Elektrostatika

3.1 Coulombova sila med naboji

Elektrostatika opisuje sile med mirujočimi naboji, ki so konstantni (časovno nespremenljivi). Med točkastimi nabitimi delci deluje sila:

$$\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r} \qquad \varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

Ta forumla je empirična. Tako smo jo izmerili, ker je taka narava. Torej tega se ne da ravono izpeljati.

3.2 Velikost in enota električnega naboja

Naboj merimo v **Coulombih** oz. **Ampersekundah**. Naboj je praviloma (izjema so kvarki) mnogokratnik osnovnega naboja $e_0 = 1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{As}$

Naboj česa?	Vrednost
Kvarka	$1/3 > e_0$
Elektrona	e_0
Na kondenzatorju	$10^{-7}\mathrm{As}$
Pri blisku	$1 - 100 > \mathrm{As}$
V akumulatorju	$0.2 \cdot 10^6\mathrm{As}$
Zemlje (brez atmosfere)	$5 \cdot 10^5\mathrm{As}$
Zemlje (z atmosfero)	$1 > \mathrm{As}$
Ki ga v letu proizvede elektrarna	$3 \cdot 10^{11}\mathrm{As}$

3.3 Jakost električnega polja

V Faradayevi oz. Maxwellovi sliki se interakcije med nabitimi delci opiše z delovanjem električnega polja. **Električno polje je posrednik interakcije med naboji.** Električno silo prvega naboja na drugega izračunamo kot:

$$\vec{F}_{21} = e_2 \vec{E}_1$$

Vidimo, da je smer $\vec{E}$ vedno določena s smerojo sile, ki bi delovala na točakasti naboj.

Transformacijske lastnosti $\vec{E}$

$\vec{E}$ je vektor, torej se po ortogonalnih transformacijah transformira kot vektor. Ortogonalne trasformacije so tiste, ki ohranijo skalarni produkt (oz. kot). To so rotacije in zrcaljenja.

$$\vec{E}' = \underline{\underline{a}}\vec{E} \qquad E_1' = a_{ik} E_k$$

Intenziteta polja $|\vec{E}|^2$ je skalar, ki se ohranja pri ortogonalnih transformacijah.

Čigavo polje?	Jakost
Kozmičnega sevanja	$10 > \mu\mathrm{V/m}$
Znotraj žice	$0.5 > \mathrm{mV/m}$
Zemeljske atmosfere	$100 - 300 > \mathrm{V/m}$
Prebojna jakost v atmosferi	$1 - 3 > \mathrm{MV/m}$
Preko biološke membrane (recimo celice)	$10 > \mathrm{MV/m}$
V močnnem laserskem snopu	$100 > \mathrm{TV/m}$

3.4 Električne silnice

Električne silnice kažejo v smeri električnega polja. Uvedemo jih kot krivuljo:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \frac{\vec{E}\left(\vec{r}(s)\right)}{\left|\vec{E}\left(\vec{r}(s)\right)\right|}$$

Faradayeva konstrukcija

- Silnice kažejo v smeri $\vec{E}$ in se ne sekajo
- Gostota silnic ustreza jakosti polja
- Silnice se začnejo v $+$ in končajo v $-$
- Silnice električnega polja ***niso*** zaključene

3.5 Električna cirkulacija

Električno cirkulacijo se uvede kot integral:

$$\Gamma_e = \oint\limits_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

kjer je C neka zaključena zanka. **Za vsa statična polja velja $\Gamma_e = 0$.** Če uporabimo Stokesov izrek lahko pridemo do rotorja električnega polja:

$$0 = \oint\limits_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int\limits_S \nabla \times \vec{E} d\vec{s} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

To pomeni, da je **statično električno polje brezvrtinčno**. To je že prvi zametek Maxwellovih enačb.

3.6 Električni pretok

Električni pretok je definiran kot:

$\phi_E = \int\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ kjer je tu S **poljubna ploskev**. Če pa ploskev sklenemo, tako da imamo zaključeno ploskev, pa dobimo **Gaussov izrek**.

