Magnetostatika

4.1 Amperova sila med ravnima tokovnima vodnikoma

Med tokovnima vodnikoma deluje sila

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 L}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|} \frac{(\vec{r_2} - \vec{r_1})}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}$$

kjer je L dolžina žice in sta $r_{1,2}$ radij vektorja. Sila je za istosmerna tokova privlačna, za nasprotno usmerjena tokova pa odbojna. Sila je magnetni analog Coulombove sile med dvema točkastema nabojema.

4.2 Amperova sila med poljubnima vodnikoma

Gledamo sedaj dva splošna vodnika. Parametrizeramu ju tako, da parametra l_1, l_2 merita kje na vodniku smo. Vzamemo pa še ločna elementa $d\vec{l_1}, d\vec{l_2}$, ki sta določena s smerojo toka v vsaki žici. Tako je sila na odsek žice:

$$d^2\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I_1 d\vec{l_1})(I_2 d\vec{l_2})}{|\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)|^2} \frac{\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)}{|\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)|}$$

Ta formula je rezultat meritev (posplošitev formule za ravna vodnika). Celotna sila na prvo žico je potem:

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{l_1} d\vec{l_2}}{|\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)|^2} \frac{\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)}{|\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)|}$$

To lahko prepišemo v končno obliko:

$$\mathbf{\vec{F}} = \frac{\mu_0 \mathbf{I_1 I_2}}{\mathbf{4}\pi} \int_{(\mathbf{1})} \int_{(\mathbf{2})} \frac{\mathbf{d\vec{l_1}} \times (\mathbf{d\vec{l_2}} \times (\mathbf{\vec{r}(l_2)} - \mathbf{\vec{r}(l_1)}))}{|\mathbf{\vec{r}(l_2)} - \mathbf{\vec{r}(l_1)}|^{\mathbf{3}}}$$

4.3 in 4.4 Električni tok in velikost

Električni tok je gibanje nabitih delcev po vodniku. Gre za skalarno količino. **V magnetostatiki je tok konstanten** (gibanje nabojev je v stacionarnem stanju).

Tok	Velikost
Skozi kanalček v celični membrani	$1 - 10 \text{ pA}$

Tok	Velikost
Živčnega impulza	$1\ \mu\mathrm{A}$
Gospodinjski tok	$1\ \mathrm{A}$
Skozi superprevodne magnete	$12000\ \mathrm{A}$
Pri blisku	$(1-20)\cdot 10^6\ \mathrm{A}$
V Zemljinem jedru	$10^9\ \mathrm{A}$

4.5 in 4.6 Gostota magnetnega polja in velikosti

Podobno kot v elektrostatiki lahko delovanje sile med vodniki opišemo z uvedbo magnetnega polja. Silo prepišemo v obliko, ki jo poznamo:

$$\vec{F} = \int I\, d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{(1)} I_1 d\vec{l_1} \times \left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{(2)} \frac{d\vec{l_2}(\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1))}{|\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)|^3} \right)$$

Zadnji člen uvedemo kot magnetno polje. Dobili smo Biot-Savartov zakon:

$$\vec{B}(\vec{r}(l_1)) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \int_{(2)} \frac{d\vec{l_2}(\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1))}{|\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)|^3}$$

Gostota	Velikost
Možganska aktivnost	$1\ \mathrm{fT}$
Medgalaktična magnetna polja	$1-10\ \mathrm{pT}$
Srčna aktivnost	$100\ \mathrm{pT}$
Zemeljsko magnetno polje	$20-70\ \mu\mathrm{T}$
Železni magneti	$100\ \mathrm{mT}$
Sončeve pege	$1\ \mathrm{T}$
Pospeševalniki	$10\ \mathrm{T}$

Gostota	Velikost
Pri blisku	$10^6 - 10^{11}$ T
Atomska jedra	1 TT

4.7 Magnetne silnice

Uvedemo jih kot:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{B}(\vec{r}(l))}{|\vec{B}(\vec{r}(l))|}$$

Silnice magnetnega polja so vedno sklenjene.

