Diferencialne enačbe v kompleksnem

Reševanje linearne diferencialne enačbe 2. reda s potenčnimi vrstami

Dana je diferencialna enačba:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (*)$$

kjer sta p, q ustrezni funkciji. Ce sta p, q konstantni, potem rešimo karakteristični polinom in napišemo splošno rešitev. Ce p, q nista konstanti imamo težave z določitvijo katerekoli rešitve. Ce bi poznali eno rešitev, potem drugo neodvisno, lahko dobimo s pomočjo Liouvilleove formule oz. determinanto Wrońskega. Vsekakor je prostor rešitev, če sta p, q zvezni, dvorazsežen.

Enačbo $(*)$ rešujemo s pomočjo razvoja v vrsto. Namesto realne spremenljivke opazujemo kompleksno spremenljivko. Naj bosta p, q holomorfni funkciji na neki okolici točke 0:

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \qquad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k \,;\ \ p_k, q_k \in \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Recimo, da ima enačba $(*)$ rešitev, katero razvijemo v potenčno vrsto:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

kjer so $c_k \in \mathbb{C}$ neznani koeficienti $\forall k \in \mathbb{N}_0$. To vrsto lahko odvajamo in dobimo:

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} z^j \,; \quad (j = k-1)$$
$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(j+2) c_{j+2} z^j \,; \ \ (j = k-2)$$

Te vrste sedaj lahko vstavimo v enačbo $(*)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k + \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) c_{j+1} z^j + \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = 0$$

Te vrste lahko preuredimo oz. zmnožimo in seštejemo, ker če dve posamični vrsti konvergirata absolutno potem je njun produkt neodvisen od vrstnega reda seštevanja. Dodatno če imajo y, p, q konvergencni radij $r > 0$, ga imajo tudi y, y', y'', p, q. Dobimo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left((k+2)(k+1) c_{k+2} + \sum_{j=0}^{k} \big((j+1) c_{j+1} p_{k-j} + q_{k-j} c_j \big) \right) z^k = 0$$

Ker ta vrsta konvergira na $D(0,r)$ so vsi koeficienti pri z^k ničelni:

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + \sum_{k=0}^{k} \Big((j+1)c_{j+1}p_{k-j} + q_{k-j}c_j\Big) = 0; \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Izrazimo $\forall k \in \mathbb{N}_0$:

$$c_{k+2} = -\frac{\sum_{j=0}^{k} \Big((j+1)c_{j+1}p_{k-j} + q_{k-j}c_j\Big)}{(k+2)(k+1)}$$

Ta formula nam pove, da če poznamo koeficiente $c_0, \dots c_{k+1}$ potem lahko določimo c_{k+2}. To pomeni v praksi, da izberemo c_0 in c_1 in potem dobimo vse ostale koeficiente.

Izrek

Ce sta p in q holomorfni funkciji na krogu $D(\alpha, R)$, potem za poljubni kompleksni setevili c_0 in c_1 obstaja natanko ena rešitev y diferencialne enačbe:

$$y'' + py' + qy = 0$$

ki je holomorfna na krogu $D(\alpha, R)$ in zadošča pogojema $y(\alpha) = c_0$ in $y'(\alpha) = c_1$.

Regularna in pravilna singularna točka

Točka α je **regularna** točka diferencialne enačbe:

$$y'' + py' + qy = 0$$

če sta p in q holomorfni na neki okolici točke α. Ce α ni regularna je singularna. Točka je **pravilna singularna točka** enačbe, če sta p in q holomorfni funkciji na kaki punktirani okolici tocke α (torej holomorfni na okolici α razen morda v α), v α ima p pol reda najvec 1, q pa pol reda največ 2.

