Kvazistatična polja (obravnava indukcije)

Lenzevo pravilo

"Sprememba magnetnega pretoka skozi tokokrog (zanko) požene električno tok, ki se upira vzroku svojega nastanka."

5.1 Maxwellova formulacija elektromagnetne indukcije

Faradayjev zakon indukcije, ki je kvantitativni zakon, pravi:

$$\Gamma_e = -\frac{d\phi_m}{dt}$$

Če napišemo cirkulacijo in magnetni pretok z integrali dobimo:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

kjer je zanka C rob ploskve S. Uporabimo Stokesov izrek na levi, na desni pa nesemo odvod pod integral saj se zanka ne spreminja s časom:

$$\int \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}$$

Dobimo **Kinematično Maxwellovo enačbo**

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\boldsymbol{\partial} \vec{\mathbf{B}}}{\boldsymbol{\partial} \mathbf{t}}$$

Opazimo še, da ne vsebuje konstant kot parametre.

5.1.1 Maxwellov impulz magnetnega polja

Prepišimo zgornjo enačbo z uporabo magnetnega vektorskega potenciala. Dobimo:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Odvod deluje samo na t zato ga lahko nesemo v rotor. Rotorja se lahko znebimo in dobimo:

$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\boldsymbol{\partial} \vec{\mathbf{A}}}{\boldsymbol{\partial} \mathbf{t}}$ **Povezava z 2. Newtonovim zakonom:**

$$\vec{F} = e\vec{E} = -e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial (e\vec{A})}{\partial t} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Zveza $e\vec{A}$ torej predstavlja gibalno količino. **Indukcija je impulz te gibalne količine, ki jo vnesemo v sistem.**

5.2 Popravljen (kvazistatičen) sistem Maxwellovih enačb

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

In ker se tok ohranja na zankah:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

5.2.1 Elektromagnetna potenciala za kvazistatična polja

Zanima nas, kako zapisati $\vec{E}$ in $\vec{B}$ z osnovnima potencialoma φ in $\vec{A}$.

1. Velja:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

2. Velja:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Če naj to velja moramo $\vec{E}$ defnirati:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Torej, v kvazistatičnem sistemu je električno polje potano z električnim **in** magnetnim vektorskim potencialom.

5.3 Prevodniki in Ohmov zakon [Glej slike]

Snovi, v katerih so nosilci naboja prosto gibljivi, imenujemo prevodniki. Nosilci naboja so lahko elektroni, ioni, vrzeli, ... Za prevodnike velja **Ohmov zakon**:

$$\vec{j} = \sigma_E \vec{E}$$

kjer je σ_E **električna prevodnost**. V ravnvesju so naboji enakomerno porazdeljeni po snovi, ampak ko vključimo električno polje se pojavita dva pola. Ti dva generirata nasprotno enako električno polje, tako da v prevodniku ni električnega polja (ob predpostavki, da je dovolj parov, ki z ločitvijo kompenzirajo zunanje polje). Ker je znotraj polje 0 pomeni, da je **gibljivi naboj na površini prevodnika**. Na površini velja:

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

kjer je σ površinski naboj. Inducirana površinska gostota naboja zasenči zunanje električno polje. Električno polje je v ravnovesju vedno pravokotno na površino prevodnika. Če to ne bi veljalo, bi tekel tok in ne bi bili v ravnovesju. Torej: **Površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev.**

5.3.1 Časovna konstanta prevodnika

Ko vključimo električno polje se v prevodniku prerazporedi naboj. Zanima nas, kako hitro se vzpostavi ravnovesje. Uporabimo **kontinuitetno enačbo**, Ohmov zakon in 1. Maxwellovo enačbo:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \vec{j} = \sigma_E \vec{E} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dobimo:

$$0 = \nabla \cdot (\sigma_E \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma_E}{\varepsilon_0}\rho$$

Rešitev te diferencialke pa že poznamo in sicer:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 e^{-t/\tau} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_E}$$

τ je značilen čas, večja kot je prevodnost prej bo prišel prevodnik v ravnovesje. Recimo za železo je to $\sim 10^{-19}$ s.

5.4 Mikroskopski izvor prevodnosti

Zanima nas, če znamo izpeljati prevodnost. Uporabimo **Deudejev model prevodnosti** (pravzaprav le 2. Newtonov zakon)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\gamma\vec{v} + e\vec{E}(t)$$

kjer člen z γ opisuje proces disipacije (v kristalih je to sipanje, v elektrolitih hidrodinamika ipd.). Poglejmo si, ko je $\vec{E} = 0$. Takrat rešitev že spet takoj poznamo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-\gamma t}$$

Hitrost eksponentno pojema s časom. Imamo disipacijo energije. To je **Izvor Jouleove toplote**: $W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}e^{-2\gamma t}$ Ko pa imamo električno polje $\vec{E} \neq 0$, rešujemo z nastavkom:

$$v(t) = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')} \vec{E}(t')\, dt'$$

Tok lahko zapišemo tudi z n; številsko volumsko gostoto naboja in vstavimo naš nastavek:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = n e \vec{v} =$$

$$= \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')} \vec{E}(t')\, dt'$$

Za konstatno električno polje, ga lahko premaknemo ven iz integrala in nato pointegriramo. Pazi, ker je bilo treba uvesti še novo spremenljivko za eksponent:

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{m\gamma} \vec{E}$$

Tako uvedemo:

$$\sigma_E = \frac{ne^2}{m\gamma}$$

Prevodnost je večja za večje gostote naboja oz. je manjša za težje nosilce naboja ali pa če so nosilci močno dušeni.