3.7 Električni potencial

Elektrostatski oz. električni potencial uvedemo kot skalarno polje:

$$\vec{E}(r) = -\nabla \varphi(\vec{r})$$

To naredimo, ker je φ skalarna količina za razliko od polja in se zato z njo lažje računa.

Reminder o operatorju ∇:

∇ je vektorski operator, ki v osnovni obliki deluje na skalar in iz njega naredi vektor.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \qquad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Operatorju $\nabla^2 = \Delta$ pa pravimo Laplaceov operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Elektrčni potencial tokčkastega naboja:

$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\nabla \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \varphi_0 \right)$

Torej je potencial:

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \varphi_0$$

Električni potencial je torej določen do konstante natančno. Temu se reče **umeritev (gague)**. V tem primeru je konstanta, sicer je lahko na splošno tudi funkcija.

3.10 Princip superpozicije [Glej Slike]

V sistemu z več tokčkastimi naboji lahko silo na naboj e zapišemo kot:

$$\vec{F} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{e_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Celotna sila je **vsota posameznih parskih prispevkov**. To je princip supper pozicije. Tak princip recimo ne velja za hitrostno polje pri hidrodinamiki. Princip superpozicije velja tudi za **električno polje** in **električni potencial**.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{e_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Električno polje in potencial sta **aditivna**, kar pogosto ne velja za druga fizikalna polja.

3.11 Gostota električnega naboja

Električen naboj je pogosto porazdeljen, zato se ubede količina, ki ji pravimo **volumska gostota naboja**. Diskretno to lahko zapišemo kot:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

kjer je $\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ 3D delta funkcija v točki i. Zvezno pa lahko to zapišemo kot:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{de}{dV}$$

Tako so prevedeni zapisi za silo, polje in potencial:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r'})\vec{E}(\vec{r'})\, d^3\vec{r'}$$

$$\vec{E}(\vec{r})) = \int_V \frac{\rho(\vec{r'})(\vec{r}-\vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\, d^3\vec{r'}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r'}|}\, d^3\vec{r'}$$

3.12 Primeri gostote naboja

Točkast naboj

Naboj se nahaja na mestu $\vec{r}$'. Tako je gostota:

$$\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r}-\vec{r'})$$

Točkasti dipol [Slika tu pomaga]

Gostota naboja je:

$$\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r}-\vec{r}_1) - e\delta(\vec{r}-\vec{r}_2) = e\delta(\vec{r}-(\vec{r}_0+\vec{d}_r)) - e\delta(\vec{r}-(\vec{r}_0-\vec{d}_r))$$

Tu predpostavimo, da je razmak med nabojema $\vec{d}_r$ majhen in naredimo razvoj $f(\vec{r}+\vec{h}) = f(\vec{r}) + \vec{h}\cdot\nabla\vec{f}(\vec{r})$. Tako dobimo:

$$-e\vec{d}_r\cdot\nabla(\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)) - e\vec{d}_r\cdot\nabla(\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)) = -2e\vec{d}_r\cdot\nabla(\delta(\vec{r}-\vec{r}_0))$$

Tu uvedemo **dipolni moment** $\vec{p} = 2e\vec{d}_r$. Pred tem pa še poračunajmo divergenco:

$$\nabla\cdot(\vec{p}\delta(\vec{r}-\vec{r_0})) = (\nabla\cdot\vec{p})\delta(\vec{r}-\vec{r_0}) + \vec{p}\cdot\nabla(\delta(\vec{r}-\vec{r_0})) = \vec{p}\cdot\nabla(\delta(\vec{r}-\vec{r_0}))$$

kjer smo upoštevali $(\nabla\cdot\vec{p}) = 0$. To identiteto uporabimo, da dipolni moment prestavimo za nablo in dobimo končen rezultat:

$$-\nabla\cdot(\vec{p}\delta(\vec{r}-\vec{r_0})) \Rightarrow \rho(\vec{r})) = -\nabla\cdot\vec{P}$$

V tem smo prepoznali **polarizacijo** $\vec{P}$, ki predstavlja volumsko gostoto dipolnega momenta (3D delta ima namreč enote $1/\mathrm{m}^3$). Tako sta v sistemih električnih dipolov gostota naboja in polarizacija neposredno povezani preko zgornje enačbe.