[Primeri v zvezku za Legendrvo, Besslovo in Gaussovo Hipergeometrijsko]

Karakteristični eksponent

Rešimo enačbo $y'' + py' + qy = 0$ v okolici **pravilne singularne točke** α. Brez škode za splošnost lahko privzamemo $\alpha = 0$. Zato sta funkciji $z \mapsto zp(z)$ in $z \mapsto z^2 q(z)$ holomorfni v $\alpha = 0$.

$$z \cdot p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \qquad z^2 q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k$$

Naj konvergirata na $D(0, R)$. Rešitev diferencialne enačbe iščemo v obliki:

$$y = z^\mu \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{\mu+k}$$

Pripravimo nastavke odvodov:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k) c_k z^{\mu+k-1} \qquad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu+k)(\mu+k-1) c_k z^{\mu+k-2}$$

Prvotno enačbo množimo z z^2 in vstavimo nastavke:

$$z^2y'' + z^2p(z)y' + z^2q(z)y = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\mu + k)(\mu + k - 1)c_k z^{\mu+k} + \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i \sum_{j=0}^{\infty}(\mu + j)c_j z^{\mu+j} + \sum_{i=0}^{\infty} q_i z^i \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{\mu+j} = 0$$

Poglejmo koeficient pred $z^{\mu+k}$, ki mora biti enak 0:

$$(\mu + k)(\mu + k - 1)c_k + \sum_{j=0}^{k}\left((\mu + j)c_j p_{k-j} + c_j q_{k-j}\right) = 0$$

$$\Rightarrow [(\mu + k)(\mu + k - 1 + p_0) + q_0]c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}\left((\mu + j)p_{k-j} + q_{k-j}\right)c_j\,; \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dobili smo rekurzivno zvezo za koeficiente c_k.Tako lahko zopet določimo $c_0 \Rightarrow c_1 \Rightarrow c_2 \Rightarrow \cdots$. Problem je, da moramo določiti se μ. Tega določimo pri členu z^μ:

$$\mu(\mu - 1)c_0 + p_0\mu c_0 + q_0 c_0 = 0 \Rightarrow c_0(\mu(\mu - 1 + p_0) + q_0) = 0$$

Ce je slučajno $c_0 = 0 \Rightarrow y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{\mu+k}$ potem »podtaknemo z k z^μ«, da bomo dobili neničelni koeficient. Na ta način čez čas dosežemo $c_0 \neq 0$. Tako dobimo **Določilno zvezo za koeficient μ**:

$$\mu(\mu - 1 + p_0) + q_0 = \mu^2 + \mu(p_0 - 1) + q_0 = 0$$

Rešitvi enačbe pa imenujemo **karakteristična eksponenta**. Uredimo ju tako, da je :

$$\operatorname{Re}\mu_1 \geq \operatorname{Re}\mu_2$$

Dobljeni polinom je 2. stopnje in ima ničli μ_1 in μ_2. Oznacimo:

$$f(\mu) = \mu(\mu - 1 + p_0) + q_0 = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)$$

Spomnimo se rekurzivne zveze $(*)$. Na levi strani prepoznamo $f(\mu + k)$:

$$\Rightarrow [(\mu + k - \mu_1)(\mu + k - \mu_2)]c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu + j)p_{k-j} + q_{k-j}]c_j\,; \quad \forall k = 1,2,3\ldots$$

Vstavimo najprej v to zvezo μ_1:

$$k(k + \mu_1 - \mu_2)c_k = -\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu_1 + j)p_{k-j} + q_{k-j}]c_j$$

Ker je $\operatorname{Re}\mu_1 \geq \operatorname{Re}\mu_2$ je $(k + \mu_1 - \mu_2) \neq 0$, torej lahko delimo in dobimo:

$$c_k = -\frac{1}{k(k + \mu_1 - \mu_2)}\sum_{j=0}^{k-1}[(\mu_1 + j)p_{k-j} + q_{k-j}]c_j$$

Vstavimo se μ_2:

$$k(\mu_2 - \mu_1 + k)c_k = -\sum_{j=0}^{k-1} \left[(\mu_2 + j)p_{k-j} + q_{k-j}\right]c_j$$

Zgodi se lahko, da je $(\mu_1 - \mu_2) \in \mathbb{N}$. Ce je $(\mu_1 - \mu_2) = m \in \mathbb{N}$, potem dobimo:

$$k(-m + k)c_k = -\sum_{j=0}^{k-1} \left[(\mu_2 + j)p_{k-j} + q_{k-j}\right]c_j$$

Ko je $k = m$ je leva stran enaka 0. V tem primeru postavimo $c_0 = c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$. Sedaj so enačbe izpolnjene za vse do $k = m$. Izberemo $c_m \neq 0$ in izracunamo po rekurzivni zvezi za μ_2 nadaljnje koeficiente $c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ .Ker smo preskocili nekaj potenc v razvoju za $\mu = \mu_2$, ta postopek morda da linearno odvisno rešitev od rešitve, ko naredimo postopek za μ_1.

