Robni pogoji

Nihanje strune

V mirovanju struna lezi na realni osi. Struna je vpeta, kar pomeni, da lahko določimo **robna pogoja**:

$$u(0,t) = 0 \quad u(a,t) = 0$$

Iz fizike vemo, da nihanje strune opisuje **parcialna diferencialna enačba**:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

kjer je $c > 0$ hitrost sirjenja valovanja. Določimo se **začetna pogoja**, torej začetno lego in začetno hitrost:

$$u(x,0) = f(x) \quad u_t(x,0) = g(x)$$

Fouriereva metoda separacij spremenljivk

Poiščemo najprej osnovne rešitve, nato pa z njimi zgradimo pravo celotno rešitev:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow T''(t) \cdot X(x) = c^2 X''(x) \cdot T(t)$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$

Leva stran je funkcija samo od x desna pa samo od t torej lahko enakost velja, samo če sta strani konstanti. Postavimo konstantno $-\lambda$:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}$$

Rešimo prvo za X:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \Rightarrow X'' + \lambda X = 0$$

Iščemo samo neničelne rešitve. Zanima nas pogoj za x iz robnih pogojev:

$$u(0,t) = 0 = X(0)T(t)$$

Ce bi bil $X(0) \neq 0$ potem $T(t) = 0; \forall t \Rightarrow u(x,t) = X(x)T(t) = 0$. Zato je:

$$X(0) = 0$$

Po podobni logiki dobimo iz drugega robnega pogoja:

$$X(a) = 0$$

Torej rešujemo enačbo:

$$X'' + \lambda X = 0; \;\; X(0) = X(a) = 0$$

Uporabimo metodo s karakterističnim polinomom $y = e^{\mu x}$ in dobimo:

$$\mu^2 + \lambda = 0$$

$\lambda = 0$

$$\mu^2 = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$$

Iz robnih pogojev:

$$X(0) = 0 = B \quad X(a) = 0 = Aa + B \quad \Rightarrow X = 0$$

Ampak nas ta rešitev ne zanima.

$\lambda < 0$

$$\mu^2 = -\lambda > 0 \Rightarrow \mu_1 = \sqrt{-\lambda} \quad \mu_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

Pogledamo spet robne pogoje:

$$X(0) = A + B \quad X(a) = 0 = Ae^{\sqrt{-\lambda}a} + Be^{-\sqrt{-\lambda}a} = A\left(e^{\sqrt{-\lambda}a} - e^{-\sqrt{-\lambda}a}\right) = 2A\sinh\left(\sqrt{-\lambda}a\right)$$

Ker $\lambda \neq 0$ in $a \neq 0 \Rightarrow \sinh\left(\sqrt{-\lambda}a\right) \neq 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = -A = 0$

Tudi ta rešitev nas ne zanima,

$\lambda > 0$

$$\mu^2 = -\lambda < 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$X(x) = Ae^{i\sqrt{\lambda}} + Be^{-i\sqrt{\lambda}} =$$

$$= A\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + i\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right) + B\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) - i\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right) = (A+B)\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + i(A-B)\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$
$$= C\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + D\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

Poglejmo spet robne pogoje:

$$X(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$X(a) = 0 \Rightarrow D\sin\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0$$

Ce je $D = 0$ potem dobimo $X \equiv 0$ in spet dobimo rešitev ki nas ne zanima. Zato mora veljati:

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}a\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}a = k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Ker je sinus liha funkcija, pozabimo na $k < 0$. Ce je $k = 0$ pa dobimo spet trivialno rešitev. Tako torej se lahko omejimo na:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2; \forall k \in \mathbb{N}$$

Postavimo $D = 1$ in dobimo:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Rešimo za T

Sedaj lahko tvorimo novo funkcijo:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

Pri čemer T_n resi enačbo:

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = -\lambda_n = \left(-\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

Torej rešujemo:

$$T'' + c^2\lambda T = 0$$

Ker je $c^2\lambda > 0$ in $\lambda > 0$ dobimo:

$$T(t) = A\cos\left(c\sqrt{\lambda}t\right) + B\sin\left(c\sqrt{\lambda}t\right)$$