Površinsko porazdeljen naboj

Naboj je porazdeljen po neki tanki plasti/površini. Vpeljemo površinsko gostoto naboja $\sigma(\vec{r})$ kot

$$\rho(\vec{r}) = \sigma(\vec{r})\delta(z - z_0)$$

kjer $\vec{r}$ teče po površini, z_0 pa je plast kjer imamo naboj.

Volumnsko porazdeljen naboj

Naboj porazdeljen enakomerno po volumnu krogle z radijem a ima gostoto:

$$\rho(\vec{r})) = \rho_0 H(a - r)$$

kjer je H Heavisidova/stopničasta funkcija.

Volumnsko porazdeljeni dipoli

Dipoli enakomerno porazdeljeni po volumnu krogle z radijem a imajo polarizacijo:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{P}_0 H(a - r)$$

Kaj pa se zgodi z gostoto nabojev?

$$\begin{gathered}
\rho(\vec{r})) = \nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot (\vec{P}_0 H(a - r)) = \\
= -(\nabla \cdot \vec{P}_0)H(a - r) - \vec{P}_0 \cdot \nabla H(a - r) = \\
= -\vec{P}_0 \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(H(a - r)) = \\
= -\vec{P}_0 \delta(a - r)\nabla(-r) = \vec{P}_0 \delta(a - r)\frac{\vec{r}}{r}
\end{gathered}$$

Dobili smo, da je gostota naboja **samo na robu.** To si lahko predstavljamo, kot da se edino na robu dipoli ne uspejo izničiti med sabo.

3.13 Integralna oblika Gaussovega izreka [Glej sliko]

Obravnavamo (diskretna slika) sklenjeno površino, ki zaobjame naboje. Zanima nas električni pretok skozi tako sklenjeno površino, ki zaobjema naboje e_i

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E\, dS \cos\theta(\vec{r}) = \oint_S \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cos\theta_i \, dS$$

kjer je $\theta(\vec{r})$ kot med lokalno normalo ploskve in poljem $\vec{E}$. Poglejmo kakšni so lkeni, ki jih računamo..

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\cos\theta_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \, dS + \frac{e_2}{4\pi\varepsilon_0} \oint \frac{\cos\theta_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^2} \, dS + \ldots$$

Dajmo si najprej najprej izbrati $\vec{r}_1 = 0$. Takrat kaže smer polja radialno in je $\theta_1 = 0$. Člen je:

$$\frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\cos\theta_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\,dS=\frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\frac{e_1}{\varepsilon_0}$$

Gauss je pokazal da to velja tudi za ostale člene, ki so izven središča. Torej imamo v resnici:

$$\oint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\sum_i\frac{e_i}{\varepsilon_0}$$

Tako velja **Gaussov izrek** v zvezni obliki:

$$\oint \vec{\mathbf{E}}\cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{S}}=\frac{\mathbf{e}}{\varepsilon_\mathbf{0}}=\frac{\mathbf{1}}{\varepsilon_\mathbf{0}}\int\rho(\vec{\mathbf{r}})\,\mathbf{d^3}\vec{\mathbf{r}}$$

To velja v primeru, da ni naboja v robu ploskve, kjer bi delili z 0 *in bi eden od teh integralov v vsoti divergiral.* Torej zajeti moramo res vse naboje! Ne smejo biti na robu ploskve!