Izrek

Ce je α pravilna singularna točka enačbe:

$$y'' + py' + qy = 0$$

in sta funkciji $z \mapsto (z - \alpha)p(z)$ in $z \mapsto (z - \alpha)^2 q(z)$ holomorfni na $D(\alpha, R)$ potem obstaja vsaj ena rešitev oblike:

$$y = (z - \alpha)^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - \alpha)^k$$

kjer vrsta konvergira na $D(\alpha, R)$. Ce je razlika $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{N}$, kjer je $\operatorname{Re} \mu_1 \geq \operatorname{Re} \mu_2$, potem drugo linearno neodvisno rešitev dobimo z nastavkom:

$$y = (z - \alpha)^{\mu_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - \alpha)^k$$

kjer tudi ta vrsta konvergira na $D(\alpha, R)$.

Izrek

Naj bo 0 pravilna singularna točka enačbe $y'' + py' + qy = 0$. Naj bosta μ_1 in μ_2 karakteristična eksponenta, urejena tako, da je $\operatorname{Re} \mu_1 \geq \operatorname{Re} \mu_2$. Naj bo $(\mu_1 - \mu_2) \in \mathbb{N}$. Naj enačba **nima** dveh linearno neodvisnih rešitev oblike kot v prejšnjem izreku. Potem je ena rešitev oblike (kot prej):

$$y_1 = z^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

druga pa je oblike:

$$y_2 = y_1 \ln z + z^{\mu_2} f(z)$$

kjer je f holomorfna funkcija v okolici tocke 0 in velja $f(0) \neq 0$.

Besselova enačba in Besselove funkcije

<u>Besselova diferencialna enačba</u> je enačba oblike:

$$z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0; \quad (\nu \geq 0)$$

Ker je $y'' + \frac{y'}{z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0$ je $p(z) = 1/z$ in $q(z) = 1 - \nu^2/z^2$ in zato je 0 pravilna singularna točka Besselove enačbe.

$$z \cdot p(z) = 1 \ \Rightarrow p_0 = 1$$
$$z^2 \cdot q(z) = z^2 - \nu^2 \ \Rightarrow q_0 = -\nu^2$$

To vstavimo v določilno zvezo za karakteristične eksponente:

$$\mu(\mu - 1 + p_0) + q_0 = \mu(\mu - 1 + 1) - \nu^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu^2 - \nu^2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \nu \ \ \mu_2 = -\nu$$

Primer $\mu = \nu$

Ker je $\operatorname{Re} \mu_1 \geq \operatorname{Re} \mu_2$, dobimo eno rešitev z nastavkom:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\nu} \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\nu) c_k z^{k+\nu-1} \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\nu)(k+\nu-1) c_k z^{k+\nu-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+\nu)(k+\nu-1) + (k+\nu) - \nu^2\big) c_k z^{k+\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\nu+2} = 0$$

Poglejmo koeficient pri $z^{k+\nu}$:

$$\big((k+\nu)(k+\nu-1) + (k+\nu) - \nu^2\big) c_k + c_{k-2} = 0; \quad \forall k = 2,3, \dots$$

$$c_k = -\frac{c_{k-2}}{k(k+2\nu)}; k = 2,3, \dots$$

Poglejmo sedaj koeficient pri $z^{1+\nu}$:

$$[(1+\nu)\nu + 1 + \nu - \nu^2] c_1 = 0 \Rightarrow (1+2\nu) c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0; \ (\nu \geq 0)$$

Iz tega podatka izvemo, da so vsi lihi $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$. Ostanejo le se sodi:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2+2\nu)}; \ \ c_4 = -\frac{c_2}{4(4+2\nu)} = +\frac{c_0}{4(4+2\nu) \cdot 2(2+2\nu)}$$

$$\Rightarrow c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n(2+2\nu)(4+2\nu) \dots (2n+2\nu)}$$

Za c_0 izberemo:

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}; \quad \nu! = \Gamma(\nu + 1)$$

Kjer vzamemo gama funkcijo če $\nu \notin \mathbb{N}$. S tako izbiro zagotovimo $J_\nu(0) = 1$.

