Posebna Teorija Relativnosti

Ali fizikalni zakoni veljajo enako za vse opazovalce?

Inercialni opazovalni sistem

Inercialni opazovalni sistem je koordinatni sistem, v kateremu določimo lego (»koordinate«) in ure, s katerimi merimo čas. Poleg tega pa mora biti **nepospešen**.

Klasična Fizika: Galilejeve transformacije

Iz klasične fizike vemo, da veljajo **Galilejeve transformacije** (na primer za zvok).Imamo situacijo, kjer imamo sistema S in S', kjer se S' giblje glede na S vzdolz x osi s hitrostjo $\overrightarrow{v_0}$. S in S' se ob času $t = t' = 0$ prekrivata. Kasneje velja $t = t'$. To je **absolutni čas** (naša vsakdanja izkušnja).
Za izmerjene koordinate velja:

$$t = t' \qquad x = x' + v_0 t \qquad y = y' \qquad z = z'$$

Ker privzemamo $t' = t \Rightarrow \ddot{x}' = \ddot{x}$

Osnovni zakoni fizike, so enaki v sistemih, ki se drug glede na drugega gibljejo **nepospešeno**. To je **Galilejska invarianca**.
Napovedujejo se težave pri svetlobi, za katero Galilejske transformacije ne veljajo.

Medij za prenos svetlobe

Luminiferos Aether (»svetlobnonosni eter«)

Teorija, da obstaja eter, ki je medij, ki omogoča prenos EM valovanja. Za prazen prostor bi torej moralo veljati, da:

- Je napet kot struna (tension)
- Je ∞ tog in nestisljiv
- Ne sme ovirati gibanja teles v njemu

To je vodilo v vrsto poskusov o obstoju etra

Aberacija svetlobe

Razlaga prof. Zwitterja, kako je potrebno loviti svetlobo v teleskop v smer gibanja zemlje, kot če tečeš v dežju z dežnikom in ga moraš nagniti naprej. Vsebuje relativistični popravek (tisti koren).

$$\tan\theta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{\sin\theta'}{\cos\theta' - \frac{v}{c}}$$

Fizojeva meritev Frenelovega tlaka

Poskus preveriti če voda vleče eter sabo:

$$v_x' = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}} = \frac{c}{n} - \not{f} v + \cdots$$

kjer je $\not{f}$ Frenelov koeficient

Michelson-Morleyjev poskus (ether wind)

Poskušala sta izmeriti relativno gibanje zemlje glede na eter. (Ali je pot žarkov kot veslanje prečno čez reko?). Uporabljala sta interferometer in primerjala hitrosti dveh pravokotnih žarkov svetlobe. Ce bi zaznala premikanje relativno premikanje materije skozi stacionarni eter (**ether wind**), bi v interferometru videla interferenčne obroče/proge.

$$\Delta n = \frac{L}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}$$

Pričakovala sta $\Delta n = 0.4$. Dobila pa $\Delta n = 0$. Pokazala sta:

- Gibanje zemlje skozi mirujoči eter ni možno zaznati (torej to **ni** kot veslanje colna po reki)
- Hitrost svetlobe v obeh krakih interferometra je enaka
  $\Rightarrow$ **c je neodvisna od gibanja opazovalca!**

Michelson-Morleyjev eksperiment ubije idejo etra kot absolutnega koordinatnega sistema!

Einsteinovi postulati relativnosti

1. *Fizikalni zakoni imajo enako obliko v vseh inercialni sistemih*
2. *Hitrost svetlobe (v vakuumu) je enaka (c) v vseh inercialnih sistemih*

Iz drugega postulate sledi, da je hitrost svetlobe torej tudi neodvisna od hitrosti oddajnika. (Npr. π^0, pospešen na $v \approx c$, razpade na 2γ, ki potujeta tudi z c in ne $2c$)

Dogodki in opazovalci (Event and Observer)

<u>Dogodek</u> je nekaj kar se zgodi (udar strele, rojstvo). Ni odvisen (»ne pripada«) od inercialnega sistema.

Dogodke opisujejo **<u>opazovalci</u>**, ki pa pripadajo nekemu inercialnemu sistemu.

Relativnost sočasnosti

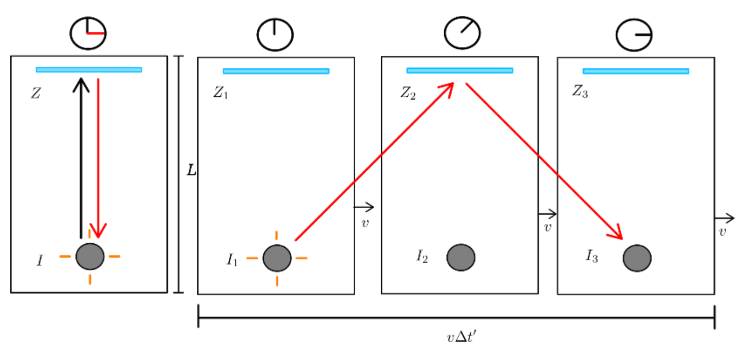
Kar je sočasno za S ni sočasno za S'. Spomni se na izvirni Einsteinov zgled z vlakom v katerega trčita dve streli.

Dilatacija (podaljšanje) časa

Svetlobni blisk do zrcala Z in nazaj potrebuje:

$$\Delta t = \frac{2L}{c}$$

S tem smo izmerili casovni interval med dvema dogodkoma, ki se imenuje **proper time interval (lastni casovni interval)**.