4.8 Magnetna cirkulacija

Uvedemo jo kot integral po zanki:

$$\Gamma_m = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

Tu ni tako kot v elektrostatiki. To ni konstantno 0. Torej za magnetno polje ne moremo trditi, da je brez vrtinčno

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{B} \, d\vec{S} \neq 0$$

4.9 Magnetni pretok

Uvedemo ga kot

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

po **poljubni ploskvi** S. Za **zaključene ploskve pa velja**

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

To je analogno temu, da ni magnetnih monopolov oz. da so silnice magnetnega polja vedno sklenjene. V diferencialni obliki lahko to zapišemo kot:

$$0 = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \nabla \cdot \vec{B}\, dV \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{\vec{B}} = \mathbf{0}$$

4.10 Gostota električnega toka

Električen tok, ki je vezan na žice, posplošimo na gostoto električnega toka:

$$I = \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Opazimo, da $\vec{j}$ nosi informacijo tako o velikosti kot tudi smeri gibanja nabojev in da ni omejen na žice.

4.11 Primeri gostote toka

Zvezna porazdelitev naboja

$$\vec{j} \cdot d\vec{S} = dI = d\left(\frac{de}{dt}\right) = d\left(\frac{\rho dV}{dt}\right) = \rho dS \frac{v_n dt}{dt}$$

Tako smo dobili *"mikroskopsko sliko"*, kjer se gostota naboja giblje:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})\vec{v}$$

Linearni vodnik (v izhodišče)

$$\vec{j} = I\delta^2(\vec{r})\hat{e}_z$$

Premikajoči točkasti naboj

$$\vec{j} = e\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t))\vec{v}$$

kjer je $\vec{r}(t)$ pozicija naboja, $\vec{v}$ pa njegova hitrost.

Površinska gostota toka

$$\vec{j} = \sigma\delta(z - z_0)\vec{v} \qquad \vec{j}_s = \sigma\vec{v}$$

kjer je σ površinska gostota naboja, z_0 pa označuje površino kjer teče tok.

4.13 Amperov izrek [Glej slike!]

Imejmo tokovno zanko C', ki jo zaobjamemo z navidezno zanko C, tako da C' prebada ploskev, ki jo napenja C. Poglejmo si obnašanje magnetnega bolja vzdolž zanke C. Uporabimo cirkulacijo:

$$\Gamma_m = \oint\limits_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint\limits_C \left[\frac{-\mu_0 I}{4\pi} \oint\limits_{C'} d\vec{l} \times \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|} \right) \right] \cdot d\vec{l} =$$

Pozorno poglej in opazi, da gre tu pravzaprav za mešani produkt. Tega lahko ciklično permutiramo. Tako dobimo:

$$= \oint\limits_C \oint\limits_{C'} \frac{-\mu_0 I}{4\pi} (d\vec{l} \times d\vec{l'}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|} \right) =$$

Tu uporabimo dejstvo, da vektorski produkt dveh ločnih elementov dolžine napenja ločni element ploščine.

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d\vec{S} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|} \right) =$$

Tu spet pogledamo z ostrim pogledom in opazimo, da gre za diferencial prostorskega kota $-\frac{dS \cdot \cos\theta}{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|} = -d\Omega$. To pa znamo pointegrirati!

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 4\pi \Rightarrow \mathbf{\Gamma_m = \mu_0 I}$$

To je torej **Amperov izrek**.