Tako dobimo predpis za sode koeficiente:

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{\nu+2n}\,n!\;\Gamma(\nu+n+1)}$$

in tako dobimo tudi predpis za **Besselovo funkcijo reda $\boldsymbol{\nu}$**:

$$J_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{\nu+2n}n!\,\Gamma(\nu+n+1)}z^{\nu+2n}$$

To konvergira povsod na $\mathbb{R}$. Razlog lezi v tem, da je $zp(z)=1$ in $z^2q(z)=z^2-\nu^2$, ki sta holomorfni na $\mathbb{C}$. Zato po množenju in izreku dobimo rešitev na $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. V $z=0$ pa vrsta konvergira.

Primer $\mu=-\nu$

1.Primer $\nu\notin\mathbb{N}$

Ce je $\nu\notin\mathbb{N}\Leftrightarrow 2\nu$ je liho število. V enačbi za $k=2\nu$ dobimo $c_{k-2}=0$. Ce postavimo $c_{2j-1}=0$ potem je enačba izpolnjena za lihe indekse. Tako smo definirali $c_{2n-1}=0$. Poglejmo se sode:

$$c_{2n}=-\frac{c_{2n-2}}{2n(2n-2\nu)}$$

Tako dobimo predpis za drugo rešitev Besselove enačbe podobno kot za prvo rešitev:

$$J_{-\nu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-\nu}}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)}$$

2.Primer $\nu\in\mathbb{N}$

Postavimo $\nu=m$. Ena od resitev je:

$$J_m(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+m}$$

Ce ponovimo postopek kot v 1. primeru, da bi dobili 2. rešitev **dobimo linearno odvisno rešitev**:

$$J_{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-m}=$$

tu uvedemo $k=n-m$ in prepoznamo $(-k!)=\Gamma(-k+1)=\infty; k=1,2,3\ldots$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+k}}{k!\,(m+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{m+2k}=(-1)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+m}=(-1)^mJ_m(z)$$

V tem primeru iščemo neodvisno rešitev z nastavkom:

$$J_m\ln z+z^{-m}f(z)$$

kjer je f holomorfna funkija okoli izhodišča in $f(0)\neq 0$.

Posledica
Za vsak $m \in \mathbb{N}$ so edine resitve Besselove enacbe $z^2y'' + zy' + (z^2 - m^2)y = 0$, ki so omejene v kaki okolici izhodišča oblike:

$$C \cdot J_m$$

kjer je $C = konst.$

Dokaz [Posledice]
Splošna rešitev je oblike:

$$CJ_m + d\big(J_m \ln z + z^{-m} f(z)\big)$$

kjer je $f(0) \neq 0$ holomorfna okoli izhodisca. z^{-m} bo neomejen ko $m \to 0$, zato morabiti $d = 0$ za omejene rešitve.

Splošna rešitev Besselove enačbe

Funkciji J_ν in $J_{-\nu}$ sta rešitvi Besselove enačbe. Ker je pri $n = 0$ clen od funkcije $J_{-\nu}$ enak $\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{(-\nu)!}$ neomejen okoli izhodisca, clen od J_ν pa $\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu)}$ omejen, sta J_ν in $J_{-\nu}$ linearno neodvisni.

Za $\boldsymbol{\nu} \notin \mathbb{N}$ je splošna rešitev Besselove enačbe:

$$y = c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu}$$

Lastnosti Besselovih funkcij

Trditev:
Velja:

$$\frac{d}{dz}\big(z^\nu \cdot J_\nu(z)\big) = z^\nu J_{\nu-1}(z) \qquad \frac{d}{dz}\big(z^{-\nu} \cdot J_\nu(z)\big) = z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$$

Dokaz
Dokaz za prvo in drugo je analogen

$$z^\nu J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \frac{z^{2n+2\nu}}{2^{2n+\nu}}$$

$$\Rightarrow \big(z^\nu J_\nu(z)\big)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2\nu)}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \frac{z^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+\nu}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma\big((\nu-1)+n-1\big)} \frac{z^{2n+2\nu-1}}{2^{2n+(\nu-1)}} = z^\nu J_{\nu-1}(z) \ \blacksquare$$