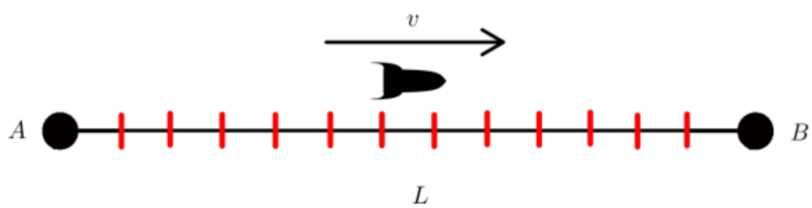


Ce pa se opazovalec giblje glede na škatlo s hitrostjo v pa dobimo, če mora veljati $c = c'$:

$$c\Delta t' = 2\sqrt{L^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t' = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ura, ki meri lastni časovni interval je prisotna ob obeh dogodkih. Gibanje ne vpliva na lastnosti ure. Torej, nelastni čas je vedno daljši od lastnega. Temu pravimo **dilatacija časa**.
Eksperimentalno to lahko potrdimo z merjenjem življenjskega časa mionov v atmosferi, ki pridejo iz kozmičnih žarkov. (Merjenje število mionov na vrhu Mt. Washington in na dni v Cambridge)

Kontrakcija (krčenje) dolžin



Dober prikaz za krčenje dolžin je primer z vesoljsko ladjo, ki potuje od točke A do tocke B mimo markerjev. V vesoljskem sistemu za pot $A \to B$ potrebuje ladja čas:

$$t = \frac{L}{v}$$

To je koordinatni (nelastni) čas (dve različni uri).
Ura na vesoljski ladji (torej ista pri dogodkih A in B) pa meri lastni časovni interval:

$$t' = \frac{L}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Pilot vesoljske ladje vidi, da se mu markerji bližajo z hitrostjo $-v$. Za prepotovano razdaljo izračuna:

$$L' = (hitrost\ priblizevanja\ markerjev) \cdot (njegov\ cas) = v\frac{L}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Dolžine, ki so pravokotne na relativno hitrost opazovalnih sistemov, se pri prehodu iz enega opazovalnega sistema v drug ne spremenijo.

Lorentzeve transformacije

Lorentzeve transformacije nadomestijo Galilejeve pri hitrostih primerljivimi s c, pri pocasnih v primerjavi s c pa se spremenijo nazaj v Galilejeve
Radi bi povezali dogajanje v $S = \{t, x, y, z\}$ z dogajanjem v $S' = \{t, x, y, z\}$ in želimo linearne transformacije.

Poskus (kvazi-izpeljava):

$$x' = \gamma(x - vt)$$

Kjer je $\gamma = \gamma(v) \neq \gamma(x)\ ali\ \gamma(t)$. Veljati mora tudi $\lim_{v \to 0} \gamma(v) = 1$. Za obratno transformacijo obrnemo črtice in predznake pred hitrostmi:

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad (*)$$

Torej:

$$x' = \gamma(\gamma(x' + vt') - vt) = \gamma^2 x' + \gamma^2 vt' - \gamma vt$$

Izrazimo t:

$$t = \gamma t' + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma v} x' = \gamma\left(t' + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 v} x'\right) \qquad (**)$$

Torej vidimo, da Lorentzeva transformacija za časovno koordinato preplete časovno in krajevno koordinato »drugega« sistema.

Kaj je γ?

Vemo, da opazovalca vidita: $x = ct,\ x' = ct'$. Ob upoštevanju $(*)$ in $(**)$ dobimo:

$$c = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma\left(t' + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2 v} x'\right)} = \frac{c + v}{1 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}}$$

$$c + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\frac{c^2}{v} = c + v \Rightarrow \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} = v^2/c^2$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Temu γ pravimo **Lorentzev (relativistični) faktor**. Vse transformacije so torej:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} x\right) & \qquad t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} x'\right) \\ x' &= \gamma(x - vt) & x &= \gamma(x' + vt') \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \end{aligned}$$

V zvezku je tudi potrditev, da te transformacije delujejo za dilatacijo časa in kontrakcijo dolžin.

Relativistična transformacija hitrosti

Klasična transformacija (Galilejska) hitrosti ne bo ok. Imejmo delec, ki se premika z hitrostjo $\vec{u}'$ v sistemu S', ki se giblje s hitrostjo v glede na S:

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \qquad dy' = dy \qquad dz' = dz \qquad dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)$$

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \Rightarrow u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

$$u_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow u_z' = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

Preverimo lahko limiti:

- $|v| \ll c\ (\gamma \to 1)\ \Rightarrow u_x = u_x' + v \qquad u_y = u_y' \qquad u_z = u_z'$
- $u_x \to c \qquad\qquad \Rightarrow u_x' \to \frac{c-v}{1-\frac{v}{c}} \to c$

Nikjer nismo zahtevali, da bi bilo gibanje v S' enakomerno. Zapisali smo Lorentzeve transformacije v diferencialni obliki, kar pomeni, da zapisanje transformacije veljajo za **trenutne** hitrosti $\vec{u}$ in $\vec{u}'$.

Zgled: Relativistični popravek pri zvezdni aberaciji
Definiramo $S \equiv$ Sonce. $S' \equiv$ Zemlja. Zvezdo vidimo pod kotom θ, merjeno v S.
V sistemu S imamo:

$$u_x = -c\cos\theta \qquad u_y = -c\sin\theta \qquad u_x^2 + u_y^2 = c^2 \qquad \tan\theta = \frac{u_y}{u_x}$$

V sistem S' pa preko transformacij dobimo:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} = \frac{-c\cos\theta - v}{1 + \frac{v}{c}\cos\theta} \qquad u_y' = \frac{-c\sin\theta}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right)} \qquad u_x'^2 + u_y'^2 = c^2 \qquad \tan\theta' = \frac{u_y'}{u_x'}$$

Iz tega dobimo:

$$\Rightarrow \tan\theta' = \frac{c\sin\theta\,(1+\beta\cos\theta)}{\gamma(1+\beta\cos\theta)(c\cos\theta + v)} = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{v}{c}}$$

Taksno aberacijo moramo upoštevati tudi pri sevanju delcev. (Sevanje zgleda vedno bolj naprej v smeri gibanja)

Transformacija pospeškov

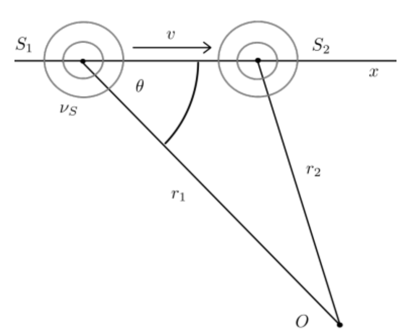
Ce je $\vec{a} = konst.$ v enem sistemu je **nujno** $\vec{a}' \neq konst.$ v drugem! V formule za transformacije pospeškov se prikradejo **hitrosti**, te pa se spreminjajo s časom!

$$a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3}$$

$$a_y' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3}\left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)a_y + \frac{v}{c^2}u_y a_x\right]$$

$$a_z' = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3}\left[\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)a_z + \frac{v}{c^2}u_z a_x\right]$$

Relativistični Dopplerjev pojav



Za relativistično Dopplerjev pojav je vazna samo relativna hitrost med izvorom in detektorjem.