Za $\lambda_n = n\pi/a$ dobimo tako torej:

$$T_n(t) = A_n\cos\left(\frac{\pi n}{a}ct\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi n}{a}ct\right)$$

Skupna rešitev

Tako dobimo rešitev:

$$u_n(x,t) = X_n(t)T_n(t) = \left(A_n\cos\left(\frac{\pi n}{a}ct\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi n}{a}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Ker u_n resi parcialno diferencialno enačbo in zadošča robnim pogojem za vsak $n \in \mathbb{N}$ lahko tvorimo:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n}{a}ct\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi n}{a}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

To formalno resi parcialno diferencialno enačbo in ustreza našim robnim pogojem. Možni problemi so pa:

1.) Ali zgornja vrsta sploh konvergira?
2.) Ali je vsota odvedljiva po x ali po t, enkrat oz. dvakrat?
3.) Za ustrezna A_n in B_n lahko izpolnimo 1. in 2. točko
4.) A_n in B_n nista poljubna, ampak sta določena iz začetnih pogojev po tem, ko f in g razvijemo v vrsti po sinusih in kosinusih

Predpostavimo, da lahko dvakrat odvajamo pod vrsto po x in po t. Tako smo predpostavili, da u res resi našo enačbo.

Začetna pogoja

Razvijemo začetna pogoja:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

Funkciji f, g lahko razsirimo liho na $[-a, a]$ kot $\tilde{f} = -\tilde{f}(-x) = -f(-x); x \in [-a, 0]$ in podobno $\tilde{g} = -\tilde{g}(-x) = -g(-x); x \in [-a, 0]$.

$\tilde{f}$ in $\tilde{g}$ razvijemo v Fourierevi vrsti po sinusih in kosinusih na $[-a, a]$. Ker sta obe lihi, so vsi koeficienti v razvoju pred kosinusom ničelni. Zato je razvoj le po funkcijah oblike $\sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$. Te funkcije tvorijo ortogonalno bazo za L^2. Za njih velja:

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = \frac{1}{2}$$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx \quad \frac{n\pi}{a} c B_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx$$

(Izračunali smo skalarni produkt f z $\sin(\frac{n\pi}{a} \cdot)$ in g z $\sin(\frac{n\pi}{a} \cdot)$). Dobljena funkcija je sicer le kandidat za rešitev.

Opomba

1) Ce je f kosoma zvezna potem Fouriereva vrsta konvergira po točkah k f, ker je f zvezna. V tocki nezveznosti pa konvergira proti povprecju leve in desne limite funkcije f.
2) Ce je f dvakrat zvezno odvedljiva, potem Fouriereva vrsta konvergira enakomerno
3) Ce imata f in g zvezne cetrte odvode, potem je resitev razreda C^2

Neskončna struna

Rešujemo valovno enačbo kot prej:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

d'Alembertova formula

Ker ni robnih pogojev, ne moremo uporabiti Fouriereve metode, zato ne dobimo sistema funkcij s pomočjo katerih zgradimo rešitev. Uvedemo:

$$\xi = x - ct \quad \eta = x + ct$$

$$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = (u_x)_\xi \cdot \xi_x + (u_x)_\eta \cdot \eta_x = \left(u_\xi + u_\eta\right)_\xi + \left(u_\xi + u_\eta\right)_\eta = u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Ker želimo dvakrat zvezno odvedljive rešitve velja: $u_{\eta\xi} = u_{\xi\eta}$

$$\Rightarrow u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Na podoben način dobimo se za t:

$$\Rightarrow u_{tt} = c^2\left(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right)$$

To vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$c^2\left(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right)=c^2\left(u_{\eta\eta}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right)\ \Rightarrow\quad u_{\xi\eta}=0$$

$$\left(u_\xi\right)_\eta=0\ \Rightarrow u_\xi=F_0(\xi)\Rightarrow u(\xi,\eta)=F(\xi)+G(\eta)$$

Vemo $F'=F_0$ in G poljubno odvedljiv

$$\Rightarrow u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$$

Ce sta F in G dvakrat odvedljivi, potem u resi valovno enačbo.