Trditev
Velja:

$$J_\nu'(z) + \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) \quad J_\nu'(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z)$$

$$\frac{2\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) \qquad 2J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$$

Dokaz
Zadnji dve formuli sledita iz prvih dveh (seštejemo/odštejemo). Za dokaz prve formule uporabimo zvezo iz prejšnje trditve:

$$\frac{d}{dz}(z^\nu J_\nu) = \nu z^{\nu-1} J_\nu + z^\nu J_\nu' = z^\nu J_{n-1} \quad \Big| : z^n$$

$$\Rightarrow J_z' + \frac{\nu}{z} J_\nu = J_{\nu-1}$$

Podobno drugo formula dokažemo z uporabo druge zveze iz prejšnje trditve ■.

Opomba:

$$J_0' = J_{-1} = -J_1$$

Trditev
Vse funkcije oblike $J_{k+\frac{1}{2}}; k \in \mathbb{Z}$ so elementarne in se jih izračuna iz rekurzivne zveze:

$$\frac{2\nu}{z} J_\nu(z) = J_{n-1}(z) + J_{\nu+1}(z)$$

kjer sta:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z} \sin z \qquad J_{-1/2} = \sqrt{2/\pi z} \cos z$$

Generirajoča funkcija

Funkcija:

$$e^{z/2(t-t^{-1})}$$

se imenuje **generirajoča funkcija Besselovih funkcij celega indeksa** saj velja naslednje:

$$e^{z/2(t-t^{-1})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z) t^m = J_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(z)(t^m + (-t)^{-m})$$

Dokaz

$$e^{z/2(t-t^{-1})} = e^{\frac{z}{2}t} \cdot e^{-\frac{z}{2t}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!\,2^j} t^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!\,2^k t^k}; \quad t \neq 0$$

Poglejmo koeficient pri t^m (spet uporabimo absolutno konvergenco, da zmnozimo clenoma):

$$\sum_{j-k=m} (-1)^k \frac{z^{j+k}}{j!\,k!\,2^{j+k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+m}}{(k+m)!\,k!\,2^{2k+m}} = J_m(z)$$

Druga formula pa sledi iz dejstva $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$ za $m \in \mathbb{N}$ ■.
Pri fiksnem z, ta zgornji razvoj za generirajoco funkcijo konvergira enakomerno po kompaktih, ki ne vsebujejo $t = 0$.

Vsota spremenljivk v Besselovi funkciji

Za $z, w \in \mathbb{C}$ in $\forall m \in \mathbb{N}$ velja:

$$J_m(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z) J_k(w)$$

Dokaz

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(z+w) t^m = e^{\frac{z+w}{2}(t-t^{-1})} = e^{\frac{z}{2}(t-t^{-1})} e^{\frac{w}{2}(t-t^{-1})} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} J_j(z) t^j \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(w) t^k =$$

tu uvedemo $j = m - k$ da je $j + k = m$:

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z) J_k(w) \right) t^m$$

Primerjamo koeficiente in dobimo:

$$J_m(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{m-k}(z) J_k(w) \ \blacksquare$$

Opomba

$$m = 0 \rightarrow J_0(z+w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{-k}(z) J_k(w) = J_0(z) J_0(w) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(z) J_k(w)$$

Posledica

$$1 = J_0(z)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(z)^2$$

Dokaz [Posledice]

$$w = -z \Rightarrow J_0(z) = J_0(z) J_0(-z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k(z) J_k(-z) =$$

Upoštevamo $J_0(-z) = J_0(z)$ ker je ν soda in $J_k(-z) = (-1)^k J_k(z)$ kjer je J_k soda ko je k sod in J_k liha ko je k lih.

$$= J_0(z)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(z)^2$$

Posledica:

$$|J_0(z)| \leq 1 \qquad |J_k(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \forall k = 1,2, \dots$$

Integralski zapis Besselove funkcije

Za $m \in \mathbb{N}$ in $x \in \mathbb{R}$ velja:

$$J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(m\phi - x\,sin\,\phi)\,d\phi$$

[Dokaz v zvezku]

Alternativna možnost: Neumannova oz. Webrova funkcija

Za vsak $\nu \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}$ je **Neumannova oz. Webrova funkcija** definirana kot:

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

Y resi Besselovo diferencialno enacbo pri ν, saj jo resita J_ν in $J_{-\nu}$. Ker sta J_ν in $J_{-\nu}$ neodvisni rešitvi, sta tudi Y_ν in $Y_{-\nu}$ neodvisni.