3.14 Diferencialna oblika Gaussovega izreka

Uporabimo izrek Gauss-Ostrogradskega, ki pravi:

$$\oint\limits_{\partial V}\vec{A}\cdot d\vec{S}=\int\limits_V\nabla\cdot\vec{A}\,dV$$

Torej

$$\oint\limits_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int\limits_V\nabla\cdot\vec{E}\,d^3\vec{r}$$

Vemo pa od prej da velja tudi:

$$\oint\limits_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho(\vec{r})\,d^3\vec{r}$$

Iz tega sledi enakost in diferencialna oblika Gaussovega izreka

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}}=\frac{\rho}{\varepsilon_\mathbf{0}}$$

3.17 Poissonova in Laplaceova enačba

Poissonova enačba je osnovna enačba elektrostatike, ki določa elektrostatski potencial in sicer sledi iz Gaussovega izreka in definicije polja z potencialom:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\qquad\vec{E}=-\nabla\varphi$$

Tako dobimo **Poissonovo enačbo**:

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

in če v prostoru ni naboja, dobimo **Laplaceovo enačbo**:

$$\nabla^2\varphi(\vec{r})) = 0$$

3.17.1 Greenova funksija Poissonove enačbe

Metoda Greenove funkcije **splošne rešitve** v našem primeru Poissonove enačbe. Rešitve iščemo z konvolucijo. Predpostavimo, da je rešitev oblike:

$$\varphi(\vec{r}) = \int G(\vec{r} - \vec{r'})\rho(\vec{r'})\, d^3\vec{r'}$$

Ta nastavek uporabimo v Poissonovi enačbi. *Ne pozabi, da nabla deluje samo na $\vec{r}$ in ne tudi na $\vec{r}$'*.

$$\nabla^2\varphi(\vec{r}) = \nabla^2\left(\int G(\vec{r} - \vec{r'})\rho(\vec{r'})\, d^3\vec{r'}\right) =$$
$$= \int \nabla^2 G(\vec{r} - \vec{r'})\rho(\vec{r'})\, d^3\vec{r'} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Če naj to velja potem mora biti:

$$\nabla^2 G(\vec{r} - \vec{r'}) = -\frac{\delta(\vec{r} - \vec{r'})}{\varepsilon_0}$$

Torej, kar to pomeni: **Greenova funkcija je rešitev Poissonove enačbe za en točkast naboj, ki se nahaja v $\vec{r}$' (brez konstante e)**. Zanima nas kakšna je ta Greenova funkcija. Pojdimo v Fourierev prostor:

$$G(\vec{r} - \vec{r'}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})}G(\vec{k})\, d^3\vec{k}$$

Uporabimo integralsko definicijo delta funkcije:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r'}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})}\, d^3\vec{k}$$

To sedaj vstavimo v Poissonovo enačbo:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})}G(\vec{k})\,d^3\vec{k}\right)+\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})}\,d^3\vec{k}=0$$

$$\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\nabla^2\left(e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})}G(\vec{k})\right)+\frac{1}{\varepsilon_0}e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})}\right]=0$$

$$\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi^2)}\left[-k^2G(\vec{k})+\frac{1}{\varepsilon_0}\right]e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})}=0$$

Tu pa vidimo, da smo s Fourierevo transformacijo reševanje diferencialne enačbe prevedli na reševanje algebrajske enačbe. Tako smo dobili Greenovo funkcijo v Fourierevem prostoru:

$$G(\vec{k})=\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}$$

To pa samo še transforimiramo nazaj:

$$G(\vec{r}-\vec{r'})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi\sin\theta\,d\theta k^2\,dk}{\varepsilon_0 k^2}e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r'})}=...=$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r'}|}$$

To pomeni, da je **splošna rešitev Poissonove enačbe**:

$\varphi(\vec{\mathbf{r}})=\int\frac{\rho(\vec{\mathbf{r'}})\,\mathbf{d^3\vec{r'}}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r'}}|}$ Ustrezajoče polje (delujemo z minus gradient, ki deluje samo na $\vec{r}$)

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})=\int\frac{\rho(\vec{\mathbf{r'}})(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r'}})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r'}}|^3}\,\mathbf{d^3\vec{r'}}$$

3.19 Earnshawjev teorem

*Nabor točkastih nabojev ne more biti v **stabilnem** ravnovesju, samo kot posledica elektrostatskih interakcij med naboji.*

To pomeni, da elektrostatski potencial v praznem prostoru nima minimumov ali maksimumov, ampak kvečjemu le **sedla**. Za stabilen minimum bi morale vse silnice kazati v isto točko, kar bi povzročilo polje, ki ima divergenco. Mi pa vemo, da je v elektrostatiki električno polje brezizvirno.

