števila z, ce je $e^w = z$.
Holomorfna funkcija g je logaritem funkcije f, ce je $e^{g(z)} = f(z); \forall z \in \mathcal{D}_f$

Torej rešimo enačbo:

$$e^{x+iy} = z = re^{i\phi}$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = |e^x|\left|e^{i\phi}\right| = r\left|e^{i\phi}\right|$$

Tako vidimo, da je $e^x = r \ \Rightarrow x = \ln|z|$. Ostane nam se $e^{iy} = e^{i\phi} \Rightarrow y - \phi = 2k\pi i; k \in \mathbb{Z}$. Tako lahko sestavimo:

$$w = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Po navadi izberemo osnovno vejo logaritma $k = 0$ (negativni del realne osi izrežemo iz kompleksne ravnine):

$$w = \ln|z| + i \arg(z)$$

Logaritem smo definirali na $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. To naredimo zato, ker so v okolici točk intervala $(-\infty, 0]$ tocke z argumentom blizu π in blizu $-\pi$.

Izrek[Holomorfnost logaritma]

Naj bo D tako obmocje v $\mathbb{C}$, da je $\operatorname{ind}_\gamma(\alpha) = 0$ za vsako slekenjeno pot γ v D in vsako točko $\alpha \in \mathbb{C}\backslash D$. Potem za vsako holomorfno funkcijo $f: D \to \mathbb{C}$, ki nima nicle na D, obstaja **holomorfni** logaritem g funkcije f. Ce je h se en logaritem za f, potem je $h - g = 2n\pi i; n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz

Ideja: Ce je $e^g = f \Rightarrow e^g g' = f' \Rightarrow f g' = f \Rightarrow g' = \frac{f'}{f}$. Ker f nima nicel lahko zapišemo g kot integral tega.

Ker je $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0; \forall z \in \mathbb{C}\backslash D$ in je $\int_\gamma h(z)dz = 0$ za vsako sklenjeno pot po Cauchjevem izreku lahko zapišemo (poglej slikco):

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} h(z)dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} h(z)dz = \int_{\gamma_2} h(z)dz$$

Izberemo $w_0 \in D$ in tak $z_0 \in \mathbb{C}$, da je $e^{z_0} = f(w_0)$. Za $z \in D$ definiramo:

$$g(w) = z_0 + \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Integral oz. funkcija g je dobro definirana, saj f nima nicel na D in je zato $\frac{f'}{f}$ holomorfna na D. Vemo ze, da je $g' = \frac{f'}{f}$:

$$h(w) = e^{-g(w)} f(w) \Rightarrow h'(w) = -e^{-g(w)} g'^{(w)} f(w) + e^{-g(w)} f'(w) = e^{-g(w)}\big(-f'(w) + f'(w)\big) = 0$$

Vidimo, da je h konstantna. Vstavimo $w = w_0$ in dobimo:

$$h(w_0) = e^{-g(w_0)} f(w_0) = e^{z_0} e^{-0+z_0} = 1 \Rightarrow f(w) = e^{g(w)}; \forall w \in D$$

Ce je h se en logaritem od $f \Rightarrow e^{g(w)} = f(w) = e^{h(w)}$ $\forall w \in D$

$$\Rightarrow g(w) - h(w) = 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}$$

Izrazimo:

$$k(w) = \frac{1}{2\pi i}\big(g(w) - h(w)\big)$$

k je zvezna funkcija na D, ki ima le celoštevilske vrednosti. Ker je zvezna, je konstantna. Ker če ne bi bila, potem sta m, n zalogi vrednosti. Iz separacije, ki loči $\{n\}$ in preostanek zaloge vrednosti s prasliko z f dobimo separacijo za D, kar pa ne gre, ker je D povezana. ■

Izražava logaritma v eni točki, z znanim logaritmom v drugi točki:

Izberemo $w_0 \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Za vsak $w \in \backslash(-\infty, 0]$ velja:

$$\ln w = \ln w_0 + \int_\gamma \frac{dz}{z}$$

kjer je γ poljubna pot med w_0 in w.
[V zvezku nek primer z vrstami za ln]

Kompleksna potenca

Za $\alpha \in \mathbb{C}$ in $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ definiramo: $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$

Kompleksna potenca je holomorfna na $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ ker je kompozitum holomorfnih funkcij.

