Kompleksna števila in kompleksna ravnina

Kompleksna števila so urjeni pari realnih števil.
Operaciji seštevanja in množenja definiramo na naslednji način:

$$(a,b)+(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} (a+c, b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) \stackrel{\text{def}}{=} (ac-bd, ad+bc)$$

Množico $\mathbb{R}^2$ opremljeno s operacijami seštevanja in množenja imenujemo **kompleksna ravnina** in jo označimo z $\mathbb{C}$. Število $(0,1)$ se imenuje **imaginarna enota** in ga označimo z i.

Zapis (a,b) zamenjamo z zapisom $a+ib$
Stevilo oblike $a+i\cdot 0$ oz. $(a,0)$ lahko izenacimo z realnim številom a.
Število oblike $0+ib$ oz. $(0,b)$ lahko izenacimo z imaginarnim številom ib.

$$z=a+ib \Rightarrow \quad a=\mathrm{Re}(z) \;\; b=\mathrm{Im}(z)$$

Število $\bar{z}=a-ib$ se imenuje **konjugirano** število z.

$$\mathrm{Re}(z)=a=\frac{1}{2}(z+\bar{z}) \quad \mathrm{Im}(z)=b=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$$

Absolutna vrednost števila z je oznacena z $|z|$ in je definirana kot:

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{(a+ib)(a-ib)}=\sqrt{a^2+b^2}$$

Polarni zapis kompleksnega števila

$$z=a+ib=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)=|z|e^{i\phi}$$

$|z|$ in ϕ lahko izrazimo z a in b:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2} \quad \cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Pri takem zapisu se omejimo na $\phi\in[0,2\pi)$. Ta kot ϕ imenujemo **argument kompleksnega števila**.

Topološke lastnosti kompleksne ravnine

Oznake:

Odprt krog s središčem v točki z in polmerom r bomo označevali z:

$$D(z,r)=\{w\in\mathbb{C}; |w-z|<r\}$$

Zaprti krog s središčem v točki z in polmerom r:

$$\overline{D}(z,r)=\{w\in\mathbb{C}; |w-z|\leq r\}$$

Krožnica s središčem v z in polmerom v r bo označena (kot rob):

$$\partial D(z,r)=\{w\in\mathbb{C}; |w-z|=r\}$$

Množica $U\subseteq C$ je **odprta**, če $\forall w\in U\ \exists r>0$, da velja:

$$D(z,r)\subset U$$

Da se dokazati, da je U odprta natanko takrat, ko je unija vseh odprtih krogov vsebovana v U.

Množica U je **zaprta**, če je njen komplement odprta množica.

Množica A je **okolica** točke $z \in \mathbb{C}$, ce obstaja taka odprta mnozica U,da je $z \in U \subseteq A$.

Množica $A \in \mathbb{C}$ je **povezana,** če je <u>**ne**</u> moremo zapisati v obliki:

$$A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$$

kjer sta U in V disjunktni odprti mnozici v $\mathbb{C}$, ki sekata A.
Geometrijsko si to lahko povezanost predstavljamo tako, da je množica »iz enega kosa«.

Pomembno

$$U = U \cup \emptyset$$

Ce je U odprta in neprazna potem:

$$U = (U \cap U) \cup (U \cap \emptyset)$$

Zato je vazno, da množici od prej res sekata.

Neprazna odprta povezna množica se imenuje **območje**.

Zveznost
Funkcija $f: U \to \mathbb{C}$ je **zvezna v točki** $z \in U$ ce $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, da $\forall z' \in U$, $|z - z'| < \delta$:

$$|f(z) - f(z')| < \epsilon$$

Funkcija f je **zvezna na *U***, če je zvezna v vsaki točki $z \in U$. Izkaze se, da je f zvezna, ce je $f^{-1}(V)$ odprta množica v U za vsako odprto množico v $\mathbb{C}$.

Trditev: Zvezna slika povezane množice je povezana
Nas bodo zanimale poti. Pot $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ je zvezna preslikava. Po trditvi so tiri poti povezane množice. Vemo že, da je A povezana, če je »iz enega samega kosa«. Ce je množica iz več kosov (recimo dveh) sta ta kosa maksimalno povezani podmnožici/kosa. Maksimalno povezane podmnožice dane množice se imenujejo **komponente za povezanost**.

Izrek:
Vsako množico je mogoče zapisati/izraziti kot unijo njenih komponent za povezanost. Ce je množica odprta, potem so njene komponente odprte množice.

Ce si ogledamo preslikave $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ lahko γ zapišemo v obliki:

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$$

kjer sta $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \to \mathbb{R}$. Pri tem je $\gamma_1(t) = \mathrm{Re}\big(\gamma(t)\big)$ in $\gamma_2(t) = \mathrm{Im}\big(\gamma(t)\big)$. Očitno je, da je γ zvezna natanko tedaj, ko sta γ_1 in γ_2 zvezni.
Pravimo, da je γ **odvedljiva**, če sta odvedljivi preslikavi γ_1 in γ_2. V tem primeru označimo:

$$\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$$

γ je **zvezno odvedljiva**, če sta γ_1, γ_2 zvezno odvedljivi. To označimo z:

$$\gamma \in C^1([a, b])$$

Ce lahko $[a, b]$ razdelimo na koncno mnogo podintervalov, na katerih je γ zvezno odvedljiva (torej v krajiscih med intervali obstajata levi in desni odvod), potem je γ **odsekoma zvezno odvedljiva**. Poseben primer odsekoma zvezno odvedljivih funkcij so **kosoma linearne**.

Pot in povezanost s potmi

Pot v kompleksni ravnini je zvezna preslikava $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$. Pravimo, da je $A \subseteq \mathbb{C}$, **s potmi povezana**, če za poljubni točki $z, w \in A$ obstaja pot med njima:

$$\exists\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}: \gamma(a) = \ z \ \ \gamma(b) = w$$

Trditev:

Za povezanost in povezanost s potmi veljajo naslednje trditve:

i) Odprta množica je povezana ⇔ je povezana z zvezno odvedljivimi potmi
ii) Vsaka s potmi povezana množica je povezana
iii) Odprta množica je povezana ⇔ je povezana z (zveznimi) potmi.

Razširjena kompleksna ravnina

Kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ lahko dodamo tocko, ki je »neskončno oddaljena«, od katerekoli točke $z \in \mathbb{C}$. To točko označimo z ∞. Množico $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ imenujemo **razširjena kompleksna ravnina**.

Okolice točke ∞ so komplementi kompaktnih množic v $\mathbb{C}$

Riemannova sfera in stereografska projekcija (glej sliko)

Preslikava $\Phi: S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2$, kjer je N severni pol sfere, definirana s predpisom $\Phi(T) = T'$, se imenuje **stereografska projekcija** in je bijekcija. Podana je s predpisom:

$$\phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

Ce imamo v mislih identifikacijo, da je $(a, b) \to a + ib$, potem to lahko zapišemo kot $\Phi: S^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{C}$:

$$\phi(x, y, z) = (x + iy) \cdot \frac{1}{1-z}$$

Ce razširimo Φ s predpisom $\Phi(N) = \infty$ (iz N skozi N je ∞ mnogih daljic), dobimo preslikavo:

$$\hat{\Phi}: S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$$

Ce imamo v mislih okolice, ki smo jih prej definirali za $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$, postane $\hat{\Phi}$ zvezna z zveznim inverzom. Zato lahko na $\hat{\mathbb{C}}$ gledamo kot na S^2. $\hat{\mathbb{C}}$ pravimo tudi **Riemannova sfera**.