3.20 Thomsonov problem

Elektrostatika ima lahko minimume, če naboje ogradimo recimo na neko površino.

3.21 Elektrostatska energija

3.21.1 Elektrostatksa energija v **zunanjem** polju

Gledamo naboj v zunanjem polju, ki ga ustvarjajo drugi naboji, ampak ne ta naš konkreten naboj. Na naboj deluje sila $\vec{F} = e\vec{E}$. Izračunajmo energijo, kot potencial, ki je potreben, da ta naboj e "drži" na mestu. To je enako kot če bi ga iz neskončnosti pripeljali sem.

$$dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -e\vec{E} \cdot d\vec{r} = e\nabla\varphi \cdot d\vec{r}$$

Uporabimo energijski zakon:

$$A = \int\limits_{(1)}^{(2)} dA = \int\limits_{(1)}^{(2)} e\nabla\varphi \cdot d\vec{r} = e\varphi(2) - e\varphi(1)$$

Torej vidimo da je energija naboja v zunanjem polju/potencialu:

$$W = e\varphi = \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

To je energija **porazdelitve nabojev** ρ v zunanjem potencialu φ, ki ga ne ustvarjajo ti naboji.

3.21.2 Celotna elektrostatsko energija

Sedaj pa nas zanima energija **polja vseh nabojev**. Torej **porazdelitev nabojev** ρ ustvari potencial φ. Zanima nas energija, ki je za to potrebna (da ustvarimo oz. nabijemo to gostoto).
Izračunajmo spremembo energije, če dodamo $d\rho$ naboja:

$$dW = \int\limits_V d\rho(\vec{r})\hat{\varphi}(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

Predpostavimo, da lahko gostoto vključnimo z "gumbom"/parametrom $\alpha \in [0, 1]$, ki potem nastavi gostoto naboja med 0 in $\rho(\vec{r})$. To pomeni, da je $d\rho = \rho d\alpha$ in $\nabla^2\alpha\varphi = -\frac{\alpha\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \Rightarrow \hat{\varphi} = \alpha\varphi(\vec{r})$, kjer smo uporabili linearnost Poissonove enačbe. Tako je

$$dW = \int \rho\, d\alpha\alpha\varphi\, d^3\vec{r} = \int_0^1 \alpha\, d\alpha \int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

Tako dobimo **le dodatno polovico** za energijo polja, kjer φ ustvarja prav ta isti ρ.

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

3.21.3 Elektrostatska energija ko funkcional gostote naboja

Uporabimo Greenovo reprezentacijo električnega potenciala:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3\vec{r'}$$

To vstavimo direktno v izraz za celotno elektrostatsko energijo in dobimo izraz, ki nas spominja na interakcijo "vsak z vsakim":

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, d^3\vec{r} \, d^3\vec{r'}$$

3.22 Gostota elektrostatske energije polja z $\vec{E}$

Elektrostatsko energijo lahko zapišemo z uporabo električnega polja. Uporabili bomo vektorsko identiteto:

$$\nabla \cdot (f\vec{g}) = \nabla f \cdot \vec{g} + f \nabla \cdot \vec{g}$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2} \int\limits_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \, d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int\limits_V (\nabla \cdot \vec{E})\varepsilon_0 \varphi(\vec{r}) \, d^3\vec{r} = \\ = \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_V \left[\nabla \cdot (\vec{E}(\vec{r})\varphi(\vec{r})) - \nabla\varphi \cdot \vec{E} \right] \, d^3\vec{r} = \end{aligned}$$

Sedaj uporabimo Gaussov izrek na prvem členu, v drugem pa prepoznam $-\nabla\varphi = \vec{E}$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{\partial V} \vec{E}(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 \, d^3\vec{r}$$