Izrek o residuih

Residuum oz. ostanek

Naj bo f holomorfna na $D'(a,r)$ in naj bo $0 < r < R$. Naj bo Laurentov razvoj f na $D'(a,R)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz = \int_{\gamma_r} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\gamma_r} c_n(z-a)^n dz$$
$$= c_{-1} \int_{\gamma_r} (z-a)^{-1} dz + \sum_{n \neq 1} c_n \int_{\gamma_r} (z-a)^n dz$$

Na $D'(a,R)$ ima $(z-a)^n$ primitivno funkcijo za $n \neq 1$. Zato so vsi integrali v zadnji vrsti enaki 0.

$$\Rightarrow \int_{\gamma_r} f(z)dz = c_{-1} \int_{\gamma_r} (z-a)^{-1} dz = c_{-1} 2\pi i \operatorname{ind}_{\gamma_r}(a) = 2\pi i\, c_{-1}$$

Število c_{-1} je **residuum/ostanek** in ga označimo:

$$c_{-1} = \operatorname{Res}(f,a)$$

Izrek[Izrek o residuuih]

Naj bo f holomorfna funkcija na obmocju D razen v izoliranih singularnih tockah $a_1, \dots, a_n$. Naj bo γ taka pot v D, da je $\operatorname{ind}_\gamma(w) = 0; \forall w \in \mathbb{C} \backslash D$ in naj na γ ne bo singularnosti $a_1, \dots, a_n$. Potem velja:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ind}_\gamma(a_k) \operatorname{Res}(f, a_k)$$

Dokaz

Naj bo Q_k glavni del Laurentovega razvoja za f okoli a_k. Tedaj ima lokalno funkcija:

$$g = f - (Q_1 + \dots + Q_n)$$

odpravljive singularnosti $a_1, \dots, a_n$. Zato je g holomorfna in po Cauchyjevem izreku velja:

$$0 = \int_\gamma g(z)dz = \int_\gamma f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int Q_k(z)dz$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma Q_k(z)dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \operatorname{Res}(f, a_k) \operatorname{ind}_\gamma(a_k) \quad \blacksquare$$

Izračun ostanka

Lahko razvijemo funkcijo v Laurentovo vrsto ampak ker je to kdaj zoprno obstaja formula:

Trditev:

Naj bo a izolirana singularnost funkcije f, v kateri ima a pol stopnje n. Tedaj je:

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \big((z-a)^n f(z)\big)^{(n-1)}$$

Dokaz

Naj bo:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1 z + \cdots$$

Laurentov razvoj funkcije f okoli $z = a$. Pomnožimo z $(z-a)^n$

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-a) + \cdots + c_{-2}(z-a)^{n-2} + c_{-1}(z-a)^{n-1} + c_0(z-a)^n + \cdots$$

Enakost odvajamo $(n-1)$-krat in dobimo:

$$\big((z-a)^n f(z)\big)^{(n-1)} = c_{-1} \cdot (n-1)! + g(z)$$

kjer je g golomorfna funkcija, ki ima ničlo v $z = a$. Sedaj pošljemo $z \to a$. ■

Izrek o odprti preslikavi in posledice

Trditev[Število polov in število ničel]

Naj bo D obmocje in f holomorfna na D razen v nekaj singularnih toackah, ki so poli za f. Naj bo $\overline{D}(a, r)$ krog v D in naj f nima nobene ničle na njegovem robu. Naj bo $\mathcal{N}$ stevilo nicel in $\mathcal{P}$ stevilo polov za f znotraj $D(a, r)$, pri čemer ničle in pole štejemo skladno z večkratnostjo. Potem je:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{N} - \mathcal{P}$$

Dokaz

Naj bodo $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ in $\beta_1, \dots, \beta_l$ zaporedoma vse ničle in vsi poli (različni) znotraj $D(a, r)$. Po izreku o stekališčih ničelne množice, je število ničel končno. Ker je α nicla za $f \leftrightarrow \alpha$ pol za $1/f$, podoben argument pove, da je tudi polov končno mnogo.