Pot do Amperovega zakona

Po eni strani smo pokazali sedaj, da velja:

$$\mu_0 I = \Gamma_m = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int\limits_S \nabla \times \vec{B} \, d\vec{S}$$

Po drugi strani pa vemo da velja:

$$\mu_0 I = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Iz enakosti obeh strani sledi **Amperov zakon:**

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

4.14 Magnetni (vektorski) potencial

Ker je magnetno polje vrtinčno, ga ne moremo opisati s skalarnim potencialom. Vemo pa, da so njegove silnice sklenjene, tako da mora vedno veljati:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Ta pogoj lahko zadostimo če magnetno polje definiramo z vektorskim potencialom $\vec{A}$ kot rotor potenciala, ker velja identiteta:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

To je podobno kot pri električnemu polju, ki je definiran z gradientom. Tam tudi velja identiteta; rotor gradienta bo vedno ničelen. Torej **vektorski magnetni potencial** uvedemo kot:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Magnetni pretok se z vektorskim potencialom lahko zapiše:

$$\phi_m = \int\limits_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int\limits_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int\limits_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Magnetni pretok skozi ploskev je enak cirkulaciji magnetnega potenciala po robu te ploskve.

4.15 Vektorski magnetni potencial tuljave

Imamo dolgo tuljavo v kateri imamo homogeno magnetno polje $\vec{B} = \vec{B}_0$. Zunaj tuljave pa polja ni.

Znotraj tuljave

$\vec{A}$ mora biti oblike

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B}_0 \times \vec{r}$$

da je polje znotraj tuljave $\vec{B}_0 = (0,\ 0,\ B_0)$.

Zunaj tuljave

Pričakovali bi, da ker je polje ničelno je tudi potencial ničelen ali vsaj konstanten, ampak bomo videli, da temu ni tako. Gledamo zanko ob zunanjem robu tuljave (je malo večja). Izračunamo lahko magnetni pretok:

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 \pi a^2$$

Vemo pa od malo prej, da je pretok enak cirkulaciji po robu te ploskve torej sledi:

$$\phi_m = \int\limits_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

Poskušajmo uganiti obliko potenciala, tako da bo zvezen na robu:

$$\vec{A} = C\vec{B}_0 \times \frac{\vec{r}}{r^2} \qquad \nabla \times \vec{A} = 0$$

Izračunajmo:

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} C\left(\vec{B}_0 \times \frac{\vec{r}}{r^2}\right) \cdot d\vec{r} = \dots = 2\pi C B_0$$

Ker zahtevamo zveznost mora to biti na robu enako prejžnjemu rezultatu:

$$2\pi C B_0 = B_0 \pi a^2 \Rightarrow C = \frac{a^2}{2}$$

Dobimo močno prostorsko odvisen vektorski potencial čeprav polja zunaj tuljave ni.

Umeritev

Uvedemo lahko nov magnetni potencial:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\xi(\vec{r}) \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$$

Oba potenciala ustrezata isti gostoti magnetnega polja $\vec{B}$, ker je $\nabla \times (\nabla\xi) = 0$. Konkretno za dolgo tuljavo si lahko izberemo:

$$\xi(\vec{r}) = \frac{B_0 a^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Potem se potencial zunaj tuljave prepiše v obliko, kjer je edino na $-y$ osi neničelen.

$$\vec{A} = \frac{B_0 a^2}{2} \frac{2\pi}{a} \delta(\varphi - \pi) \hat{e}_\varphi$$

Z uvedbo umeritvenih funkcij torej lahko spremenimo oz. prestavljamo potencial ne da bi pri tem spremenil polje.

4.17 Magnetna sila

Magnetna sila na vodnik se zapiše kot:

$$\vec{F} = \int I \, d\vec{l} \times \vec{B}$$

Za splošno gostoto toka $I \, d\vec{l} = \vec{j} \, d^3\vec{r}$:

$$\vec{F} = \int_V j \times \vec{B} \, d^3\vec{r}$$

kjer integriramo po volumnu, kjer je $\vec{j} \neq 0$.