5.5 Velikosti električne prevodnosti

Enote so $\mathrm{S/m}$, kjer je S **siemens** oz. $\mathrm{S} = 1/\Omega$. Tipično je prevodnost zelo odvisna od temperature.

Material	Prevodnost
Aluminij	$3 \cdot 10^7\ \mathrm{S/m}$
Železo	$9.9 \cdot 10^7\ \mathrm{S/m}$
$7Ba_2Cn_3O_7$ nad $T = 92\ K$	$10^6\ \mathrm{S/m}$
$7Ba_2Cn_3O_7$ pod $T = 92\ K$	$\infty\ \mathrm{S/m}$
Steklo $T = 300\ K$	$10^{-15}\ \mathrm{S/m}$
Steklo $T = 1000\ K$	$10^{-7}\ \mathrm{S/m}$

5.6 Upornost

Omejimo električni tok na vodnik in vzemimo Ohmov zakon:

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{l} = \sigma_E \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sigma[\varphi(2) - \varphi(1)]$$

Hkrati pa tudi velja:

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{l} = \int \vec{j} \cdot \vec{t} \frac{d^3\vec{r}}{S(l)} = I \int \frac{dl}{S(l)}$$

Enačimo ta dva konca in vpeljemo **upornost** R kot:

$$R = \int \frac{dl}{\sigma_E S(l)}$$

Dobimo tudi znano zvezo:

$$U = -(\varphi(2) - \varphi(1)) = RI$$

5.6. Disipacija energije

Na naboje v elektromagnetnem polju delujeta električna in magnetna sila. Magnetna sila je vedno pravokotna na tir delca, zato ne troši/dodaja energije. Za silo velja:

$$\vec{F} = \int \rho \vec{E} \, d^3\vec{r}$$

Izračunajmo **Joulevo moč** kot integral skalarnega produkta gostote sile in hitrosti: $P = \int \vec{f} \cdot \vec{v} \, d^3\vec{r} = \int \frac{\vec{j}}{\rho}(\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) \, d^3\vec{r} =$
$= \int \vec{j} \cdot \vec{E} \, d^3\vec{r}$ kjer je vektorski produkdt zaradi vzporednosti[??]. Ta izraz nam opisuje izgube pri gibanju nabitih delcev.

5.7 Kapacitativnost

V splošnem želimo vpeljati kapacitativnost prevodnika. Vzamemo N prevodnikov $i = 1, \ldots, N$ in si poglejmo celotno energijo polja. Ker so prevodniki, so naboji le na površini tako da 3D integral pretvorimo v:

$$\rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r} \to \sum_i \sigma_i \, dS_i$$

Dobimo:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_i \oint \varphi \sigma_i \, dS_i = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i e_i$$

kjer je φ konstanta, φ_i predstavlja potencial na površini i-tega prevodnika, e_i pa njegov naboj. Sedaj izrazimo isto energijo se drugače:

$$W_e = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r} \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\, d^3\vec{r'}$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\int\limits_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{r'} =$$

Tu zopet prepoznamo, da je ves naboj na površini prevodnika:

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}\int\limits_{(i)}\int\limits_{(j)} \frac{\sigma_i\sigma_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\, dS_i\, dS_j =$$

kjer sta radij vektorja do poljubnih točk na površini i-tega in j-tega prevodnika. Sedaj uvedemo $\int \sigma_i\, dS_i = e_i$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 e_i e_j}e_i e_j \int\limits_{(i)}\int\limits_{(j)} \frac{\sigma_i\sigma_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\, dS_i\, dS_j =$$

Sedaj lahko uvedemo C_{ij}^{-1}; inverz tenzorja kapacitativnosti. Vidimo, da kapacitativnost normiramo na naboj, hkrati pa tudi vsebuje informacije o porazdelitvi nabojev po prostoru.

$$C_{ij}^{-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 e_i e_j}\int\limits_{(i)}\int\limits_{(j)} \frac{\sigma_i\sigma_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\, dS_i\, dS_j$$

Združimo izraza skupaj:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i e_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}^{-1} e_i e_j$$

Torej je:

$$\varphi_i = \sum_j C_{ij}^{-1} e_j \Rightarrow e_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j$$

To pa poznamo od prej, saj je to le $e = CU$.