Naj bodo $m_1, \dots, m_k$ in $n_1, \dots, n_l$ zaporedne večkratnosti ničel in polov. Zato za $z \in D(a, r)$ velja:

$$f(z) = (z-\alpha_1)^{m_1} \dots (z-\alpha_k)^{m_k} (z-\beta_1)^{-n_1} \dots (z-\beta_l)^{-n_l} g(z)$$

kjer$g$ nima ne nicel ne polov na $D(a, r)$. Tako je:

$$\frac{f'}{f} = \frac{m_1}{z-\alpha_1} + \cdots + \frac{m_k}{z-\alpha_k} + \cdots$$

$$h(z) = (z-\alpha)^m k(z) \Rightarrow h'(z) = m(z-\alpha)^{m-1} k(z) + (z-\alpha)^m k'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{m}{z-\alpha} + \frac{k'}{k}$$

Torej po tej logiki lahko nadaljujemo od prej:

$$\Rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{m_1}{z-\alpha_1} + \cdots + \frac{m_k}{z-\alpha_k} - \frac{n_1}{z-\beta_1} - \cdots - \frac{n_l}{z-\beta_l} + \frac{g'}{g}$$

To sedaj integriramo (zadnji člen g'/g bo dal 0, ker je holomorfen brez ničel in polov)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f'}{f}dz = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{j=1}^{k}\int \frac{m_j}{z-\alpha_j}dz - \sum_{j=1}^{l}\int \frac{m_j}{z-\beta_j} + \int_{\partial D(a,r)} \frac{g'}{g}dz\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} m_j \operatorname{ind}_{\partial D(a,r)}(\alpha_j) - \sum_{j=1}^{l} m_j \operatorname{ind}_{\partial D(a,r)}(\beta_j) + 0 = (m_1 + \cdots + m_k) - (n_1 + \cdots + n_l) = \mathcal{N} - \mathcal{P} \blacksquare$$

Izrek

Obstajata taka odprta kroga $D(\alpha,\delta) \subseteq D$ in $D(\beta,\epsilon)$, da ima za vsak $w \in D(\beta,\epsilon) \backslash \{\beta\}$ enačba $f(z) = w$ natanko n razlicnih resitev v krogu $D(\alpha,\delta)$ (glej sliko)

Dokaz v zvezku

Odprta preslikava

$f: U \to \mathbb{C}$ je **odprta preslikava**, če je $f(V)$ odprta mnozica za neko odprto podmnožico $V \subseteq U$.

i) f je zvezna $\Leftrightarrow f^{-1}(U)$ odprta za vsako odprto množico U
ii) f je odprta $\Leftrightarrow f(U)$ je odprta za vsako množico U

Ce je f bijekcija, potem je f zvezna $\Leftrightarrow f^{-1}$ odprta in f odprta $\Leftrightarrow f^{-1}$ zvezna.
Zato ima zvezna odprta bijektivna preslikava zvezen inverz.

Izrek[Izrek o odprti preslikavi]

Naj bo $f: D \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija na odprti množici D. Tedaj je f odprta preslikava.

Dokaz

Naj bo $U \subseteq D$ odprta. Dokazati moramo, da je $f(U)$ tudi odprta. To bomo pokazali tako, da obstaja $\epsilon > 0$, da je cel disk $D(b,\epsilon) \subseteq f(U)$.