Začetna pogoja

$$u(x,0)=F(x)+G(x)=f(x)$$

$$u_t(x,0)=c\left(G'(x)-F'(x)\right)=g(x)$$

$$F+G=f\ \rightarrow F'+G'=f'$$

$$G'-F'=\frac{g}{c}$$

$$\Rightarrow G'(x)=F'(x)+\frac{g(x)}{c}=\frac{g(x)}{c}+f'(x)-G'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{g(x)}{c}+f'(x)\right)$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{g(s)}{c}+f'(s)\right)ds+C_1=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds+C;\left(C=C_1-f(0)\right)$$

kjer je C poljubna konstanta.

$$F(x)=f(x)-G(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds-C$$

Skupna rešitev

Sedaj lahko zapišemo skupno rešitev:

$$u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)=\frac{1}{2}\left(f(x-ct)+f(x+ct)\right)+\frac{1}{2C}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds$$

Funkcija u je dvakrat odvedljiva, ce je f dvakrat odvedljiv, u pa enkrat. Ta formula se imenuje **d'Alembertova formula**. Upoštevamo začetne pogoje:

$$u(x,0)=f(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(x)\right)+\frac{1}{2C}\int_x^x g(s)ds$$

$$u_t(x,0)=g(x)=\cdots$$

Ta postopek omogoča reševanje valovne enačbe na $\mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}^+=[0,\infty)$ bi funkcije naprej razširili na $\mathbb{R}$ (sodo), potem bi uporabili to izpeljavo za valovno enačbo na $\mathbb{R}$.

Prevajanje toplote (v 1D)

Rešujemo enačbo:

$$u_t = cu_{xx}; c = konst. > 0$$

Rešujemo za $t > 0$ pri **robnih pogojih**:

$$u(0,t) = u(a,t) = 0$$

z **začetnim pogojem**:

$$u(x,0) = f(x)$$

Fourierova separacija spremenljivk

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Torej rešujemo enačbo:

$$X(x) \cdot T'(t) = cX''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

Leva stran je odvisna samo od t, desna pa samo od x. Enakost velja lahko samo, če sta obe konstantni.

Rešimo najprej za X

Imamo enačbo:

$$X'' + \lambda X = 0$$

in kot pri valovni enačbi izrazimo začetne pogoje:

$$X(0) = X(a) = 0$$

Kot pri valovni enačbi vemo, da dobimo ne trivialne rešitve le pri $\lambda > 0$. Tako dobimo:

$$\mu^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Upoštevamo začetne pogoje:

$$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$X(a) = 0 \Rightarrow B\sin(\sqrt{\lambda}a) \Rightarrow \lambda = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$$

Tako smo dobili:

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \qquad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$$

Rešimo se za T:

Za $\lambda = \lambda_k$ dobimo:

$$T_k(t) = D_k e^{-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 ct}$$

Tako dobimo skupno:

$$u_k(x,t) = D_k e^{-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 ct} \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)$$

Formalno lahko zapišemo:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$$

Začetni pogoj pa je:

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right) = f(x)$$

f razvijemo v sinusno Fourierovo vrsto na $[0,a]$ in dobimo rešitev:

$$A_k = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)dx$$

Prevajanje toplote (različni začetni pogoji)

Rešujemo problem oblike:

$$u_t = cu_{xx}; t > 0, c > 0$$

$$u(0,t) = A \quad u(a,t) = B \quad u(x,0) = f(x)$$

Temperatura na krajiščih je konstantna. Definiramo funkcijo, ki resi PDE:

$$v(0,t) = v(a,t) = 0$$

Tudi začetni pogoj moramo transformirati:

$$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$$

$$v(0,t) = 0 = v(a,t) \Leftrightarrow w(0,t) = A, w(a,t) = B$$

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - w(x,0)$$

Vzamemo:

$$\begin{aligned} &v(x,t) = u(x,t) - A - kx \\ &v(0,t) = u(0,t) - A - 0 = 0 \\ &v(a,t) = u(a,t) = -A - ka = 0 = B - A - ka \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = \frac{B-A}{a}$$

$$v(x,t) = u(x,t) - A - \frac{B-A}{a}x$$

v resi toplotno enačbo:

$$v_t = cv_{xx}$$

$$v(0,t) = v(a,t) = 0 \quad v(x,0) = f(x) - A - \frac{B-A}{a}x$$

in potem nadaljujemo kot v prejšnjem primeru.