Čas, ki ga signal S_1 potrebuje do O je $\frac{r_1}{c}$. Izvir odda nov val, ko pride v S_2, do opazovalca O pride po $t = \Delta t_x + \frac{r_2}{c}$.
Čas med sprejemom signalov v O je $\Delta t_O = \Delta t_x + \frac{r_2}{c} - \frac{r_1}{c}$

Ce je izvir dovolj daleč od opazovalca (mnogo λ stran) lahko poenostavimo:

$$r_2^2 = r_1^2 + \overline{S_1S_2}^2 - 2r_1\overline{S_1S_2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r_2 \approx r_1 - \overline{S_1S_2}\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r_2 - r_1 \approx -\overline{S_1S_2}\cos\theta$$

In lahko potem zapišemo:

$$\Delta t_O = \Delta t_x - \frac{\overline{S_1S_2}}{c}\cos\theta = \Delta t_x - \frac{v\Delta t_x}{c}\cos\theta = \Delta t_x\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

$\frac{1}{\nu_s}$ = je cas med valovoma, kot ga »izmeri« izvir sam (torej lastni cas).

Δt_x = cas med istima dogodkoma (emisija prvega in drugega vala) merjen v sistemu O

$$\frac{1}{\nu_s} = \Delta t_x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta t_O = \Delta t_x\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) = \frac{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}{\nu_s\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\nu_O}$$

Torej dobimo:

$$\nu_O = \nu_s\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

Limitna primera:

- $\theta = 0°$ $\qquad \nu_o = \nu_s\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$
- $\theta = 90°$ $\qquad \nu_o = \nu_s\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Torej tudi pri transverzalnem (ko se izvor giblje pravokotno na zveznico med njim in opazovalcem) Dopplerjevem pojavu pride do spremembe frekvence, kar je posledica dilatacije časa.

Prostor-čas (Spacetime)

Lorentzeve transformacije lahko prepišemo v lepšo obliko:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \qquad x' = \gamma(x - \beta ct)$$

Produkt ct' bi radi videli kot cetrto (ali »prvo«/ »ničto«) koordinato poleg x, y, z
Vpeljemo štirirazsežen prostor, točke v temu prostoru so določeno s četverico $\{ct, x, y, z\}$. Uredimo jih:

$$\underline{r} = (ct, x, y, z)^T = (ct, \vec{r})^T$$

To je **vektor četverec** (four-vector, 4-vector) iz treh krajevnih in ene časovne koordinate.

Lorentzeve transformacije lahko tako zapišemo v vektorski obliki:

$$\underline{r}' = \underline{\underline{L}}\underline{r}; \qquad \underline{\underline{L}} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

__Dogodke__ definiramo tako, da določimo njihovo lego (točko v 3D prostoru) in čas ko se zgodijo. Možen način prikaza je na preseku svetlobnega stožca (glej sliko v zvezku).

Relativistične invariante

__Invarianta__ je količina, ki se pri prehodu med koordinatnima sistemoma ne spremeni

Klasično: čas, masa, velikost razdalje med dvema točkama
Relativistično: tako čas in razdalja nista več invariantni

Namesto običajnega skalarnega produkta v evklidskem prostoru imamo skalarni produkt četvercev v prostoru Minkowskega:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} a_\alpha \eta_{\alpha\beta} b_\beta\,; \qquad \eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

kjer je η **__metrični tenzor__** (igra ključno vlogo v splošni teoriji relativnost, kjer postane odvisen od porazdelitve mas).

S tem skalarnim produktom se račun izide in velja:

$$(\Delta\underline{r}')^2 = (\Delta\underline{r})^2; \quad (\Delta\underline{r})^2 = (\Delta S)^2 = (c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$$

Torej razdalja oz. **kvadrat razdalje med dogodkoma je invariantna na Lorentzeve transformacije.**

Dogodki in vzročnost (kavzalnost)

Razmik/razdalja med dogodkoma je lahko:

- **Krajevnega tipa (space-like)** $((\Delta S)^2 < 0)$:
  V tem primeru obstaja inercialni sistem, v katerem se dogodka zgodita na različnih krajih, a ob istem času. To pomeni, da **ne** moreta biti v **vzročni zvezi**.
- **Časovnega tipa (time-like)** $((\Delta S)^2 > 0)$:
  V tem primeru obstaja inercialni sistem, v katerem se dogodka zgodita na istem mestu, toda ob različnih časih. Taksna dogodka sta **lahko** v **vzročni zvezi**.
- **Svetlobnega tipa** $((\Delta S)^2 = 0)$

Glej sliko svetlobnega stožca v zvezku. **Le dogodki znotraj ter na robu svetlobnega stožca so lahko vzročno povezani. Strmina premice do točke je** $\boldsymbol{\frac{1}{\beta}}$

Sile in kavzalnost

Ce telo vpliva na drugo telo z neko silo mora biti sprememba na enem telesu vzročno povezana s spremembo pri drugemu. To pomeni, da je kvadrat razmika med dogodkoma > 0. Torej:

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \geq 0 \quad oz. \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c$$

To pomeni, da mora biti hitrost sirjenje motnje počasnejše od hitrosti svetlobe.

Prikaz Lorentzevih transformacij na svetlobnem stožcu

Os ct v sistemu S je mozica vseh tock za katere je $x = 0$. Os ct' pa je mnozica vseh tock, za katere je $x' = 0$. Torej:

$$x' = \gamma(x - vt) \equiv 0 \ \ \Rightarrow x = vt = \beta ct \ \ oz. ct = \frac{1}{\beta}x$$

$$strmina = \tan\theta = \frac{1}{\beta}$$

Analogno za os x', je to množica vseh točk za katere je $ct' = 0$:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \equiv 0 \ \ \Rightarrow \ \ t = \frac{v}{c^2}x \Rightarrow ct = \beta x$$

$$strmina = \beta$$

Sočasna dogodka sta vzporedna krajevni osi! (Poglej sliko vlaka v katerega trčita streli v časovnem stožcu)

Paradoks dvojckov? Socastnostna reza?

?