5.8 Induktivnost

Podobno kot kapacitivnost samo v jeziku magnetizma. Imamo $i = 1, \ldots, N$ tokovnih vodnikov, po katerih teče tok I_i. Računamo celotno energijo magnetnega polja. Zavedamo se, da smo tok omejili samo na tokovne vodnike:

$$\vec{j}\, d^3\vec{r} = I\, d\vec{l}$$

Torej:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_i I_i \oint \vec{A}\cdot d\vec{l} =$$

Tu se daj uporabimo Stokesov iztek, da dobimo:

$$= \frac{1}{2}\sum_i I_i \iint_S \nabla\times\vec{A}\, d\vec{S} = \frac{1}{2}\sum_i I_i \int_{(i)} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}\sum_i I_i \phi_{m_i}$$

Zapišimo to energijo še na drugi način. Uporabimo splošno rešitev za vektorski potencial:

$$W = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{r'} =$$

Spet se zavedamo, da smo omejili tok na tokovne vodnike:

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} I_i I_j \int_{(i)}\int_{(j)} \frac{d\vec{l}_i d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|} = \frac{1}{2}\sum_i L_{ij} I_i I_j$$

kjer smo uvedli **tenzor induktivnosti** kot:

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{(i)}\oint_{(j)} \frac{d\vec{l}_i d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$$

Po diagonali L_{ii} ima tenzor lastne induktivnosti. Velja pa še:

$$\phi_{m_i} = \sum_i L_{ij} I_j$$

Če to časovno odvajamo, dobimo znan izraz $U = L\dot{I}$.

5.11 Kožni pojav (Skin effect)

Ko **izmenični tok** teče skozi **prevodnik**, se razporedi tako, da je gostota toka največja blizu sten prevodnika. Temu se reče kožni pojav.

5.11.1 Osnovne enačbe kožnega pojava

Uporabimo Maxwellove enačbe in Ohmov zakon za prevodnik:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma_E \vec{E}$$

Na zadnji dve enačbi delujemo z rotorjem:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \sigma_E \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \sigma_E \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \sigma_E \frac{\partial \vec{\vec{B}}}{\partial t}$$

Tu uporabimo vektorsko identiteto: $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \nabla^2 \vec{A}$

Dobimo dve “difuzijski” enačbi za polji:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma_E \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \sigma_E \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Iščemo rešitve z nastavkom, kjer smo predpostavili, da lahko časovno odvisnost zapišemo kot sinus in kosinus pri neki frekvenci:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

Tako dobimo **Helmholtzovo enačbo**:

$$\nabla^2 \vec{E} = k^2 \vec{E} \quad \nabla^2 \vec{B} = k^2 \vec{B}$$

kjer smo definirali:

$$k^2 = -i\omega \mu_0 \sigma_E \to k = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega \mu_0 \sigma_E}$$

Rešitev v eni dimenziji je tako:

$$E(z) = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma_E}{2}} z\right) \exp\left(i \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma_E}{2}} z\right)$$

Udorno globino izračunamo kot:

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma_E}}$$

5.11.2 Geometrija polj in ustrezna rešitev

Vzemimo cilindrčne koordinate (r, ϕ, z) in cilindrično bazo $(\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$. Neničelna prispevka sta samo:

$$E_z(r,t) = E_z(r)e^{-i\omega t}$$

$$B_\phi(r,t) = B_\phi(r)e^{-i\omega t}$$

Laplaceov operator v cilindrični bazi in cilindričnih koordinatah je:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}$$

Rešujemo Helmholtzovo enačbo direktno:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B_\phi}{\partial r}\right) - \frac{B_\phi}{r^2} = k^2 B_\phi$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) - \frac{E_t}{r^2} = k^2 E_z$$

Ti dve enačbi na prvi videz ne delujeta sklopljeni, a velja še povezava med njima:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Pri nas ostane le ena smer:

$$i\omega B_\varphi = (\nabla \times \vec{E})_\phi = -\frac{\partial E_z}{\partial r}$$

Torej ja **sta povezani**. Rešitev enačb so **Modificirane Besselove funkcije** (morajo biti sposobne vzeti kompleksen argument). Torej:

$$E_z(r) = AJ_0(kr)$$

Za rešitev magnetnega polja pa zgornjo enačbo samo odvajamo po času in dodamo minus:

$$B_\phi(r) = -iA\frac{k}{\omega}J_1(kr)$$

kjer je k tak kot prej.

5.11.3 Tok skozi cilindričen vodnik

Gostoto električnega toka lahko sedaj izračinamo:

$$j = \sigma_E E_Z = \sigma_E AJ_0(kr)$$

Celoten tok je potem:

$$I = \int \vec{j} \cdot \hat{n}\, dS = \sigma_E \int_0^a E_z 2\pi r dr =$$

Tu sedaj uporabimo okol obrnjeno zvezo od prej, ko smo delovali z Laplace operatorjem v cilindričnih koordinatah in zvezo med odvodom električnega polja in magnetnim poljem:

$$= i\frac{2\pi a}{\omega\mu_0}|_0^a = \frac{2\pi a}{\mu_0} B_\phi(a)$$

Tok skozi žico je pogojen z odvodom električnega polja na popvršini žice oz. z magnetnim poljem na površini žice. Loči se močen in šibel kožni pojav glede na frekvenco (velikost frekvence).