Sturm-Liouvilleov problem

Rešujemo problem:

$$p(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = -\lambda y$$

na $[a,b]$ pri robnih pogojih oblike:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

Pri čemer velja $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ in $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Takim pogojem pravimo **ločeni**. Funkcije P, Q, R so zvezne na $[a,b]$. Parameter λ je neznan. Nastavimo ga tako, da dobimo netrivialne rešitve.

Prostor $C[a,b]$ opremimo s skalarnim produktom:

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

Definirajmo operator $L: C^2[a,b] \to C[a,b]$

$$(Ly)(x) = P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x)$$

$$Ly = Py'' + Qy' + Ry$$

L je linearna preslikava, ki spada v razred linearnih diferencialnih operatorjev 2. reda. Nas problem se torej glasi:

$$Ly = -\lambda y$$

kar je **problem lastnih vrednosti in lastnih funkcij** za L.

Spomnimo se: Hermitske oz. Sebi-adjungirane matrike

$$A = A^*$$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

Vemo, da je $A = A^* \Leftrightarrow \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$.

Torej:

$$\langle Lu, v \rangle = \int_a^b (Pu'' + Qu' + Ru)\bar{v}dx =$$

Tu naredimo perpartes:

$$= Pu'\bar{v}\ \Big|_a^b - \int_a^b (P\bar{v})'u'dx + Qu\bar{v}\Big|_a^b - \int_a^b u(Q\bar{v})'dx + \int_a^b Ru\bar{v}dx$$

$$= [Pu'\bar{v} - (P\bar{v})'u + Qu\bar{v}]\Big|_a^b + \int_a^b u((P\bar{v})'' - (Q\bar{v})' + R\bar{v})dx$$

$u \in C^2[a,b], P \in C^2[a,b], Q \in C^1[a,b], R \in C^1[a,b];\ \ P, Q, R$ realne

Zaradi realnosti P, Q, R dobimo:

$$\langle Lu, v\rangle = [P(u'\bar{v} - \bar{v}'u) + (Q - P')u\bar{v}]\Big|_a^b + \int_a^b u\overline{\big(((Pv)'' - (Qv)' + Rv)\big)}\,dx$$

Ce je $[P(u'\bar{v} - \bar{v}'u) + (Q - P')u\bar{v}]\Big|_a^b = 0$, potem je:

$$\langle Lu, v\rangle = \int_a^b u\overline{(\dots)}dx = \langle u, (Pv)'' - (Qv)' + Rv\rangle$$

V temu primeru bi lahko formalno definirali:

$$L^*v = (Pv)'' - (Qv)' + Rv$$

Zato rečemo, da je L formalno sebi adjungirana:

$$(Pv)'' - (Qv)' + Rv = Pv'' + Qv' + Rv'$$

$$L^*v = Lv$$

$$\Rightarrow P''v + 2P'v' + Pv'' - Qv' - Q'v + Rv = Pv'' + Qv' + Rv$$

$$(2P' - 2Q)v' + (P'' - Q')v = 0 \Leftrightarrow P' = Q, P'' = Q'$$

To oboje je izpolnjeno, če je $P' = Q$. Torej L je formalno sebi-adjungiran, če je $P' = Q$. Dobimo:

$$Ly = Py'' + Qy' + Ry = P + P'y' + Ry = (Py')' + Ry$$

Zanima nas problem:

$$Ly = (Py')' + Ry$$

z ločenima robnima pogojema.

Trditev:
Ce je diferencialni operator formalno sebi-adjungiran, potem velja Greenova identitete:

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle + [P(u'\bar{v} - u\bar{v}')]\Big|_a^b$$

Dokaz:
Ker je L formalno sebi-adjungiran, je $Q = P'$, zaradi cesar se zintegrirani del ustrezno poenostavi.

Posledica:
Ce funkciji $u, v \in C^2[a,b]$ zadoscata locenima robnima pogojema, potem je $\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$ za vsak formalno sebi-adjungiran diferencialni operator L.