Relativistična gibalna količina in energija

Po zgledu transformacije pospeškov $a_x' = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)^3}$ bi si mislili, da se mora tudi $\frac{\vec{F}}{m}$ ustrezno transformirati, sicer $F = ma$ ne bo veljalo v poljubnem inercialnem opazovalnem sistemu. Potrebujemo zakon gibanja, ki bo deloval za hitrosti primerljive s c in ki se bo prevedel nazaj na Newtonsko obliko pri $v \ll c$.

Gibalna količina

Predpostavimo, da ima gibalna količina obliko:

$$\vec{p} = m_v\vec{v}$$

Radi bi pokazali, da velja:

$$m_v = m_0\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

kjer je m_0 naša običajna masa (mirovna masa) in m_v relativistična masa pri hitrosti v.

To bomo poskusili preko zgleda **proznega trka dveh delcev**. (Glej slike v zvezku). Ta trk si ogledamo z vidika sistema, ki se giblje → ali ← s hitrostjo, ki je enaka vodoravni komponenti hitrosti enega od dveh delcev.

Ob oznakah iz skic v zvezku iz formule za transformacijo hitrosti dobimo:

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma_v\left(1+\frac{vu'_x}{c^2}\right)} = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{vu'_x}{c^2}} \qquad \Rightarrow u\tan\alpha = \frac{w}{1+0}\frac{1}{\gamma_u} = w\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = w\sqrt{1-\beta_u^2} < w$$

Ker pri naših oznakah velja:

$$v \to u \qquad u_y \to u\tan\alpha \qquad u'_y \to w \qquad u'_x = 0$$

Sprememba prečne gibalne količine »navpično« gibajočega se delca je:

$$\Delta p = 2m_w w$$

»Posevno« sipani delec ima vodoravno hitrost u in navpično hitrost $w\sqrt{1-\beta_u^2}$. Njegova relativistična masa (tega pojma se hočemo znebiti) je m_v. Njegova sprememba prečne gibalne količine je torej:

$$\Delta p' = 2m_v w\sqrt{1-\beta_u^2}$$

Ce naj bo celotna prečna gibalna količina enaka nič, kot pred trkom, mora biti razmerje $\frac{\Delta \mathrm{p}}{\Delta \mathrm{p}'} = 1$

$$\frac{\Delta p'}{\Delta p} = \frac{2m_v w}{2m_w w}\sqrt{1-\beta_v^2} \equiv 1 \quad \Rightarrow \frac{m_w}{m_v} = \sqrt{1-\beta_u^2}$$

Ce vzamemo limitni primer, ko je w zelo majhen (»nežen trk«) lahko naredimo približek. v in u sta potem prakticno enaka in $m_w \to m_0, m_v \to m_u$. Tako dobimo **Relativistično maso** (ki je ne maramo):

$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Iz tega lahko dobimo končen izraz za **Relativistično gibalno količino** (pretvorimo oznake $u \to v$):

$$\vec{p} = \gamma_v m_0 \vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Ta trik z limitnim primerom za w sicer ni potreben, ker vedno (po Pitagori) velja:

$$u^2 + w^2(1-\beta_u^2) = v^2$$

Torej lahko masi zapišemo kot:

$$m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_u^2}} \qquad m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta_v^2}}$$

In tisto razmerje kot:

$$\frac{m_w^2}{m_v^2} = \frac{1-\beta_v^2}{1-\beta_w^2} = \frac{1-\beta_u^2-\beta_w^2(1-\beta_u^2)}{1-\beta_w^2} = 1 - \frac{\beta_u^2(1-\beta_w^2)}{1-\beta_w^2} = 1-\beta_u^2$$

Kar je pa isto, kot smo izpeljali.

Ogledamo si lahko se **neprožni trk**. Spet obvezno glej slike v zvezku za oznake in predstavo.
Ce naj bi se ohranila navpična komponenta gibalne količine:

Pred trkom: $p \approx 2m_w u$
Po trku: $p' \approx M_u u$ oz. ker je u majhen, $p' \approx M_0 u$

Želimo si $p = p' \ \Rightarrow M_0 = 2m_w$
Da zadostimo zahtevi po ohranitvi gibalne količine mora biti masa zlepka **večja** od vsote mirovnih mas obeh projektilov.

Energija

V klasični fiziki dobimo energijo tako:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} \ \Rightarrow Fdx = mvdv \ \Rightarrow \ m\int_v^{v'} vdv = \int_x^{x'} F\,dx \Rightarrow \Delta E_k = \frac{mv'^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = A$$

Pri relativistični fizik pa moramo paziti pri »$m = m(v)$«:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 \vec{v})}{dt}$$

V 1D:

$$F = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx}(\gamma m_0 v) \Rightarrow Fdx = m_0 v\, d(\gamma v)$$

$$d(\gamma v) = vd\gamma + \gamma dv = v\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{v + dv}{c^2} + \gamma dv = \frac{v^2}{c^2}\,\gamma^3 dv + \gamma dv = \left(\beta^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right)\gamma^3 dv = \gamma^3 dv$$

Torej zdaj lahko integriramo:

$$m_0 \int_0^v \gamma^3(v) v\, dv = \cdots = m_0 c^2 \gamma - m_0 c^2$$

S tem smo dobili **Relativistično kinetično energijo**:

$$E_k = m_0 c^2(\gamma - 1)$$

Energija delca v mirovanju (mirovna energija): $E_0 = m_0 c^2$
Energija delca v gibanju (celotna energija): $E = E_0 + E_k = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2$

Transformacija gibalne količine in energije

Imejmo zdaj sistem S in sistem S', ki se giblje glede na S s hitrostjo v. Imamo delec, ki se giblje s hitrostjo $\vec{u}$.
V sistemu S:

$$E = \gamma_u mc^2 \qquad p_x = \gamma_u m u_x \qquad p_y = \gamma m u_y \qquad p_z = \gamma_u m u_z \qquad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}};\ \ u = |\vec{u}|$$

V sistemu S':

$$E' = \gamma'_u mc^2 \qquad p'_x = \gamma'_u m u'_x \qquad p'_y = \gamma'_u m u'_y \qquad p'_z = \gamma'_u m u'_z \qquad \gamma'_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}$$