Zdaj pa v približki lahko rečemo, da je $\vec{E} \propto 1/r^2$ in $\varphi \propto 1/r$ in ločnmi element $d\vec{S} \propto r^2$. To nam da skupno sorazmernost $1/r$. *Predstavljamo si lahko, da ko gre rob volumna neskončno daleč stran, gre to proti nič*. ***TO NE VELJA NUJNO SPLOŠNO!***. Takrat lahko energijo polja v približku zapišemo kot

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 \, d^3\vec{r}$$

3.24 Sila kot funkcional električnega polja

Zanima nas sila, ki deulje na delo, ki se nahaja v električnem polju $\vec{E}(\vec{r})$. To je ***celotno polje*** (lastno, ki ga ustvari telo z ρ in zunanje brez katerega je sila 0). Integriramo povsod, kjer je $\rho(\vec{r}) \neq 0$.

$$\vec{F} = \int\limits_V \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \, d^3\vec{r} = \varepsilon_0 \int\limits_V (\nabla \cdot \vec{E})\vec{E} \, d^3\vec{r} =$$

Tu uporabimo identiteto $\nabla \cdot (\vec{E} \otimes \vec{E}) = \vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$.

$$= \varepsilon_0 \int\limits_V \left(\nabla \cdot (\vec{E} \otimes \vec{E}) - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}\right) d^3\vec{r} =$$

Tu uporabimo Gaussov izrek, da se znebimo obeh nabl, kjer prej se uporabimo za drugi člen identiteto:

$$\frac{1}{2}\nabla(E^2) = (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E} + \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})$$

V elektrostatiki pa velja $\nabla \times \vec{E} = 0$. Dobimo

$$= \varepsilon_0 \int\limits_{\partial V} (\vec{E} \otimes \vec{E})\, d\vec{S} - \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{\partial V} E^2 d\vec{S}$$

Torej je celotna sila

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int\limits_{\partial V} \left[\vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{n}) - \frac{1}{2}E^2\vec{n}\right] dS$$

kjer je $\vec{E}$ **celotno** električno polje in je $\vec{n}$ normala na površino. Ta integral teče po zaključeni površini telesa v katerem se skriva gostota nabojev ρ. Integriramo ∂V tam kjer je $\rho \neq 0$.

3.25 Napetostni tenzor električnega polja

Dobljeni zapise sile naboja v električnemu polju se zapiše z uvedno **napetostnega tenzorja**

$$F_i = \oint\limits_{\partial V} T_{ik} n_k \, dS$$

$$T_{ik} = \varepsilon_0 \left(E_i E_k - \frac{1}{2}E^2 \delta_{ik}\right)$$

Velja tudi Gaussov izrek

$$F_i = \oint\limits_{\partial V} T_{ik} n_k \, dS = \int\limits_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \, dV$$

Iz tega zapisa lahko uvedemo gostoto sile kot:

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

Gostota sile je divergenca napetostnega tenzorja. Ta zapis je splošen in se uporablja tudi za druga polja.

3.27 Multipolni razvoj električnega potenciala

Zanima nas električno polje/potencial **daleč** stran od same gostote naboja in to po **vodilnih prispevkih**. Velja:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|}\, d^3\vec{s}$$

ko je $|\vec{r}|$»$|\vec{s}|$. To pomeni, da ulomek lahko razvijemo. Za vektorske funkcije velja tazlorjev razvoj takole..

$$f(\vec{r}+\vec{h}) = f(\vec{r}) + \vec{h}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{2!}\vec{h^T}\frac{\partial^2 f}{\partial\vec{r}\partial\vec{r'}}\vec{h} + ...$$

kjer je $\frac{\partial^2 f}{\partial\vec{r}\partial\vec{r}'} = \underline{\underline{H}}$ **Hessova matrika**. Torej pri nas bi se razvoj ulomka glasil:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - \vec{s}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right)$$