Prostori z utežjo

Opazujemo operator:

$$Ly = -\lambda \omega y$$

kjer je ω dana pozitivna funkcija na $[a, b]$. To funkcijo ω imenujemo **utež**, L pa je diferencialni operator podan s predpisom:

$$Ly = Py'' + Qy' + Ry$$

Število λ, ce imamo netrivialne rešitve enačbe $Ly = -\lambda \omega y$ pri robnih pogoji, se imenuje **lastna vrednost** za L, y pa je **lastna funkcija**. Vpeljemo novi skalarni produkt:

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\omega(x)dx$$

To je **skalarni produkt z utežjo** ω. Funkciji f, g sta ortogonalni z utezjo ω, ce je $\langle f, g \rangle_\omega = 0$. Norma je $\|f\|_\omega = \sqrt{\langle f, f \rangle_\omega}$. Napolnitev prostora $C[a, b]$ glede na $\| \cdot \|_\omega$ pa označimo $L^2_\omega(a, b)$.

Trditev:

Lastne vrednosti formalno sebi-adjungiranega operatorja L, kjer P nima ničel, pri ločenih robnih pogojih so realne. Lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim pa so med seboj ortogonalne z utežjo ω. Za vsako lastno vrednost λ sta katerikoli pripadajoči lastni funkciji linearno odvisni.

Dokaz

Naj bo $Lu = -\lambda u \omega$, $\langle Lu, u \rangle = \langle u, Lu \rangle$ in robni pogoji ničelni:

$$\langle Lu, u \rangle = \langle -\lambda u \omega, u \rangle = -\lambda \langle u, u \rangle_\omega$$

$$\langle u, Lu \rangle = \langle u, -\lambda u \omega \rangle = -\bar{\lambda} \langle u, u \rangle_\omega$$

To dvoje je enako in ker je $\langle u, u \rangle \neq 0$ je $\lambda = \bar{\lambda}$ iz cesar sledi, da je λ realna.

Naj bo $Lu = -\lambda u \omega$ in $Lv = -\mu v \omega \Rightarrow u \perp_W v$

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle = \langle u, -\mu \omega v \rangle = -\bar{\mu} \langle u, v \rangle_\omega$$
$$\langle -\lambda u \omega, v \rangle = -\lambda \langle u, v \rangle_\omega$$

To dvoje je enako:

$$\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle u, v \rangle_\omega = 0 \Rightarrow \langle u, v \rangle_\omega = 0; \quad \lambda \neq \mu$$

Naj bosta u, v lastni funkciji za λ. u, v sta linearno odvisni.

Poglejmo robni pogoj $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$. Ker u, v lastni funkji pri ločenih robnih pogojih $\Rightarrow$

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0$$
$$\alpha_1 v(a) + \alpha_2 v'(a) = 0$$

V $\mathbb{R}^2$ je vektor $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ pravokoten na $\begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{bmatrix}$. Zato sta $\begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{bmatrix}$ linearno odvisna.

Zato obstajata C_1, C_2 da je:

$$C_1 \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} v(a) \\ v'(a) \end{bmatrix} = 0 \quad (*)$$

Vpeljemo $y = C_1 u + C_2 v$. Ker je $Lu + \lambda\omega u = 0 = Lv + \lambda\omega v$, je tudi $Ly + \lambda\omega y = 0$. Zato y resi linearno diferencialno enačbo 2. reda z zveznimi koeficienti. Ker je po $(*)$ $y(a) = y'(a) = 0$. Zaradi enoličnosti rešitve Cauchyjeve naloge:

$$Ly + \lambda y = 0; \quad y(a) = y'(a) = 0$$

je $y \equiv 0 \Rightarrow C_1 u + C_2 v = 0$ ∎.

Regularni Sturm-Liouvilleov problem

Naj bo L oblike $Ly = (Py') + Ry$, kjer je P realna zvezno odvedljiva, R realna zvezna na $[a, b]$. Naj bosta P in ω strogo pozitivni funkciji na $[a, b]$. Problem, pri kateremu moramo določiti $\lambda \in \mathbb{C}$, za katere ima enačba:

$$Ly = -\lambda\omega y$$

pri ločenih robnih pogojih:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0; &\quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0; &\quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0 \end{aligned}$$

katero netrivialno rešitev $y \in C^2[a, b]$ in da dolocimo vse take y imenujemo **regularni Sturm-Liouvilleov problem**.