Uporabimo Lorentzeve transformacije za hitrosti:

$$\gamma'_u = \left(1 - \frac{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{(u_x - v)^2}{c^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} - \frac{u_y^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2} - \frac{u_z^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{c^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2 - (u_x - v)^2 - u_y^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - u_z^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{c^2 - 2u_x v + \frac{u_x^2 v^2}{c^2} - u_x^2 + 2u_x v - v^2 - u_y^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - u_z^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{c^2 - v^2 - u^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma_v \frac{1 - \frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma_v \gamma_u \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)$$

To lahko sedaj uporabimo v enačbi za E':

$$E' = \gamma'_u mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \gamma_v \left[\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{mc^2 \frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right]$$

$$E' = \gamma_v (E - v p_x)$$

Podobno lahko izračunamo tudi vse komponente gibalne količine:

$$p'_x = \gamma'_u m u'_x = \frac{m u_x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \gamma_v \left[\frac{m u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{mv \frac{c^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\right]$$

$$p'_x = \gamma_v \left(p_x - \frac{v}{c^2} E\right) \qquad p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z$$

Obratne transformacije dobimo tako da zamenjamo črtice in $v \to -v$

Zveza med lastnim in koordinatnim časom

Označimo lastni čas τ in koordinatni čas t. Velja:

$$dt = \gamma d\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} d\tau$$

Komponente »običajne« hitrosti $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ **ne** tovorijo vektorja za potrebe Lorentzevih transformacij, ker dt **ni skalar** pri Lorentzevih transformacijah.

Lastni čas τ pa **je skalar** glede na Lorentzeve transformacije. Želimo invarianto na dS

$$(dS)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu = \sum_{\mu,\nu} c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = c^2(d\tau)^2$$

Torej:

$$dS = c\, d\tau \Rightarrow d\tau = \frac{1}{c} dS$$

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{c} dS = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{c} \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma(t)}$$

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma(t)}$$

Četverec hitrosti

To pomen, da:

$$\frac{d\underline{r}}{dt} = \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

ni četverec! Pac pa je četverec:

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{d\tau} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right) = \gamma \frac{d\underline{r}}{dt} = \gamma\left(c, v_x, v_y, v_z\right) = \gamma(c, \vec{v})$$

Četverec gibalne količine (in energije)

Ce to pomnožimo s količino, ki je invariantna na Lorentzeve transformacije (npr. z mirovno maso) dobimo spet četverec:

$$\underline{p} = m\underline{v} = (m\gamma c, m\gamma\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Tako smo dobili **Četverec gibalne količine**. Ta se transformira tako kot vsak drug četverec $\underline{p}' = \underline{\underline{L}}\underline{p}$

Relativistična zveza med energijo in gibalno količino

Ker je $\underline{p} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ četverec ima svojo invarianto $\underline{p} \cdot \underline{p}$. Zvezo lahko dobimo takole.
V sistemu S imamo delec, ki se giblje s hitrostjo v:

$$E = \gamma mc^2 \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v} \qquad \underline{p} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

V sistemu S' pa delec miruje:

$$E_0 = mc^2 \quad \vec{p} = 0 \qquad \underline{p}' = \left(\frac{E_0}{c}, 0\right)$$

Veljati mora: $\underline{p} \cdot \underline{p} \equiv \underline{p}' \cdot \underline{p}'$

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 \Rightarrow E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$$

Dobili smo **Zvezo med energijo in gibalno količino**.
Iz te zveze vidimo tudi, da za **brezmasne delce** lahko energijo zapišemo kot:

$$E = pc$$

Enačba gibanja in sila Minkowskega (relativistični »Newtonov zakon«)

Videli smo da $\vec{F} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$ ne more biti pravilna relativistična enačba, saj dopušča, da bi lahko sla hitrost v izbranem sistemu tudi v neskončnost. Pravilna oblika je bila:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

Naj pogosteje obravnavamo EM oz. Lorentevo silo in Maxwellove enačbe:

$$\vec{F} = e\left(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \quad \Rightarrow \quad e\left(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{B}\right) = m\frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

kjer je $\vec{\mathcal{E}}$ električna poljska jakost. Sicer pa od prej vemo, da tako zapisana sila ni del četverca, ker je na desni odvod po koordinatnem času. To pomeni, da se običajna sila $\vec{F}$ **ne** transformira z Lorentzevimi transformacijami.

Lahko pa tvorimo četverec, ki mu pravimo **Sila Minkowskega**, tako da odvajamo četverec gibalne količine po lastnem času:

$$\mathcal{F} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = \gamma\frac{d\underline{p}}{dt}$$

Torej:

$$\mathcal{F} = \left(\gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c}\right), \gamma\frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \left(\gamma\frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \gamma\vec{F}\right)$$

Zdaj lahko gibalno enačbo formalno zapišemo v obliki »Newtonovega zakona«.

$$\underline{\mathcal{F}} = m\frac{d\underline{v}}{d\tau}$$

V klasični limiti $(v \ll c)$ velja: $\underline{\mathcal{F}} = \left(0, \vec{F}\right)$

Sila Minkowskega podrobneje in četverec pospeška

$$\underline{\mathcal{F}} = \frac{d\underline{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\underline{p}}{dt} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

Prva komponenta: $\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}$, upoštevamo $E = \gamma mc^2$

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = mc \frac{d\gamma}{dt} = mc\, \gamma^3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2}$$

Druga komponenta: $\frac{d\vec{p}}{dt}$, upoštevamo $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d}{dt}(\gamma v) = m \left(\frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = m\gamma^3 \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{c^2} \cdot \vec{v} + m\gamma \vec{a}$$

Torej dobimo podrobneje:

$$\mathcal{F} = \gamma \left(mc \frac{\gamma^3 (\vec{a} \cdot \vec{v})}{c^2}, m\gamma\vec{a} + m\gamma^3 \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{c^2} \cdot \vec{v} \right)$$

To pa lahko delimo z m, da dobimo **<u>Četverec pospeška</u>**:

$$\underline{a} = \frac{d^2 \underline{r}}{d\tau^2} = \gamma \left(\gamma^3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2}, \gamma\vec{a} + \gamma^3 \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2}\, \vec{v} \right)$$

V klasični limiti ($v \ll c$) spet velja: $\underline{a} = (0, \vec{a})$. S tem lahko napišemo »Newtonov zakon«:

$$\underline{\mathcal{F}} = m\underline{a}$$

Gibanje delca v konstantnem električnem polju ($x \parallel \vec{\mathcal{E}}$)