Za $\nu = m \in \mathbb{N}$ definiramo:

$$Y_m(z) = \lim_{\nu \to m} Y_\nu(z)$$

Ker je $J_{-m} = (-1)^m J_m$, je L'H:

$$Y_m(z) = \lim_{\nu \to m} Y_\nu(z) = \lim_{\nu \to m} \frac{\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(z)\cos(\nu\pi) - \pi J_\nu(z)\sin(\nu\pi) - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(z)}{\pi\cos(\nu\pi)}$$

$$\Rightarrow Y_m(z) = \frac{1}{\pi}\lim_{\nu \to m}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(z) - (-1)^m \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(z)\right)$$

Oz.:

$$Y_m(z) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(z) - (-1)^m \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(z)\right)\Big|_{\nu=m}$$

Trditev

Funkcija Y_m resi Besselovo diferencialno enačbo $z^2y'' + zy' + (z^2 - m^2)y = 0$

Dokaz

Funkciji J_ν in $J_{-\nu}$ resita Besselovo enačbo $\nu \in \mathbb{N}$. Odvajajmo Besselovo enacbo parcialno po ν:

$$z^2\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)'' + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)' + (z^2 - \nu^2)\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right) = 2\nu y$$

Sedaj vstavimo obe rešitvi:

$$z^2\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)'' + \left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)' + (z^2 - \nu^2)\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right) = 2\nu J_\nu$$

$$z^2\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)'' + \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)' + (z^2 - \nu^2)\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right) = 2\nu J_{-\nu}$$

Prvo enačbo množimo z $1/\pi$ drugo pa z $(-1)^m\, 1/\pi$, naredimo limito $\nu \to m$ in dobimo:

$$z^2Y_m'' + zY_m' + (z^2 - m^2)Y_m = \frac{2m}{\pi}(J_m - (-1)^m J_{-m}) = 0 \quad \blacksquare$$

Izkaze se, da sta Y_m in J_m neodvisni (tisto z Wronskianom).

Opomba
Veljata rekurzivni zvezi:

$$2Y_\nu'(z) = Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) \qquad \frac{2\nu}{z}Y_\nu(z) = Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z)$$

Legendrovi polinomi

Izhajajo iz Legendrove diferencialne enačbe:

$$(z^2 - 1)y'' + 2zy' - \nu(\nu + 1)y = 0$$

ki jo rešimo s pomočjo razvoja v potenčno vrsto. Lahko jo prepišemo v obliko:

$$y'' + \frac{2z}{z^2 - 1}y' - \frac{\nu(\nu + 1)}{z^2 - 1}y = 0$$

Tako sta funkciji:

$$p(z) = \frac{2z}{z^2 - 1} \qquad q(z) = -\frac{\nu(\nu + 1)}{z^2 - 1}$$

in vidimo da ima enačba pravilni singularnosti v $z = \pm 1$. Ostale točke pa so regularne. Enačbo rešimo okoli izhodišča $z = 0$. Ker sta p, q holomorfni na $D(0,1)$ lahko uporabimo nastavek z vrsto. Dobimo:

$$(z^2 - 1)\sum_{k=0}^{\infty}(k - 1)kc_kz^{k-2} + 2z\sum_{k=0}^{\infty}kc_kz^{k-1} - \nu(\nu + 1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k = 0$$

Pogledamo koeficient pri z^k:

$$(k - 1)kc_k - (k + 1)(k + 2)c_{k+2} + 2kc_k - \nu(\nu + 1)c_k = 0$$

$$\Rightarrow c_{k+2} = \frac{(k - \nu)(k + \nu + 1)}{(k + 2)(k + 1)}c_k$$

$$c_2 = -\frac{\nu(\nu + 1)}{2 \cdot 1}c_0 \Rightarrow c_4 = \frac{(2 - \nu)(2 + \nu + 1)}{4 \cdot 3}c_2 = \frac{(-\nu)(-\nu + 2)(\nu + 1)(\nu + 3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}c_0$$