Po prejšnjem izreku obstajata odprta kroga $D(a,\delta) \subseteq U$ in $D(b,\epsilon)$, da je vsak $w \in D(b,\epsilon)\backslash\{b\}$ slika n razlicnih točk iz kroga $D(a,\delta)$. Zato je $D(b,\epsilon) \subseteq f\big(D(a,\delta)\big) \subseteq f(U)$. $\blacksquare$

Holomorfnost inverza

Naj bo f taka holomorfna funkcija, definirana na okolici tocke α, da je $f'(\alpha) \neq 0$. Potem obstaja taka odprta okolica U tocke α, da f preslika U bijektivno na odprto mnozico $f(U)$, inverzna preslikava $f^{-1}: f(U) \to U$ pa je tudi holomorfna.

Dokaz v zvezku

Princip maksima in minima

Naj bo f nekonstantna holomorfna funkcija na odprti množici D. Potem $|f|$ ne zavzame maksimuma na D, minimum pa zavzame le v ničlah funkcije f.

Dokaz (glej sliko)
Recimo, da $|f|$ doseze naksimum M v tocki z_0; $M = |f(z_0)|$. Ker je f odprta preslikava, je $f(U)$ odprta množica v $\mathbb{C}$. Zato obstaja $\delta > 0$, da je $D(f(z), \delta) \subseteq f(U)$. Ker je $|w| > |f(z)|$ v z_0 funkcija ne more imeti maksimuma.

Za dokaz drugega dela izreka, recimo, da f nima nicle, funkcija $|f|$ pa doseze minimum v z_0. Potem je $\frac{1}{f}$ holomorfna funkcija na D, funkcija $\left|\frac{1}{f}\right|$ pa doseže maksimum v z_0. To pa je protislovje zaradi zgoraj dokazanega. ■

Posledica
To vse pomeni, da če je f nekonstantna holomorfna funkcija v okolici kake komponente množice $K \subseteq \mathbb{C}$ potem $|f|\big|_K$ zavzame svoj maksimum le v nekaterih robnih točkah množice K, minimum pa tudi le na robu ali pa v niclah funkcije f.

Lema[Schwartzeva lema]
Naj bo $f: D(0,1) \to D(0,1)$ taka holomorfna funkcija, da velja $f(0) = 0$. Tedaj velja naslednje:

i) $|f(z)| \leq |z|; \forall z \in D(0,1)$ (s preslikavo razdaljo od izhodišča kvečjemu zmanjšamo)
ii) $|f'(0)| \leq 1$a

Ce je $|f(z)| = |z|$ za $z \in D'(0,1)$ ali $|f'(0)| = 1$ potem obstaja tak $\alpha \in \mathbb{C}$, da je $|\alpha| = 1$, f pa je oblike $f(z) = \alpha z;\ \forall z \in D(0,1)$ (to je rotacija)

Dokaz
Naj bo $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ razvoj f na $D(0,1)$ v potenčno vrsto. Ker je $f(0) = 0$ je $a_0 = 0$. Zato za $z \neq 0$ velja:

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots$$

Zato je g holomorfna na $D'(0,1)$. Iz zgornjega vidimo, da ima razvoj funkcije g v Laurentovo vrsto na $D'(0,1)$ v okolici izolirane singularnosti 0 **odpravljivo singularnost**.

$g(0) = a_1$ je $g: D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfna. Izberimo $z \in D(0,r); 0 < r < 1$. Tedaj je (uporabimo princip maksima):

$$\frac{|f(z)|}{|z|} = |g(z)| \leq \max_{|\xi|=r} |g(\xi)| = \max_{|\xi|=r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|} \leq \frac{1}{r} \to_{r\to 1} 1$$

$$\Rightarrow |f(z)| \leq |z|; \forall z \in D(0,r) \ \Rightarrow |f(z)| \leq |z|; \forall z \in D(0,1)$$

Poglejmo se drugo točko:

$$f'(0) = a_1 = g(0) \Rightarrow |g(0)| = \lim_{z\to 0} |g(z)| = \lim_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|}$$