Delec sprva miruje $v(t = 0) = 0$. Imamo samo električno silo:

$$m\, d(\gamma v) = F dt = e\mathcal{E} dt$$

$$\gamma v = \frac{e\mathcal{E}}{m} t = c\alpha t; \quad \alpha = \frac{e\mathcal{E}}{mc} \left[\frac{1}{s}\right]$$

Torej:

$$\frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{e\mathcal{E}}{mc} t \;\Rightarrow\; \beta = \frac{v}{c} = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2 t^2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{1 + \alpha^2 t^2}$$

Zdaj lahko pogledamo dve limiti:

- Majhne hitrosti oz. majhni časi $v = \frac{e\mathcal{E}}{m} t \ll c$. Torej lahko klasično

  $$\Rightarrow \beta(t) = \alpha t$$

  Položaj delca dobimo kot:

  $$x(t) = \int_0^t v(t) dt = c \int_0^t \beta(t) dt\, c \int_0^t \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2 t^2}} dt = \cdots = \frac{mc^2}{e\mathcal{E}} \left(\sqrt{1 + \alpha^2 t^2} - 1 \right)$$

  $$x(t) \xrightarrow{t \ll \frac{1}{\alpha}} \frac{1}{2} \left(\frac{e\mathcal{E}}{m} \right) t^2$$

  Kot klasično $(at^2)/2$

- Za dolge čase

$$\gamma = \sqrt{1+\alpha^2t^2} \Rightarrow \tau = \int_0^t \frac{dt}{\gamma}$$

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+\alpha^2t^2}} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{asinh}(\alpha t)$$

Torej za dolge čase je koordinatni čas (t) eksponentno daljsi od lastnega (τ):

$$t = \frac{1}{\alpha}\sinh(\alpha\tau)$$

Krajevno spremenljivo električno polje

Na delec z električnim poljem opravimo delo, ki mu spremeni kinetično energijo. (Prej miruje)

$$A = e\int \vec{\mathcal{E}}d\vec{S} = eU$$

$$eU = mc^2(\gamma - 1) - 0$$

Torej lahko izrazimo γ:

$$\gamma = \frac{eU + mc^2}{mc^2} \Rightarrow \beta^2 = 1 - \frac{m^2c^4}{(eU+mc^2)^2} \Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{eU(eU+2mc^2)}{(eU+mc^2)^2}}$$

Tako dobimo hitrost v obeh limitnih primerih:

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2eU}{mc^2}}; & eU \ll mc^2 \\ 1; & eU \gg mc^2 \end{cases}$$

Konstantno magnetno polje (Ciklotronska frekvenca)

Sila v magnetnem polju $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$ je pravokotna na hitrost delca, zato se spremeni samo smer hitrosti, velikost pa se ne. Posledično je tudi $\gamma = \gamma(\vec{v}) = \gamma(|\vec{v}|^2)$ nespremenljiva s časom:

$$m\frac{d}{dt}(\gamma v) = m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

To je kroženje. Radialni pospešek delca je:

$$\omega^2 r = \omega v = \frac{v^2}{r} \;\; \Rightarrow m\gamma\omega v = evB$$

Iz tega izraza lahko izrazimo **Ciklotronsko frekvenco**:

$$\omega_c = \frac{eB}{\gamma m}$$

Oz. če zapišemo izraz z drugo obliko radialnega pospeška lahko izrazimo radij krožnice po kateri kroži delec v homogenem magnetnem polju B:

$$m\gamma\frac{v^2}{r} = evB \quad \Rightarrow \quad r = \frac{m\gamma v}{eB} = \frac{p}{eB}$$

(Tu se spomni zgodbo ko Kaon trči v proton in odkritje omega mezona)

Transformacija električnega in magnetnega polja

To je razmeroma lahko opravilo, če imamo silo Minkowskega in Lorentzeve transformacije. V primeru EM sile smo imeli četverec:

$$\underline{\mathcal{F}} = \left(\gamma \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c}, \gamma \vec{F}\right); \quad \vec{F} = e\big(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{B}\big)$$

kjer je γ vezana na hitrost delca, ne na gibanje sistema. Sila $\underline{\mathcal{F}}$ pa se transformira po Lorentzevih transformacijah. Transformacijo iz sistema S' v S lahko zapišemo:

$$\mathcal{F}_x = \gamma F_x = \gamma_0(\mathcal{F}_x' + \beta_0 \mathcal{F}_0') = \gamma_0 \left(\gamma' F_x' + \beta_0 \gamma' \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}'}{c}\right) \qquad (*)$$

kjer je $\mathcal{F}_0$ casovna komponenta. Zapisemo se ostali dve koordinati:

$$\mathcal{F}_y = \gamma F_y = \gamma' F_y' \qquad \mathcal{F}_z = \gamma F_z = \gamma' F_z'$$

Zamislimo si, da se sistem S' giblje s hitrostjo delca, torej v njemu delec miruje in nanj dela samo električno polje:

$$\gamma = \gamma_0 \qquad \vec{v}' = 0 \Rightarrow \gamma' = 1$$

Lahko pišemo prispevke k $(*)$:

$$\gamma_0 F_x = \gamma_0 \left(e\mathcal{E}_x + e\big(\vec{v} \times \vec{B}\big)_x\right) = \gamma_0 \left(e\mathcal{E}_x + e\big(\vec{v}' \times \vec{B}\big)_x + \beta_0 \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}'}{c}\right)$$

Ker je $\overrightarrow{v'} = 0$ in ker Lorentzeva transformacija vzdolz x ne more nareditit nenicelnih hitrosti iz velja, da je $e\big(\vec{v} \times \vec{B}\big)_x = v_y B_z - v_z B_y = 0$. Torej dobimo:

$$\gamma_0(e\mathcal{E}_x + 0) = \gamma_0(e\mathcal{E}_x' + 0 + 0)$$

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_x'$$

Za komponento y moramo upoštevati tudi magnetni del sile:

$$\gamma_0 F_y = \gamma_0 \left(e\mathcal{E}_y + e\big(\vec{v} \times \vec{B}\big)_y\right) = 1 \cdot \left(e\mathcal{E}_y' + e\big(\vec{v}' \times \vec{B}'\big)_y\right)$$