Sila na gibajoč točkasti naboj

$$\vec{j} = e\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t))\vec{v}$$

$$\vec{F} = \int\limits_V e\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t))\vec{v} \times \vec{B}\, d^3\vec{r} = e\vec{v} \times \vec{B}$$

4.19 Kirchoffova enačba

Zanima nas čemu zadošča vektorski magnetni potencial. Uporabimo Amperov zakon:

$$\begin{aligned} \mu_0\vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \\ = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \end{aligned}$$

Uporabimo **Helmholtzov dekompozicijski izrek**, ki pravi, da *vsako* vektorsko polje lahko zapišemo kot vsoto brezizvirnega in brezvrtinčnega dela.

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 \qquad \nabla \cdot \vec{A}_1 = 0 \quad \nabla \times \vec{A}_2 = 0$$

Lahko uporabimo umeritev $\vec{A}_2 = 0$, ker je rotor njega ničelen in bi lahko vzeli karkoli. Zato je:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \nabla \cdot \vec{A}_1 = 0$$

Iz tega sledi osnovna enačba za izračun vektorskega potenciala **Kirchoffova enačba**:

$$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

Enačba je podobna Poissonovo enačbi zato kar sklepajmo o rešitvi enačbe. **Splošna rešitev** se glasi:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3\vec{r'}$$

kjer integriramo povsod kjer je $\vec{j} \neq 0$. Od tod sledi (oz. je usklajeno) **Biot-Savartov zakon**:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}\, d^3\vec{r'}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(r') \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}\, d^3\vec{r'}$$

Spomni se, da tu nabla deluje samo na $\vec{r}$.

4.21 Magnetna energija

Magnetna energija v **zunanjem** polju

Vpeljemo jo v stacionarni aproksimaciji. Torej imamo tokove, ampak se ti s časom ne spreminjajo. Spet imamo tokovno zanko C v zunanjem magnetnem polju. Lokalno smer zanke določimo z $\vec{t}$. Izračunajmo silo na zanko:

$$\vec{F} = I \oint\limits_{C} d\vec{l} \times \vec{B} = I \oint (\vec{t} \times \vec{B})\, dl$$

Če zanko premaknmo za $d\vec{r}$, opravimo delo. Zanka se premakne za cilindrično ploščino S.

$$dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -I \oint (\vec{t} \times \vec{B})\, dl \cdot d\vec{r}$$

Tu tako kot smo prej pri poglavju 4.13 videli, dobimo spet mešani produkt, ki ga lahko permutiramo. Dobimo vektorski produkt, ki nam daja površino, ki jo zanka opiše ob premiku.

$$dA = -I \oint\limits_{C} (d\vec{r} \times \vec{t})\vec{B}\, dl = -I\vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Torej smo ugotovili:

$$A = -I \int\limits_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -I\phi_m$$

Energija z uporabo vektorskega potenciala

Delo lahko zapišemo kot:

$$A = -I \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -I \int\limits_{S} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} =$$

Tu sedaj uporabimo *Stokesov izrek* da dobimo:

$$= -I \int\limits_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} + I \int\limits_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} =$$

Posplošimo zdaj na gostoto toka:

$$= - \int\limits_{V_2} \vec{j} \cdot \vec{A}\, d^3r + \int\limits_{V_1} \vec{j} \cdot \vec{A}\, d^3r$$

Torej je energija gostote toka v **zunanjem polju**:

$$W = - \int\limits_{V} \vec{j} \cdot \vec{A}\, d^3r$$

kjer teče ta integral po volumnu, kjer je $\vec{j} \neq 0$. Gostota energije pa je po tem takem:

$$w = -\vec{j} \cdot \vec{A}$$

4.21.2 Magnetna energija kot funkcional toka

Iz Kirchoffove enačbe imamo

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}'(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, d^3\vec{r'}$$

Tako dobimo energijo tokov $\vec{j}$ v polju, ki ga ustvarjajo tokovi $\vec{j}$' kot:

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V'} \int\limits_{V} \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}'(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, d^3\vec{r'} \, d^3\vec{r}$$

4.21.3 **Celotna** magnetna energija

Zanima nas celotna magnetna energija polja $\vec{A}$, ki ga ustvarja gostota tokov $\vec{j}$ (torej ta gostota tokov ustvarja polje potenciala). Analogno kot pri elektrostatiki uvedemo parameter $\alpha \in [0, 1]$, ki postopoma vključi tok iz nič na končno vrednost. Smo pri nekem α in mu dodamo nekaj malo toka:

$$d\vec{j} = \vec{j} \, d\alpha$$

To vstavimo v izraz za spremembo energije in uporabimo linearnost Kirchoffove enačbe:

$$\begin{aligned} dW = -\int\limits_V d\vec{j} \cdot \hat{\vec{A}} \, d^3\vec{r} = -\int\limits_V \vec{j} \cdot \alpha \, d\alpha \, d^3\vec{r} = \\ = -\int_0^1 \alpha \, d\alpha \int (\vec{j} \cdot \vec{A}) \, d^3r \\ \Rightarrow W = -\frac{1}{2} \int (\vec{j} \cdot \vec{A}) \, d^3r \end{aligned}$$

VENDAR!

Ta izraz ne upošteva , da je za vzpostavitev toka potrebna energija, kar je drugače kot v elektrostatiki, kjer je naboj stalen. Torej za vzpostavitev toka je potrebna energija:

$$P = -UI = -I \int\limits_C \vec{E} \cdot d\vec{r} =$$

kjer je C zanka po kateri teče tok. Tu malce skočimo naprej preskočimo in se spomnemo, da velja v resnici:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Torej če nadaljujemo dobimo:

$$= I\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\partial W}{\partial t}$$

Iz tega dobimo še:

$$W = I\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = I\int \nabla\times\vec{A}\, d\vec{S} = I\oint \vec{A}\, d\vec{r} =$$

Tu vidimo, da imamo $Id\vec{r} = \vec{j}\ d^3\vec{r}$ in dobimo:

$$= \int \vec{j}\cdot\vec{A}\, d^3\vec{r}$$

Sedaj imamo oba prespevka. Torej **energija celotnega polja** $\vec{A}$, ki ga ustvarja gostota tokov $\vec{j}$, kjer smo upoštevali tudi to, da je bilo treba tok vzpostavit:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{j}\cdot\vec{A}\, d^3\vec{r}$$

4.22 Gostota magnetne energije

Poskusimo prepisati celotno energijo v obliko, ki ima odvisnost od gostote magnetnega polja in ne vektorskega potenciala. Uporabili bomo identiteto:

$$\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{A}) = (\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A} - (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B}$$

Tako torej: $W = \frac{1}{2}\int_S \vec{j}\cdot\vec{A}\, d^3\vec{r} = \frac{1}{2\mu_0}\int_V (\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A}\, d^3\vec{r} =$

$$\frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2\ d^3\vec{r} + \frac{1}{2\mu_0}\int_V \nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{A})\ d^3\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2\ d^3\vec{r} + \frac{1}{2\mu_0}\int_{\partial V} (\vec{B}\times\vec{A})\ d\vec{S}$$

Če pogledamo odvisnosti od r v zadnjem členu, lahko opazimo, da gre če je $r\to\infty$ oz. če je volumen velik, zadnji člen proti 0. Ostane nam iztaz za **magnetno energijo**:

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\ d^3\vec{r}$$

in gostota energije:

$$w = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

4.24 Sila kot funkcional magnetnega polja

Zanima nas kakšna sila deluje na delec z gostoto toka $\vec{j}$, ki se nahaja v magnetnem polju. Velja:

$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B}\, d^3\vec{r}$$

kjer integriramo po volumnu delca, kjer je $\vec{j} \neq 0$. Pravzaprav hočemo ta izraz zapisati kot integral po površini delca, pri čemer naj poznamo le $\vec{B}$. Uporabimo Amperov zakon:

$$\vec{F} = \int_V (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}\, d^3\vec{r} =$$

