Hamiltonske metode in teorije polja

Teorija EM polja se pogosto uporablja v okviru Hamiltonovega oz. Euler-Lagrangeovega formalizma.

13.1 Osnove Hamiltonskih metod v klasični fiziki

Euler-Lagrangeove enačbe

Npr. obravnavamo gibanje delca, ki se giblje po tiru $\vec{r}(t)$ s hitrostjo $\dot{\vec{r}}(t)$. Vpeljemo **akcijo** S kot:

$$S = \int \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\; dt$$

kjer je $\mathcal{L}$ **Lagrangeova funkcija**. Za naš en delec je to npr.:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

Z variacijo akcije $\delta S = 0$ dobimmo **Euler-Lagrangeove enačbe**:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \left(\frac{\boldsymbol{\partial \mathcal{L}}}{\boldsymbol{\partial \dot{\mathbf{r}}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0$$

Hamiltonove enačbe

Uvedemo impulz:

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}$$

in uvedemo **Hamiltonovo funkcijo:**

$$H = \dot{\vec{r}} \vec{p} - \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Za primer enega delca recimo je to:

$$H = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} + V(\vec{r})$$

Veljajo **Hamiltonove enačbe**:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \qquad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$$

13.2 Lagrangeova funkcija nabitega delca v EM polju

Hočemo zapisati Lagrangeovo funkcijo za točkast gibajoč naboj. Začnemo z Lorentzovo silo in 2. Newtonovim zakonom:

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \quad m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

Koristno je to zdaj zapisati z potenciali:

$$m\dot{\vec{v}} = -e\nabla\varphi - e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) =$$

$$= -e\nabla\varphi - e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) - e(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{A} =$$

Tu parcialni odvod spremenimo v substancialni odvod s tem, da zraven vzamemo še smerni odvod:

$$= e\nabla\varphi - e\frac{d\vec{A}}{dt} + e\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A})$$

Iz tega sledi:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + e\vec{A}) = \nabla(-e\varphi + e\vec{v} \cdot \vec{A})$$

Tako dobimo končno:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\vec{A}\dot{\vec{r}}\right)\right) = \nabla(-e\varphi + e\vec{v} \cdot \vec{A})$$

Na vsaki strani nam manjka še en delček, ki ga odvod "pohrusta" [Glej zvezek]. SKupaj lahko kombiniramo in prepoznamo Lagrangeovo funkcijo za nabit delec v EM polju:

$$\mathcal{L}(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\varphi(\vec{r}, t) + e\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r}, t)$$

Opazimo, da se Lagrangeova funkcija izraža z **EM potenciali** in ne polji. Če damo to funkcijo skozi E-L enačbe dobimo nazaj ven Lorentzovo silo.

13.4 Hamiltonova funkcija nabitega delca v polju

Zanima nas Hamiltonova funkcija za nabiz delec v polju. Velja:

$$H(\vec{p}, \vec{r}, t) = \dot{\vec{r}}\vec{p} - \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Poglejmo impulz:

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}$$

In sedaj zapišemo Hamiltonian direktno:

$$H = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}\vec{p} - \frac{1}{2}m\left(\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}\right)^2 + e\varphi - e\vec{A}\frac{\vec{p} - e\vec{A}}{m}$$

In ko poračunamo dobimo:

$$H = \frac{1}{2}\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{m} + e\varphi$$

V kvantni mehaniki ta funkcija postane operator. Impulzu $\vec{p} - e\vec{A}$ pravimo *kinetični impulz.*

13.6 Schwartzschildova invarianta

Zanima nas Lagrageova funkcija za zvezno porazdeljen naboj, ki se nahaja v zunanjem polju φ in $\vec{A}$. Za en delec smo prej izračunali Lagrangian. Vzememimo zadnja dva člena ki predstavljata sklopitev s polji:

$$\mathcal{L}_{DP} = -e\varphi + e\dot{\vec{r}}\vec{A}$$

Za zvezno porazdeljen naboj je to potem:

$$\mathcal{L}_{DP} = -\int \rho(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t)\ d^3\vec{r} + \int \vec{j}(\vec{r},t)\vec{A}(\vec{r},t)\ d^3\vec{r} = \int l_{DP}\ d^3\vec{r}$$

Vpeljemo **Volumsko gostoto Lagrangeove funkcije - Schwartzschildova invarianta** $l_{\mathcal{DP}}$

$$l_{\mathcal{DP}} = -\rho(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t) + \vec{j}(\vec{r},t)\vec{A}(\vec{r},t)$$

13.7 Lagrangeova funkcija elektromagnetnega polja

Zanima nas Lagrangeova funkcija, ki ustreza nabitim delcem koz izvorom polja, ki so dodatno lahko še v zunanjem polju. Zapišimo Lagrangian iz dveh prispevkov $l_{\mathcal{P}}$ je volumska gostota prispevka izvirov polja, $l_{\mathcal{DP}}$ pa je volumska gostota sklipitve z zunanji polji. Uganemo:

$$l_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Ta oblika vodi do prave oblike Maxwellovih enačb. Celoten Lagrangian je potem:

$$l = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 - \rho(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t) + \vec{j}(\vec{r},t)\vec{A}(\vec{r},t)$$

Tu lahko zapišemo še kvadrata polji z ustreznimi potenciali.

13.7.1 in 13.7.2 E-L in Riemann-Lorentzeve enačbe

Celotno akcijo lahko sedaj zapišemo kot:

$$S = \int l(\varphi(\vec{r},t), \mathcal{A}_i(\vec{r},t))\; dt\; d^3\vec{r}$$

kar nam da E-L enačbe: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}\right) + \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\varphi)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}\right) + \nabla\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla A_i)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = 0$$

Kar nam da **Riemann-Lorentzove enačbe:**

$$\boldsymbol{\nabla^2}\varphi - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\frac{\boldsymbol{\partial^2}\varphi}{\boldsymbol{\partial}\mathbf{t^2}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_{\mathbf{0}}}$$

$$\boldsymbol{\nabla^2}\mathbf{A_i} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c^2}}\frac{\boldsymbol{\partial^2}\mathbf{A_i}}{\boldsymbol{\partial}\mathbf{t^2}} = -\mu_{\mathbf{0}}\mathbf{j_i}$$

To so splošne enačbe za φ in $\vec{A}$, ki sledijo iz polnih (časovno odvisnih) Maxwellovih enačb.