Kot prej je $\vec{v}' = 0$, hkrati pa je se $v_x = v_0$ in $v_z = 0$. Torej je $\big(\vec{v} \times \vec{B}\big)_y = -v_x B_z + v_z B_x = -v_0 B_z$. Torej dobimo na koncu:

$$\mathcal{E}_y' = \gamma_0\big(\mathcal{E}_y - v_0 B_z\big) \qquad (1)$$

in analogno, za z komponento:

$$\mathcal{E}_z' = \gamma_0\big(\mathcal{E}_z + v_0 B_y\big)$$

Obratni transformaciji sta:

$$\mathcal{E}_y = \gamma_0\big(\mathcal{E}_y' + v_0 B_z'\big) \qquad (2) \qquad\qquad \mathcal{E}_z = \gamma_0\big(\mathcal{E}_z' - v_0 B_y'\big)$$

Ce vstavimo (1) v (2), dobimo:

$$\mathcal{E}_y = \gamma_0\big(\gamma_0\big(\mathcal{E}_y - v_0 B_z\big) + v_0 B_z'\big) = y_0^2 \mathcal{E}_y - v_0 \gamma_0^2 B_z + v_o \gamma_0 B_z'$$

Iz tega lahko izrazimo $B_z{}'$, analogno lahko naredimo tudi za $B_y{}'$. Torej dobimo:

$$B_z' = \gamma_0\left(B_z - \frac{v_0}{c^2}\mathcal{E}_y\right) \qquad\qquad B_y' = \gamma_0\left(B_y + \frac{v_0}{c^2}\mathcal{E}_z\right)$$

Manjka nam samo se transformacija $B_x \leftrightarrow B_x'$. Denimo, da imamo v S magnetno polje samo vzdolz x. Po zgornjih izrazih je lahko v S' razlicno od nic le polje B_x'.
Naj ima delec v S hitost:

$$\vec{v} = (v_0, 0, v)$$

V S', pa naj ima:

$$\vec{v}' = (0, 0, v')$$

Sila ima potem samo y komponento. Po Lorentzevih transformacijah velja:

$$\gamma F_y = \gamma\left(e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_y\right) = \gamma e v B_x = \gamma' F_y' \ldots = \gamma e v' B_x{}'$$

Velja $\gamma' v' = \gamma v$ torej dobimo:

$$B_x' = B_x$$

Povzetek

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x' &= \mathcal{E}_x & B_x' &= B_x \\ \mathcal{E}_y' &= \gamma_0(\mathcal{E}_y - v_0 B_z) & B_y' &= \gamma_0\left(B_y + \frac{v_0}{c^2}\mathcal{E}_z\right) \\ \mathcal{E}_z' &= \gamma_0(\mathcal{E}_z + v_0 B_y) & B_z' &= \gamma_0\left(B_z - \frac{v_0}{c^2}\mathcal{E}_y\right) \end{aligned}$$

Očitno se komponente $\vec{\mathcal{E}}$ in $\vec{B}$ **ne** transformirajo kot komponente četvercev. V resnici obe polji lahko združimo v **EM tenzor**, ki ga lahko predstavimo z antisimetricno matriko:

$$\underline{\underline{\mathcal{F}}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathcal{E}_x}{c} & \frac{\mathcal{E}_y}{c} & \frac{\mathcal{E}_z}{c} \\ -\frac{\mathcal{E}_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{\mathcal{E}_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{\mathcal{E}_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ta pa se transformira kot:

$$\underline{\underline{\mathcal{F}}}' = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{\mathcal{F}}} \quad oz. \mathcal{F}_{\mu\nu}' = L_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} \mathcal{F}_{\rho\sigma}$$

Sistemi delcev

Skupni četverec bo enostavno vsota četvercev posameznih delcev:

$$\underline{P} = \sum_i \underline{p}_i = \left(\sum_i \frac{E_i}{c}, \sum_i \vec{p_i}\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{P}\right)$$

Ce na sistem ne deluje nobena zunanja sila, se mora ohraniti tudi tak četverec (v istem sistemu).

$$P_{zac} = P_{konc} \Leftrightarrow E_{zac} = E_{konc} \;\; in\, \vec{p}_{zac} = \vec{p}_{konc}$$

Težiščni sistem (CMS oz. Center of mass system)

Relativistično ne moremo zahtevati, da bi bil $\underline{P} = 0$ (ves četverec), ker je Lorentzeva transformacij 0 enaka 0. **<u>Težiščni sistem</u>** definiramo z zahtevo:

$$\sum_i \vec{p}_i = \vec{P} = 0$$

To lahko v eni dimenziji (samo vzdolž x osi) zapišemo kot:

$$\sum_i p_{i_x}^* = 0$$

Hitrost težiščnega sistema

Hitrost težiščnega sistema označimo z v^*. Zapišemo in upoštevamo definicijo težiščnega sistema:

$$\sum_i p_{i_x}^* = \gamma^* \left(\sum_i P_{i_x} - \beta^* \sum_i \frac{E_i}{c} \right) \equiv 0; \quad \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^{*2}}}, \quad \beta^* = \frac{v^*}{c}$$

Iz tega izraza lahko izrazimo hitrost β^*:

$$\beta^* = \frac{v^*}{c} = \frac{\sum_i P_{i_x} c}{\sum_i E_i}$$

Preverimo lahko se klasično limito ($v \ll c$):

$$\beta^* = \frac{\sum_i m_i \gamma_i v_i c}{\sum_i m_i \gamma_i c^2} \xrightarrow{\gamma_i \to 1} \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i c} = \frac{v^*}{c} \quad \Rightarrow \quad v^* = \frac{\sum_i m_i v_i}{\sum_i m_i}$$

Uporabno: Kvadrat četverca je invarianta

Ne smemo pozabiti, da tudi tu velja, da je kvadrat četverca invarianta. To nam omogoči, da sploh ni nujno, da imamo »prej« in »po« trku/procesu opravka z enakim naborom delcev

$$\left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i c \right)^2 = \left(\sum_i E_i^* \right)^2 - \vec{0}^2$$

Na levi imamo četverec iz vrednoten v laboratorijskem sistemu, na desni pa v težiščnem, kjer je po definiciji $\vec{P} = 0$.