Ker je $|f(z)| < |z|$ enako velja v limiti. Zato je :

$$|g(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| \leq 1$$

Poglejmo se zadnji del. Naj bo $|f(z_0)| = |z_0|$ za nek $z_0 \in D(0,1)\backslash\{0\}$. Tedaj je $|g(z_0)| = 1$. Ker pa je

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1;\ \forall z \in D(0,1)\backslash\{0\}$$

ima $|g|$ maksimum znotraj $D(0,1)$. Po principu maksima je g konstantna. To pomeni, da je $g(z) = \alpha; \forall z \in D(0,1)$. Zato pa je $f(z) = \alpha z$. Ker pa je $|g(z_0)| = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1$. Ce pa je $|f'(0)| = 1$ potem je $|g(0)| = |a_1| = |f'(0)| = 1$ ■

Biholomorfne preslikave diska

Biholomorfna preslikava $f: U \to V$ je **bijektivna holomorfna preslikava s holomorfnim inverzom**. Poiskali bomo vse biholomorfne preslikave $f: D(0,1) \to D(0,1)$.

Za $\alpha \in D(0,1)$ definirajmo $f_\alpha: z \mapsto \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$. Ta preslikava je holomorfna povsod, razen v točki $z = \frac{1}{\bar{\alpha}}$. Ce je $\alpha = re^{i\phi}$, potem je $\frac{1}{\bar{\alpha}} = \frac{1}{r}e^{i\phi}$. Število α je nicla za f_α. Zato je f_α holomorfna na kateremkoli disku $\bar{D}(0,\delta); \delta < \frac{1}{r}$. V posebnem primeru to pomeni, da lahko gledamo $f_\alpha: \bar{D}(0,1) \to \mathbb{C}$. Dokažimo, da je $f_\alpha\big(\partial D(0,1)\big) \subseteq \partial D(0,1)$ in $f_\alpha\big(D(0,1)\big) \subseteq D(0,1)$.

$$|z| = 1 \Rightarrow |f_\alpha(z)| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{\overline{1-\bar{\alpha}z}}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\alpha\bar{z}}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{1-\frac{\alpha}{z}}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{\frac{1}{z}(z-\alpha)}\right| = |z| = 1$$

Zato je $f_\alpha\big(\partial D(0,1)\big) \subseteq \partial D(0,1)$.

Ce je $|z| < 1$ ali je lahko $|f_\alpha(z)| > 1$? To bi pomenilo, da bi $|f_\alpha|$ dosegla maksimum v $D(0,1)$. Po principu maksima je $|f_\alpha|$ konstantna in ker $f_\alpha(\alpha) = 0$ je $f_\alpha \equiv 0$. To pa je protislovje. S tem smo dokazali se $f_\alpha\big(D(0,1)\big) \subseteq D(0,1)$.

Dokažimo se, da je $f_\alpha: \bar{D}(0,1) \to \bar{D}(0,1)$ bijektivna in da velja $f_\alpha\big(\partial D(0,1)\big) = \partial D(0,1)$ in $f_\alpha\big(D(0,1)\big) = D(0,1)$.

Ker je $\alpha \in D(0,1)$ je $-\alpha \in D(0,1)$ zato je $f_\alpha: \bar{D}(0,1) \to \bar{D}(0,1)$ smiselna. Dokazati moramo $(f_\alpha \circ f_{-\alpha})(z) = z$

$$(f_\alpha \circ f_{-\alpha})(z) = \frac{f_{-\alpha}(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha}f_{-\alpha}(z)} = \frac{\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z} - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}} = \frac{z + \alpha - \alpha - |\alpha|^2 z}{1 + \bar{\alpha}z - \bar{\alpha}z + |\alpha|^2} = \frac{z(1-|\alpha|^2)}{(1-|\alpha|^2)} = z$$

Podobno velja za kompozitum v drugi smeri. Zato je ta preslikava bijektivna in velja $f_\alpha^{-1} = f_{-\alpha}$. Vidimo

$$D(0,1) = f_\alpha(f_{-\alpha}\big(D(0,1)\big) \subseteq f_\alpha\big(D(0,1)\big) \subseteq D(0,1) \Rightarrow f_\alpha\big(D(0,1)\big) = D(0,1)$$

Podobno vidimo tudi za $f_\alpha\big(\partial D(0,1)\big) = \partial D(0,1)$.