Naš razvoj vstavljen v prvo enačbo je tako torej:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \rho(\vec{s})\, d^3\vec{s} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\int \vec{s}\rho(\vec{s})\, d^3\vec{s} + \dots$$

V prvem členu prepoznamo kar celoten naboj, kar ustreza električnemu monopolu. V drugem pa prepoznamo elekrtrični dipol. Vstavimo oba izrata:

$$e = \int_V \rho(\vec{r})\, d^3\vec{s}$$

Tako smo dobili

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0} + \dots$$

Ko smo daleč stran vidimo monopol (točkati naboj) in bližje kot pridemo več multipolov vidimo. V splošnem se multipolni razvoj glasi kot:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0}}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{(m=-l)}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

kjer so Y_{lm} sferični harmoniki (krogelne funkcije) in q_{lm} multipolni koeficienti, ki so definirani kot:

$$q_{lm} = \int_V \rho(\vec{s})s^l Y_{lm}(\theta',\phi')\, d^3\vec{s}$$

kjer ta integral teče po celotni porazdelitvi naboja.

3.28 Polje in potencial točkastega naboja

Za potencial vemo da velja:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Polje bo torej:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi(\vec{r}) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

3.29 Multipolni razvoj elektrostatske energije

Zanimajo nas prispevki k energiji če lahko $\rho_0(\vec{r})$ opišemo z multipoli. Spomnimo se, da velja:

$$W = \int\limits_V \rho_0(\vec{r})\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

Predpostavimo, da je večina energije zbrana blizu točke $\vec{r_0}$, kjer so multipoli. Ta točka je znotraj volumna V. Potem lahko razvijemo:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r_0}) + (\vec{r} - \vec{r_0})\nabla\varphi(\vec{r_0}) + \dots$$

Potem takem je energija:

$$W = \int\limits_V \rho_0(\vec{r})\varphi(\vec{r_0})\, d^3\vec{r} + \int\limits_V \rho_0(\vec{r})(\vec{r} - \vec{r_0})\, d^3\vec{r}\ \nabla\varphi(\vec{r_0}) + \dots =$$

V prvem členu prepoznamo integralski zapis za naboj, v drugem pa integralski zapis za dipolni moment in električno polje. Tako je poenostavljeno:

$$= e\varphi(\vec{r_0}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r_0}) + \dots$$

Prvi člen predstavlja energijo monopola v **zunanjem polju**, drugi energijo dipola v **zunanjem polju**.

3.30 Sila in navor na multipole v zunanjem električnem polju

Zanima nas sila na $\rho_0(\vec{r})$ Vemo da lahko silo dobimo preko energije: $\vec{F} = -\nabla W \Leftrightarrow dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$

Torej lahko izračunamo gradient energije, ki smo jo izračunali prej:

$$\vec{F} = -\nabla\left(e\varphi(\vec{r_0}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r_0})\right) = -e\nabla\varphi(\vec{r_0}) + \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r_0})) =$$

Tu se spet uporabi vektorska identiteta, da dobimo izraz:

$$= e\vec{E}(\vec{r_0}) + p \times (\nabla \times \vec{E}) + (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}$$

Torej je sila:

$$\vec{F} = e\vec{E} + (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}$$

Da pridemo do navora spet gledamo spremembo energije:

$$dW = -\vec{M} \cdot d\vec{\phi}$$

kjer je $d\vec{\phi}$ smer osi. Velja:

$$W = e\varphi - \vec{p} \cdot \vec{E} \Rightarrow d\vec{p} = d\vec{\phi} \times \vec{p}$$

To vstavimo (??) v izraz za energijo in diferenciramo:

$$dW = 0 - d\vec{p} \cdot \vec{E} = -(d\vec{\phi} \times \vec{p}) \cdot \vec{E} = -d\vec{\phi} \cdot (\vec{p} \times \vec{E})$$

Tako dobimo končen rezultat:

$$\vec{M} = \vec{p}(\vec{r_0}) \times \vec{E}(\vec{r_0})$$

Dipol se torej poskuša zavrteti tako, da bo *vzporeden* z električnim poljem.