Uporabimo zvezo

kjer pazimo, da bomo v našem primeru nesli en $\vec{B}$ za prvi rotor, kar pridela $-$. Zadnji člen je pri nas ničelen, ker obravnavamo magnetna polja. Uporabimo:

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{1}{2}\nabla B^2 - \nabla \cdot (\vec{B} \otimes \vec{B}) + \vec{B}(\nabla \cdot \vec{B})$$

Tako dobimo izraz

$$= \frac{1}{\mu_0} \int_V \left[\nabla \cdot (\vec{B} \otimes \vec{B}) - \frac{1}{2}\nabla B^2\right]\, d^3\vec{r}$$

ki je pripravjn na rabo Gaussovega izreka. Dobimo končno:

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial V} \left(\vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2}B^2 \underline{\underline{I}}\right) d\vec{S}$$

Integral poteka po površini “delca” na katerega računamo silo. u imamo upoštevan **celoten** $\vec{B}$, ki je vsota zunanjega polja in polja, ki ga ustvarja gostota tokov $\vec{j}$.

4.25 Tenzor napetosti magnetnega polja

Uvedemo tenzor napetosti magnetnega polja kot:

$$F_i = \int_{\partial V} T_{ik} n_k\, dS$$

kjer je

$$T_{ik} = \frac{1}{\mu_0}\left[B_i B_k - \frac{1}{2}B^2 \delta_{ik}\right]$$

Zapis z volumsko gostoto sile pa je:

$$F_i = \int\limits_{\partial V} T_{ik} n_k \, dS = \int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \, dV$$

4.27 Multipolni razvoj magnernega polja

Podobno kot pri elektrostatiki nas zanima obnašanje potenciala daleč stran od njegovega izvira. Razvijmo splošno rešitev Kirchoffove enačbe za $|\vec{r}|$»$|\vec{r'}|$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - (\vec{r'} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{r} \right) + \dots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r'} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$$

Magnetni potencial se torej do drugega/dipolnega reda zapiše kot:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}(\vec{r'}) \, d^3\vec{r'} + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int \vec{j}(\vec{r'} \cdot \vec{r}) \, d^3\vec{r'}$$

Opazi: V primerjavi z elektrostatiko je tu monopolni člen že vektor, dipolni člen je pa še višjega reda (je tenzor).

4.27.1 Monopolni člen

Tokovnice so sklenjene

$$\int \vec{j}(\vec{r'}) \, d^3\vec{r'} = 0$$

4.27.2 Dipolni člen

V knjigi je opisan postopek, kako se ga preračuna iz zgornje oblike v

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$

kjer je $\vec{m}$ **magnetni dipolni moment** definiran kot:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r'} \times \vec{j} \, d^3\vec{r'}$$

4.29 Amperova ekvivalenca

Izračunajmo magnetni dipolni moment krožne zanke z radijem a po kateri teče tok I. V cilindričnih koordinatah je to najlažje rešiti. Tam lahko vzamemo parametrizacijo:

$$\vec{r'} = a\hat{e}_r \qquad \vec{j}(\vec{r'}) \, d^3\vec{r'} = I(\hat{e}_\varphi) \, dl$$

Torej lahko zapišemo magnetni dipolni moment kar direktno kot:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}aI\int(\hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi)\,dl = \frac{1}{2}aI\hat{e}_z \cdot 2\pi a = \pi a^2 I\hat{e}_z = SI\hat{e}_z$$

Amperova ekvivalenca: Tokovna zanka v magnetnem polju je ekvivalentna magnetnemu dipolu v zunanjem magnetnem polju.