Izrek

Vsaka bijektivna holomorfna preslikava iz $D(0,1)$ v $D(0,1)$ je oblike:

$$f(z) = wf_\alpha(z);\ \ \alpha \in D(0,1)\ \ w \in \partial D(0,1)$$

f je kompozitum f_α in rotacije za kot ϕ, kjer je $w = e^{i\phi}$.

Dokaz v zvezku (mogoče ga napišeš kasneje)

Najprej poglejmo $f(0) = 0$, ker je $f: D(0,1) \to D(0,1)$, ker je $f: D(0,1) \to D(0,1)$, je $|f(z)| \leq |z|$

Ulomljene linearne transformacije

Preslikavo oblike

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

kjer so a, b, c, d kompleksna števila imenujemo **ulomljena linearna transformacija**. Ce je $a \neq 0$ potem je $-\frac{b}{a}$ ničla za f. Ce je $c \neq 0$, potem je $-\frac{d}{c}$ pol za f. Preslikavi f lahko priredimo matriko:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Za $f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ in $f_B(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ velja:

i) $f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$
ii) $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$
iii) $f_A = kosnt. \Leftrightarrow \det A = ab - bc = 0$

Razširitev do $\hat{\mathbb{C}}$:

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ce ima f pol v $-\frac{d}{c}$, potem lahko definiramo:

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$$

Ce je $c = 0$ potem je $f(z) = \frac{az+b}{d}$, tem primeru definiramo $f(\infty) = \infty$. Zato lahko razširimo $\hat{f}: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

Tipi preslikav

Glede na izbiro konstant a, b, c, d ločimo naslednje tipe preslikav:

i) **Translacija** $(a = 1, c = 0, d = 1)$: $f(z) = z + b$
ii) **Razteg** $(a > 0, b = 0, c = 0, d = 1)$: $f(z) = az$
iii) **Rotacija za kot ϕ** $(|a| = 1, b = 0, c = 0, d = 0)$: $f(z) = az = e^{i\phi}z$
iv) **Inverzija** $(a = d = 0, b = c = 1)$: $f(z) = \frac{1}{z}$

Trditev

Vsaka ulomljena linearna preslikava z neničelno determinanto$(ad - bc \neq 0)$, se da zapisati kot kompozitum preslikav tipa $i), ii), iii), iv)$.

Dokaz v zvezku

Ce je $c = 0$, potem $\det A = ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow d \neq 0$:

$$\Rightarrow f(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

Torej je kompozitum preslikav tipa i), iii) in iii)

Ce je $d = 0 \Rightarrow c \neq 0$:

$$\Rightarrow f(z) = \frac{az + b}{cz} = \frac{1}{c} + \frac{b}{c}\frac{1}{z}$$

Torej je kompozitum preslikav i), ii), iii) in iv).

Ce $c, d \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

Torej je kompozitum preslikav i), ii), iii) in iv) ∎.

Krožnice in premice

Lema:

Vsaka krožnica in vsaka premica se da zapisati v obliki $\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$, kjer sta $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ tak, da je $|\beta|^2 > \alpha\gamma$. Ce je $\alpha \neq 0$, potem je krivulja krožnica, sicer je premica.

Dokaz v zvezku

Trditev:

Vsaka ulomljena linearna preslikava z neničelno determinanto preslika krožnice in premice v krožnice in premice.