Sturm-Liouvilleov izrek

Za vsaki regularni Sturm-Liouvilleov problem obstaja ortogonalna baza Hilbertovega prostora $L^2_\omega(a, b)$, sestavljena iz realnih lastnih funkcij $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operatorja L. Za lastne vrednosti, ki pripadajo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ velja $\lambda_n \to \infty$. Za vsak $y \in C^2[a, b]$, ki zadošča robnima pogojema vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle y, u_n \rangle u_n$$

konvergira protu y na $[a, b]$ in tudi v $L^2_\omega(a, b)$.

Opomba

Vemo že, da so lastne vrednosti enostavne. Za vsako lastno vrednost imamo natanko eno lastno funkcijo (do skalarnega večkratnika določeno). Vemo tudi da so pravokotne (del ortornormirane baze $L^2_\omega(a, b)$).

Stacionarna porazdelitev temperature na krogli ($\Delta u = 0$ na krogli)

Zanima nas reševanje enačbe:

$$u_t = c\Delta u$$

Temperatura ob času t v točki (r, ϕ, θ) je enaka:

$$u(r, \phi, \theta, t)$$

V sferičnih koordinatah je:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta} (u_\theta \sin\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_{\phi\phi}$$

Temperatura na površini krogle je podana z $u(a, \phi, \theta) = f(\theta, \phi)$. Ker nas zanima stacionarna porazdelitev je $u_t = 0$. Zato rešujemo enačbo:

$$\Delta u = 0$$

na krogli $K(0, a)$ pri robnem pogoju $u(a, \phi, \theta) = f(\theta, \phi); r < a$.

Fouriereva metoda separacije spremenljivk

$$u(r, \phi, \theta) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

$$\Rightarrow R''\Theta\Phi + \frac{2}{r} R'\Theta\Phi + \frac{1}{r^2 \sin\theta} (\Theta' \sin\theta)' R\Phi + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \Phi'' R\Theta = 0$$

$$r^2 \sin^2\theta \left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) + \sin\theta \frac{(\Theta' \sin\theta)'}{\Theta} = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

Po podobnem triku morata biti obe strani konstantni, na primer m^2. Tako dobimo:

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \qquad r^2 \left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) = \frac{m^2}{\sin\theta} - \frac{(\Theta' \sin\theta)'}{\Theta}$$

Rešimo najprej za Φ

Ker sprememba kota ϕ za $2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ne vpliva na lego tocke v prostoru je ϕ 2π-periodicna. Zato je Φ oblike:

$$\Phi = A\cos(m\phi) + B\sin(m\phi)\,; \;\; m \in \mathbb{Z}$$

Lahko vzamemo $m \in \mathbb{N}_0$.

Reševanje ostalih dveh

V enačbi:

$$r^2 \left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) = \frac{m^2}{\sin\theta} - \frac{(\Theta' \sin\theta)'}{\Theta} = \lambda$$

spet opazimo, da je leva stran funkcija samo r in desna samo θ. Zato sta obe konstantni, na primer λ.

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = \lambda \rightarrow r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0$$

$$\sin\theta\,(\Theta' \sin\theta)' + (\lambda \sin\theta - m^2) = 0$$

Prva enačba za r je Cauchy-Eulerjeva enačba. Je 2. reda in linearna. Vzamemo nastavek $R = r^\mu$:

$$\Rightarrow r^2\mu(\mu - 1)r^{\mu-2} + 2r\mu r^{\mu-1} - \lambda r^\mu = 0$$

$$\mu(\mu - 1) + 2\mu - \lambda = 0$$

Splošna rešitev:

$$R(r) = Ar^{\mu_1} + Br^{\mu_2}; \quad \mu_1 \neq \mu_2$$

$$R(r) = Ar^{\mu} + Br^{\mu} \ln r\,; \;\; \mu = \mu_1 = \mu_2$$

Pri enačbi za Θ uvedemo $s = \cos\theta$ in zapišemo $\Theta = \Theta(s)$:

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{ds}\frac{ds}{d\theta} = \frac{d\Theta}{ds}(-\sin\theta)$$

$$\Theta' \sin\theta = -\frac{d\Theta}{ds}\sin^2\theta = -\frac{d\Theta}{ds}(1-\cos^2\theta) = -\frac{d\Theta}{ds}(1-s^2)$$

Sedaj enačbo preoblikujemo v $\Theta = \Theta(s)$:

$$\sin\theta\,(\Theta'\sin\theta)' = \sin\theta\,(-\sin\theta)\frac{d}{ds}(\Theta'\sin\theta) = -\sin^2\theta\,\frac{d}{ds}\left[-(1-s^2)\frac{d\Theta}{ds}\right]$$

$$(1-s^2)\frac{d}{ds}\left((1-s^2)\frac{d\Theta}{ds}\right) + (\lambda(1-s^2) - m^2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left((1-s^2)\frac{d\Theta}{ds}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-s^2}\right)\Theta = 0 \qquad (*)$$

To enačbo pa prepoznamo. Rešijo jo pridružene Legendrove funkcije ($m = 0 \to$ Legendrovi polinomi). To je enačba oblike:

$$\left((1-z^2)y'\right)' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-z^2}\right)y = 0$$

Ce je $\lambda = n(n+1); n \in \mathbb{N}$, so resitve nase enacbe pridruzene Legendrove funkcije P_n^m. Vemo, da pri fiksnem m tvorijo $(P_n^m)_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$ ortogonalno bazo prostora $L^2(-1,1)$.

Pri robnemu pogoju $u(a,\theta,\phi) = f(\theta,\phi)$ predpostavimo, da je odvisen le od θ. Torej neodvisen od $\phi \Rightarrow \Phi = konst. \Rightarrow m = 0$. Nasa diferencialna enačba $(*)$ pri $\lambda = n(n+1)$ sedaj postane Legendrova diferencialna enacba, katere rešitve so Legendrovi polinomi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ki tvorijo ortogonalno bazo prostora $L^2(-1,1)$.

Ker je $\lambda = n(n+1)$, pri resevanju Cauchy-Eulerjeve enačbe dobimo karakteristično enačbo $\mu_{1,2}$:

$$r^2R'' + 2rT' - n(n+1)R = 0 \Rightarrow (\mu - n)(\mu + n + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 = n, \mu_2 = -n-1$$

Torej je:

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n-1}; n \in \mathbb{N}$$

Pri drugem členu opazimo, da gre $\to \infty$, ko $r \to 0$, kar je nefizikalno. Ker mora biti R omejena okoli izhodišča je $B = 0$.

$$\Rightarrow R_n(r) = r^n$$

Skupaj je potem:

$$u_n(r,\theta,\phi) = R_n(r)\Theta_n(\theta)\Phi_n(\phi)$$

Pod vsemi pogoji dobimo:

$$u_n(r,\theta) = r^n P_n(\cos\theta)$$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta)$$

Ce vrsta konvergira, če jo ustrezno krat lahko odvajamo po ustreznih spremenljivkah, potem tudi u resi enačbo.

Konstante A_n

Konstante A_n dobimo iz robnega pogoja:

$$u(a,\phi,\theta) = u(a,\theta) = f(\theta)$$

Dobimo:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos\theta)$$

To je naša rešitev. Koeficienti:

$$\theta = \arccos s \Rightarrow f(\arccos s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(s)$$

Ker $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tvorijo ortogonalno bazo za $L^2(-1,1)$ dobimo:

$$\int_{-1}^{1} f(\arccos s)P_m(s)ds = A_m a^m \int_{-1}^{1} P_m(s)^2 ds = A_m a^m \frac{2m+1}{2}$$

Vstavimo $s = \cos\theta$:

$$A_m = \frac{2}{2m+1}\frac{1}{a^m}\int_0^{\pi} f(\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

V splošnem, če je $f(\theta,\phi)$ namesto $P_n(\cos\theta)$, v tem primeru dobimo funkcije $P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi$ in $P_n^m(\cos\theta)\sin m\phi$.