4.30 Multipolni razvoj magnetne energije

Zanima nas energija gostote toka v zunanjem magnetnem polju. Ta izraz smo izpeljali prej (preden smo upoštevali, da moramo še ustvariti tok in da to prispeva h celotni energiji polja):

$$W = -\int_V \vec{j}_0(\vec{r})\vec{A}(\vec{r})\;d^3\vec{r}$$

Razvijmo sedaj potencial okoli točke $\vec{r}_0$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}_0) + ((\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\nabla_0)\,\vec{A}(\vec{r}_0)$$

To nam da za energijo iztaz:

$$W = -\int_V \vec{j}_0(\vec{r})\vec{A}(\vec{r}_0)\;d^3\vec{r} - \int_V \vec{j}_0(\vec{r})\left[(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\nabla_0\right]\vec{A}(\vec{r}_0)\;d^3\vec{r} =$$

Monopolni člen je enak 0, v naslednjem členu pa simetriziramo tenzor, da dobimo:

$$= -I\oint_C \left[(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\nabla_0\right]\vec{A}(\vec{r}_0\;d^3\vec{r}) =$$

Tu sedaj uporabimo identiteto:

$$(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

in dobimo:

$$\begin{gathered}[(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\nabla_0](d\vec{l}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0)) - [(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{A}(\vec{r}_0)](d\vec{l}\cdot\nabla_0) = \\ = [(\vec{r}-\vec{r}_0)\times d\vec{l}][\nabla_0\times\vec{A}(\vec{r}_0)]\end{gathered}$$

Lahko naredimo popolen diferencial katerega integral po zaključeni zanki da 0.

$$\begin{gathered}d\left([(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\nabla_0](\vec{l}\cdot\vec{A}\vec{r}_0)\right) = \\ = (d\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0))(\vec{l}\cdot\nabla_0) + ((\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{A}(\vec{r}_0))(d\vec{l}\cdot\nabla_0)\end{gathered}$$

Med diferencialoma $d\vec{r}$ in $d\vec{l}$ ni razlike, tako da dobimo:

$$(d\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}_0))(\vec{l}\cdot\nabla_0) = -((\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{A}(\vec{r}_0))(d\vec{l}\cdot\nabla_0)$$

In navsezadnje dobimo (nadaljevanje od prej)

$$= -(\nabla_0 \times \vec{A}(\vec{r}_0)) \cdot \left[\frac{I}{2} \oint_C ((\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{l})\right] =$$

$$= -(\nabla_0 \times \vec{A}(\vec{r}_0)) \left[\frac{1}{2} \oint_V (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{j}_0(\vec{r}_0)\, d^3\vec{r}\right]$$

V prvem oklepaju prepoznamo zapis za gostoto magnetnega polja, v drugem pa magnetni dipolni moment. S tem smo dobili končno:

$$W = -\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r}_0)$$

4.31 Sila in navor na dipol v zunanjem polju

Sila

Kot pri elektrostatiki spet velja:

$$\vec{F} = -\nabla W \Leftrightarrow dW = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Sila bo gradient energije:

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \vec{m} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}$$

Prepoznamo, da je tok, ki ustvarja zunanje polje, nekje daleč stran, torej ni porazdelitve v točki $\vec{r}$. Torej velja $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = 0$ in tako dobimo **silo na magnetni dipol v zunanjem magnetnem polju:**

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}$$

Navor

Kot pri elektrostatiki podobno velja:

$$dW = -\vec{M} \cdot d\vec{\phi}$$

Če zavrtimo dipol je sprememba $d\vec{m} = d\vec{\phi} \times \vec{m}$. Dobimo:

$$dW = -d(\vec{m} \cdot \vec{B}) = -d\vec{m} \cdot \vec{B} = -(d\vec{\phi} \times \vec{m}) \cdot \vec{B} = -(\vec{m} \times \vec{B})d\vec{\phi}$$

To lahko pointegriramo in dobimo **navor na magnetni dipol v zunanjem magnetnem polju:**

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$