Dokaz

Ker je vsaka ulomljena linearna preslikava z neničelno determinanto kompozitum tipov preslikav od prej, zadošča preveriti trditev samo za te osnovne tipe. Pravzaprav moramo preveriti le za **inverzijo**. Tipični predstavnik krožnic oz. premic je:

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$$

Z inverzijo se slika $z \mapsto \frac{1}{z}$ in dobimo:

$$\alpha\frac{1}{|z|^2} + \frac{\beta}{z} + \frac{\bar{\beta}}{\bar{z}} + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma|z|^2 = 0$$

Torej gre po inverziji $\alpha \to \gamma, \gamma \to \alpha, \beta \to \bar{\beta}$. Zato je:

$$|\bar{\beta}\beta| - \gamma\alpha > 0 \quad \blacksquare$$

Slika premice oz. krožnice z inverzijo je krožnica $\Leftrightarrow \gamma \neq 0$. Sicer je premica

Ulomljena linearna preslikava je določena s tremi točkami

Naj bodo $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ različne točke. Naj bodo tudi $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ različne točke. Tedaj obstaja natanko ena ulomljena preslikava $f: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, da je:

$$f(z_1) = w_1 \quad f(z_2) = w_2 \quad f(z_3) = w_3$$

Dokaz

Najprej poglejmo posebni primer $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = \infty$. Iščemo tako ulomljeno linearno preslikavo, da velja:

$$z_1 \to 0, z_2 \to 1, z_3 \to \infty$$

Ker je $f(z_1) = 0$, je v števcu izraz oblike $z - z_1$. Ker je z_3 pol je v imenovalcu izraz oblike $z - z_3$. Zato je:

$$f(z) = \alpha \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

Upoštevamo se tretjo enačbo $f(z_2) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$. Tako ima f predpis:

$$f(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

Po ravnokar dokazanem obstaja natanko ena ulomljena linearna preslikava, da je:

$$g(w_1) = 0, g(w_2) = 1, g(w_3) = \infty$$

Ker je g ulomljena linearna je tudi g^{-1} ulomljena linearna. Iz tega dobimo, da je $g^{-1} \circ f$ ulomljena preslikava, ki slika $z_1 \to w_1, z_2 \to w_2, z_3 \to w_3$. Ce je f_2 se ena preslikava, ki izpolnjuje izreka potem je $g \circ f = g \circ f_2$ in ker je g bijekcija sledi $f = f_2$.

Homotropije in konformna ekvivalenca enostavno povezanih območji

Homotropija

Naj bo D obmocje. Naj bosta $\gamma_0, \gamma_1: [0,1] \to D$ krivulji. **Homotropija** od γ_0 do γ_1, je taka zvezna preslikava $F: [0,1] \times [0,1] \to D$, da je:

$$F(t, 0) = \gamma_0(t) \quad F(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

Po domače povedano, je homotropija med γ_0 in γ_1 zvezna transformacija krivulje γ_0 v krivuljo γ_1 (glej slikco). Recimo $\gamma_0 = f$ in $\gamma_1 = g$. Lahko definiramo:

$$F(t, s) = (1 - s)f(t) + sg(t)$$

ki je zvezna homotropija med f in g. Ce obstaja homotropija med f in g potem pravimo, da sta f in g **homotropni**. Ce je g konstantna krivulja in ce je f homotropna g potem je f homotropna konstantni.

Trditev

Ce sta γ_0, γ_1 homotropni sklenjeni krivulji v območju D, potem je $\mathrm{ind}_{\gamma_0}(a) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(a)$ za vsak $a \in \mathbb{C} \backslash D$. To pomeni, da za vsako holomorfno funkcijo velja:

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Dokaz

Naj bo $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1^-$. Po prejšnji trditvi za vsak $a \in \mathbb{C}\backslash D$ je $\operatorname{ind}_{\gamma_0}(a) = \operatorname{ind}_{\gamma_1}(a) \Rightarrow \operatorname{ind}_{\gamma}(a) = 0$. Po Cauchyjevem izreku je:

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$$

Enostavno povezano območje

Za območje D v $\mathbb{C}$ so naslednje trditve ekvivalentne:

i) Množica $\hat{\mathbb{C}}\backslash D$ je povezana
ii) Vsaka krivulja v D je homotropna konstantni
iii) Za vsako sklenjeno pot γ v D in $\forall w \in \mathbb{C}\backslash D$ velja $\operatorname{ind}_\gamma(w) = 0$