Tako dobimo predpis za c_{2n} in c_{2n+1} (podobno):

$$c_{2n} = \frac{(-\nu)(-\nu + 2)\dots(-\nu + 2n - 2)(\nu + 1)(\nu + 3)\dots(\nu + 2n - 1)}{(2n)!}c_0$$

$$c_{2n+1} = (-1)^n\frac{(\nu - 1)(\nu - 3)\dots(\nu - 2n + 1)(\nu + 2)(\nu + 4)\dots(\nu + 2n)}{(2n + 1)!}c_1$$

Rešitvi Legendrove enačbe

Najprej izberemo $c_0 = 1$ in $c_1 = 0$:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n} = 1 - \frac{\nu(\nu+1)}{2!} z^2 + \frac{\nu(\nu-2)(\nu+1)(\nu+3)}{4!} z^4 - \cdots$$

Potem izberemo $c_0 = 0$ in $c_1 = 1$:

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{(\nu-1)(\nu+2)}{3!} z^3 + \frac{(\nu-1)(\nu-3)(\nu+2)(\nu+4)}{5!} z^5 - \cdots$$

To sta dve rešitvi Legendrove diferencialne enačbe. y_1 je **soda** y_2 pa je **liha** zato sta zagotovo linearno neodvisni.

Legendrov polinom

- $\nu = 2m \in \mathbb{N}$ (sodo število) $\Rightarrow c_{2n} = 0\ \forall n > m$. Torej je y_1 sodi polinom stopnje $2m$
- $\nu = 2m + 1\ \in \mathbb{N}$ (liho stevilo) $\Rightarrow$ Torej je y_2 lihi polinom stopnje $2m + 1$.

V vsakem primeru je ena od rešitev polinom, kadar je $\nu \in \mathbb{N}$. Ce je $\nu = n \in \mathbb{N}$ ta polinom oznacimo z P_n. Ta pomnožimo s primerno konstantno, da je:

$$c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^n}$$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} z^{n-2k}$$

Tako smo dobili predpis za **<u>Legendrov polinom stopnje n</u>**.

Rodriguesova formula

Upoštevamo, da so n-ti odvodi od $(z^2)^{n-k}$ enaki 0, če je $k > \left[\frac{n}{2}\right]$ in da $\forall j < k : \frac{k!}{j!} = (j+1)(j+2) - k$

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{2^n k!\,(n-k)!} \frac{d^n}{dz^n}\left(z^{2n-2k}\right) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{k} (z^2)^{n-k} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} ((z^2-1)^n)$$

Tako smo dobili **<u>Rodriguesovo formulo</u>**:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} ((z^2-1)^n)$$

Generirajoča funkcija

Za dovolj majhne $|t|$ je :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n$$

Funkcija spremenljivke t na levi strani se imenuje **<u>Generirajoča funkcija za Legendrove polinome</u>**.

Lastnosti Legendrovih polinomov

Posledica

Velja:

$$(n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)z\,P_n(z) - nP_{n-1}(z)$$

Dokaz [Posledice]

Odvajamo generirajočo funkcijo po t:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)t^n \qquad \rightarrow \qquad \frac{z-t}{(1-2zt+t^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,P_n(z)t^{n-1}$$

Levo enakost množimo z $(z-t)$, desno pa z $(1-2zt+t^2)$. Rekurzivno zvezo dobimo tako, da primerjamo koeficiente pri t^n.

Trditev

$$P_n(1) = 1 \quad P_n(-1) = (-1)^{n-1}$$

Dokaz

Uporabimo Rodriguesovo formulo:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}[(z^2-1)^n] = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}((z-1)^n(z+1)^n) \\ &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((z-1)^n)^{(k)}((z+1)^n)^{(n-k)} \end{aligned}$$

$$P_1(1) = \frac{1}{2^n n!}\binom{n}{n} n!\,(z+1)^n\,\Big|_{z=1} = 1; \quad (k=0)$$

Podobno pokažemo drugo zvezo.

Ortogonalnost Legendrovih polinomov

Izrek pravi, da so polinomi pravokotni, če $m \neq n$:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)\cdot P_n(x)dx = \delta_{m,n}\frac{2}{2n+1}$$

V primeru $m = n$ dobimo:

$$\|P_m\|^2 = \frac{2}{2m+1}$$

pri čemer je skalarni produkt definiran z:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

na Hilbertovem prostoru $L^2(-1,1)$, kar je napolnitev prostora zveznih funkcij $C[-1,1]$ glede na zgornji skalarni produkt.