Prozni trk (glej slike v zvezku)

Imejmo dva identična delca z maso m, kjer drugi delec miruje, prvi pa vanj trči s hitrostjo v. Namesto zač. in Konc bomo označevali x in x'. Zaradi ohranitve $\underline{P} = \underline{P}'$ imamo:

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2' \qquad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Nalogo rešimo v težiščnemu sistemu in nato pretransformiramo v LAB:

$$\beta^* = \frac{\gamma m v c + 0}{\gamma m c^2 + m c^2} = \frac{\beta \gamma}{1 + \gamma} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \Rightarrow \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^{*2}}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}$$

Vsota gibalnih količin v težiščnem sistemu mora biti 0. Torej imamo:

$$p_2^* = \gamma^*\left(p_2 - \frac{\beta^* E_2}{c}\right) = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}mc = -mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}} \qquad p_1^* = mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}$$

Za energije napišemo (ker imamo identične delce):

$$E_1^* = E_2^* = E_1^{*\prime} = E_2^{*\prime} = \gamma^*(E_2 - \beta^* p_2 c) = mc^2\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}$$

Po trku lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} {p_{1}^*}_x{}' &= p_1^* \cos\theta^* \qquad {p_{2}^*}_x{}' = -{p_{1}^*}_x{}' = -p_1^*\cos\theta^* \\ {p_{1}^*}_y{}' &= p_1^* \sin\theta^* \qquad {p_{2}^*}_y{}' = -{p_{1}^*}_y{}' = -p_1^*\sin\theta^* \end{aligned}$$

To lahko zadaj transformiramo v LAB sistem, kjer upoštevamo se, da v prečni smeri ni transformacij:

$$\begin{aligned} {p_1'}_x &= \gamma^*\left({p_{1}^*}_x{}' + \beta^*\frac{E_1^*}{c}\right) = \frac{mc}{2}\sqrt{\gamma^2-1}\,(1+\cos\theta^*) \\ {p_2'}_x &= \frac{mc}{2}\sqrt{\gamma^2-1}(1-\cos\theta^*) \\ {p_1'}_y &= p_1^*\sin\theta^* = mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\sin\theta^* \\ {p_2'}_y &= -mc\sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\sin\theta^* \end{aligned}$$

Ce je trk centralen ($\theta^* = \pi$) dobimo $p_2' = p_1, p_1' = p_2 = 0$, kot v klasičnem primeri si torej izmenjata energijo in gibalni količino. Sedaj lahko izračunamo se pod katerima kotoma odletita delca v LAB:

$$\tan\theta_1 = \frac{{p_1'}_y}{{p_1'}_x} = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\frac{\sin\theta^*}{1+\cos\theta^*} \qquad \tan\theta_2 = \frac{{p_2'}_y}{{p_2'}_x} = -\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}\frac{\sin\theta^*}{1-\cos\theta^*}$$

Velja: $\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -\frac{2}{\gamma+1}$. Kot med delcema pa je podan s:

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = 2\frac{\sqrt{2(\gamma+1)}}{\gamma-1}\frac{1}{\sin\theta^*}$$

Vidimo, da če je hitrost vpadnega delca majhna potem je kot med delcema 90°. Pri velikih hitrostih se kot zmanjšuje. Pri visoko relativističnih trkih se delci sipajo naprej v majhne kote (»forwards scattering«)

Neprožni trk (glej slike v zvezku)

Imejmo, podobno kot prej, dva identična delca vsak z maso m. Naj drugi delec miruje, prvi pa naj prileti vanj s hitrostjo v_1. Delca se po trku sprimeta. V LAB sistemu zapišemo:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 = E \quad &\rightarrow \quad \gamma_1 mc^2 + mc^2 = \gamma M c^2 \\ \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \vec{p} \quad &\rightarrow \quad \gamma_1 m v_1 + 0 = \gamma M v \end{aligned}$$

kjer je masa M masa zlepka. Tako računati bi bila matematična nočna mora. Zelo elegantno pa problem lahko rešimo preko invariant:

$$\underline{p_1} = \left(\frac{E_1}{c}, \overrightarrow{p_1}\right) \qquad \underline{p_2} = \left(\frac{E_2}{c}, \vec{0}\right)$$

Pred trkom velja: $\underline{p} = \underline{p_1} + \underline{p_2}$. V težiščnem sistemu pa lahko zapišemo:

$$\underline{p}' = \left(\frac{Mc^2}{c}, 0\right)$$

Zapišemo kvadrat četverca:

$$(\gamma_1 mc^2 + mc^2)^2 - (\gamma_1 m v_1)^2 c^2 = (Mc^2)^2 - 0^2$$

$$\gamma_1^2 m^2 c^4 + 2\gamma_1 m^2 c^4 + m^2 c^4 - \gamma_1^2 m^2 v_1^2 c^2 = M^2 c^4$$

$$M = \sqrt{2(\gamma_1 + 1)}m \geq 2m$$

Torej vidimo, da se je del kinetične energije pretvoril v maso sprimka, del pa gre naprej za kinetično energijo (da ohrani gibalno količina). To je odličen primer ekvivalence med energijo in maso.

Razpoložljiva energija

Sprijemanje delcev v eksperimentalni fiziki je zelo redko. Običajno ob trkih nastane veliko novih delcev. Zanima nas, koliko energije je na voljo za njihov nastanek:

$$m_r = M - 2m \ \Rightarrow m_r = 2m\left(\sqrt{\frac{\gamma_1 + 1}{2}} - 1\right); \quad E_r = m_r c^2$$

Vsa začetna kinetična energija $T = mc^2(\gamma_1 - 1)$, je večja od E_r, ker mora iti del T za kinetično energijo težišča, sicer ne ohranimo gibalne količine. Velja:

$$T = mc^2(\gamma_1 - 1) \ \Rightarrow \ \gamma_1 = \frac{T}{mc^2} + 1$$

In tako dobimo:

$$E_r = 2mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{T}{mc^2}} - 1\right)$$

Pogledamo lahko se dva limitna primera:

- $T \ll 2mc^2 \quad \Rightarrow \quad E_r \approx \frac{T}{2}$
- $T \gg mc^2 \quad \Rightarrow \quad E_r \approx \sqrt{2mc^2 T} \quad \propto \sqrt{T}$ (fiksna tarča)

Poglej primere Trkalnikov in Razpada v mirovanju/med letom v zvezku