Spomnimo se Cauchyjevega izreka. Ce je $\operatorname{ind}_\gamma(a) = 0\ \forall a \in \mathbb{C}\backslash D$, potem za vsako holomorfno funkcijo velja:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Ker gre za sklenjeno krivuljo so vsi krivuljni integrali enaki, če gledamo krivulje z isto začetno in končno točko. Območju v ravnini, ki zadošča katerikoli od teh ekvivalentnih trditev imenujemo **enostavno povezano**.

Bijektivno holomorfno preslikavo $f: D_1 \to D_2$ imenujemo **biholomorfna** oz. **konformna ekvivalenca**.

Izrek[Riemannovo upodobitveni izrek]

Vsako enostavno povezano območje, ki ni $\mathbb{C}$ je konformno ekvivalentno $D(0,1)$

Eulerjeva Γ funkcija

Na polravnini $\operatorname{Re} z > 0$ je funkcija Γ definirana s predpisom:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

Na tej polravnini je **holomorfna**.

Pomožni izrek za dokaz

Naj bo D odprta mnozica in $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje holomorfnih funkcij na D, ki konvergira enakomerno po kompaktnih podmnožicah v D proti funkciji f. Tedaj je f holomorfna na D.

Dokaz v zvezku

Dokaz, da je Γ holomorfna na $Re\, z > 0$

Definirajmo:

$$F_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Ideja je, da pokažemo da so F_n holomorfne in da konvergirajo enakomerno k Γ po kompaktih v $\operatorname{Re} z > 0$.

F_n holomorfna

Funkciji $(z,t) \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ in $\frac{\partial}{\partial z}(t^{z-1}e^{-t})$ sta zvezni na $\left[\frac{1}{n}, n\right] \times \mathbb{C}$. Zato se da, kot v realnem primeru dokazati, da je F_n tudi holomorfna.

$F_n \to \Gamma$ enakomerno po kompaktih v $\operatorname{Re} z > 0$

Naj bo K kompaktna podmnozica v $\operatorname{Re} z > 0$. Naj bo $\delta = \inf\{Re\, z\,; z \in K\} > 0$ in $M = \sup\{Re\, z\,, z \in K\} > 0$. Zaradi kompaktnosti sta δ in M večja od 0 in končna. Dovolj je dokazati, da:

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |t^{z-1}e^{-t}| dt \to 0 \qquad \int_n^{\infty} |t^{z-1}e^{-t}| dt \to 0$$

enakomerno. Upoštevamo $z = x + iy$

$$|t^{z-1}| = \left|e^{(z-1)\ln t}\right| = e^{\operatorname{Re}\left((z-1)\ln t\right)} = e^{(\operatorname{Re} z-1)\ln t} = t^{\operatorname{Re} z-1} = t^{x-1}$$

Dobimo:

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |t^{z-1}e^{-t}| dt = \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\operatorname{Re} z-1}e^{-t} dt \le \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\delta-1}e^{-t} dt \le \int_0^{\frac{1}{n}} t^{\delta-1} \to_{n\to\infty} 0$$

$$\int_n^{\infty} |t^{z-1}e^{-t}| dt \le \int_n^{\infty} t^{M-1}e^{-t} dt = \int_n^{\infty} t^{M-1}e^{-\frac{t}{2}}e^{-\frac{t}{2}} dt \le C \int_n^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt = 2Ce^{-\frac{n}{2}} \to_{n\to\infty} 0$$

kjer je $C = \sup_{t\ge 1} t^{M-1}e^{-t}$

Lastnosti

Za vsak z; $\operatorname{Re} z > 0$ velja:

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

Ce je $-1 < \operatorname{Re} z < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(z+1) > 0$. Zato $\Gamma(z+1)$ obstaja in zato lahko definiramo:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$