Pomembnost Legendrovih polinomov

Po Weierstrassovem izreku so polinomi gosti v $C[-1,1]$ v supremum normi. To pomeni, da za vsako $f \in C[-1,1]$ obstaja zaporedje polinomov $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki konvergira proti f glede na $\|\cdot\|_\infty$ oz. d_∞:

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx < \epsilon^2 \int_{-1}^{1} \|f - q_n\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \|f - q_n\|_2 < \epsilon \|f - q_n\|_\infty \cdot \sqrt{2}$$

$\Rightarrow q_n \to f$ tudi v $L^2(-1,1)$. Ker je stopnja od P_n enaka n, je vsak polinom linearna kombinacija Legendrovih polinomov, kar pomeni, da je linearna ogrinjaca od $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gosta v $C[-1,1]$ oz. $L^2(-1,1)$.

Zaradi pravokotnosti tvorijo **Ortonormirano bazo $\boldsymbol{L^2(-1,1)}$**. To pomeni, da se vsak $f \in L^2(-1,1)$ lahko zapise kot:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n$$

kjer je konvergenca mišljena v prostoru $L^2(-1,1)$, torej glede na $\|\cdot\|_2$. Koeficienti so:

$$\langle f, P_m \rangle = a_m \langle P_m, P_m \rangle = a_m \frac{2}{2m+1}$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{2m+1}{2} \langle f, P_m \rangle = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx$$

Pridružene Legendrove Funkcije

Naj bo P_n n-ti Legendrov polinom. Definirajmo **pridruženo Legendrovo funkcijo $\boldsymbol{P_n^m}$**:

$$P_n^m(z) = (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z); \quad m = 0,1,2, \dots, m$$

Da se dokazati (preko zvitega računa), da P_n^m resi diferencialno enačbo:

$$\left.\big((1 - z^2) y'\big)' - \frac{m^2}{1 - z^2} y = -n(n+1) y \ \right\} \ Ty = \lambda y$$

Rešitve nove enačbe P_n^m so lastne funkcije nekega diferencialnega operatorja.

- $m = 0$: $P_n^0 = P_n \to m = 0$ so vsi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pravokotni
- $m > 0$: $P_n^m(1) = P_n^m(-1) = 0$ (lepi oz. ustrezni robni pogoji)

Pri danemu m za $n = m, m+1, \dots$ so P_n^m lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim. Po splošni teoriji bo veljalo, da so $(P_n^m)_{n\geq m}$ paroma pravokotni.

Ortogonalna baza Hilbertovega prostora $L^2(-1,1)$

Pri vsakem fiksnem $m \in \mathbb{N}_0$ je $(P_n^m)_{n=m}^{\infty}$ ortogonalna baza Hilbertovega prostora $L^2(-1,1)$ in velja:

$$\|P_n^m\|_2^2 = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Hermitovi polinomi

Rešujemo diferencialno enačbo:

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0$$

z nastavkom tako kot prej ⇒ $(k+2)(k+1)c_{k+2} = 2(k-\nu)c_k$. Tako dobimo dve rešitvi:

$$y_1 = 1 - \frac{2\nu}{2!}z^2 + \frac{2^2\nu(\nu-2)}{4!}z^4 - \cdots$$

$$y_2 = z - \frac{2(\nu-1)}{3!}z^3 + \frac{2^2(\nu-1)(\nu-3)}{5!}z^5 - \cdots$$

Ce je $n \in \mathbb{N}_0$, je ena od y_1, y_2 polinom stopnje n. Ta polinom popravimo tako, da ima vodilni koeficient (tisti pri z^n) enak z^n. Označimo ga z H_n in ga imenujemo <u>***n*-ti Hermitov polinom**</u>:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$$

Generirajoča funkcija

Funkcija e^{2zt-t^2} je generirajoča funkcija za H_n:

$$e^{2zt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(z)}{n!} t^n$$

Rekurzivne zveze

Veljajo:

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - H'_{n-1}(z) \quad H'_n(z) = 2nH_{n-1}(z)$$

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z)$$