Maxwellove Enačbe

Maxwellova teorija elektromagnetnega polja povezuje električno in magnetno polje $\vec{E}(\vec{r},t)$ in $\vec{B}(\vec{r},t)$, z gostoto naboja in gostoto toka:

$$\rho(\vec{r},t) \qquad \vec{j}(\vec{r},t)$$

ki sta **izvira polj**. Zavedajmo se **Helmholtzovega izreka**, ki trdi, da je poljubno vektorsko polje popolnoma določeno, če poznamo njegovo divergenco in rotor.

6.1 Ohranjanje naboja (kontinuitetna enačba) [Glej sliko]

Zanima nas celoten naboj v V_0:

$$e(t) = \int\limits_{V_0} \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r}$$

V splošnem $e(t)$ ni konstantent, ker lahko $\vec{j}$ stalno prinaša/odnaša naboj. Torej:

$$\frac{de}{dt} = -\int\limits_{\partial V_0} \vec{j}\cdot\hat{n}\, dS = -\int \nabla\cdot\vec{j}\, d^3\vec{r}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} = \int \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d^3\vec{r}$$

Ta dva končna dela enačimo in dobimo **kontinuitetno enačbo**:

$$\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Posledica te enačbe je, da gostota naboja na nekem mestu ni nujno več konstantna v času, saj tok lahko prinaša/odnaša naboje.

6.2 Maxwellov premikalni tok

Osnovne Maxwellove enačbe v kvazistatični sliki smo spoznali malo prej, ampak te enačbe niso popolne. Pride do kršitve kontinuitetne enačbe. Na enačbo:

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

delujemo z divergenco, da dobimo:

$$\mu_0\nabla\cdot\vec{j} = \nabla(\nabla\times\vec{B}) = 0$$

To je kršitev kontinuitetne enačbe. Zagato rešimo tako, da enačbo dopolnimo s **premikalnim tokom**. Popravljena enačba se tako glasi:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Lahko preverimo pravilnost, tako da delujemo nanjo z divergenco:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_o \nabla \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{E})$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

6.3 Popoln set Maxwellovih enačb

To so enačbe, ki v celoti določajo klasično elektrodinamiko. Prva in četrta enačba podajata povezavo polj z izvori. Drugi in tretji pa pravimo kinetični enačbi.

I. enačba

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_{\mathbf{0}}}$$

II. enačba

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$$

III. enačba

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\boldsymbol{\partial} \vec{\mathbf{B}}}{\boldsymbol{\partial} \mathbf{t}}$$

IV. enačba

$$\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_{\mathbf{0}} \vec{\mathbf{j}} + \mu_{\mathbf{0}} \varepsilon_{\mathbf{0}} \frac{\boldsymbol{\partial} \vec{\mathbf{E}}}{\boldsymbol{\partial} \mathbf{t}}$$

Kontinuitetna enačba

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{j}} + \frac{\boldsymbol{\partial} \rho}{\boldsymbol{\partial} \mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

6.5 Ohranitveni zakoni

Maxwellove enačbe ohranjajo *naboj, gibalno količino, vrtilno količino in celotno energijo*.

6.5.1 Ohranitev energije

Radi bi kontinuitetno enačbo za energijo. Vzamemo tretjo in četrto e načbo in ju križno zmnožimo z polji. Dobimo:

$$\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} = \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} = \vec{E} \cdot \mu_0 \vec{j} + \vec{E} \cdot \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Sedaj enačbi odštejemo eno od druge, da pridemo do:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \times \vec{E}) - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Tu potegnemo ven časovni odvod in divergenco vektorskega produkta:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2\right) = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Dobimo:

$$\boldsymbol{\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{P} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0}$$

kjer je w **gostota naboja**:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

in $\vec{P}$ **Poyntingov vektor**:

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$$

V integralski obliki lahko ta ohranitveni zakon zapišemo kot:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w \, d^3\vec{r} = - \int_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{S} - \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} \, d^3\vec{r}$$

Torej celotna energija v nekem volumnu (člen na levi) se lahko spreminja kot posledica odtoka/dotoka energije skozi površino (prvi člen na desni) ali pa na nivoju celega volumna (drugi člen na desni) npr. Ohmske izgube.

6.5.2 Ohranitev gibalne količine (Cauchyjeva enačba)

Kontinuitetna enačba za gibalno količino. Obravnavamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0(\vec{E} \times \vec{B})) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \varepsilon_0 \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} =$$

Odvode izrazimo iz Maxwellovih enačb, da dobimo:

$$= \varepsilon_0 \left[\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0} (\vec{j} \times \vec{B}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \right] = \dots$$

Tu bi sedaj predelali dvojne vektorske produkte da bi dobili na koncu:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})) = \nabla \cdot \left[\varepsilon_0 \vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \underline{\underline{I}} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \otimes \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \underline{\underline{I}} \right] - [\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}]$$

Tako dobimo **Cauchyjevo kontinuitetno enačbo za gibalno količino**:

$$\boldsymbol{\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0}$$

kjer je $\vec{g}$ **gostota gibalne količine**, T_{ik} **napetostni tenzor elektromagnetnega polja** in $\vec{f}$ **Lorentzova gostota sile**:

$$\vec{g} = \varepsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$T_{ik} = \varepsilon_0 E_i E_k - \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \delta_{ik} + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \delta_{ik}$$

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

V integralni obliki se to zapiše kot:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V g_i \, d^3\vec{r} = \int_{\partial V} T_{ik} \, dS_k - \int_V f_i \, d^3\vec{r}$$

V danem volumnu se gibalna kolučina lahko spreminja kot posledica delovanja napetostnega tenzorja na površini telesa ali kot posledica Lorentzove volumske sile.

6.5.4 Ohranjanje vrtilne količine

Vzamemo ogranitev gibalne količione, ki smo jo ravno izpeljali in enačbo pomnožimo z ročico x_j:

$$\frac{\partial (x_j g_i)}{\partial t} = x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} - x_j f_i$$

Tu uporabimo zvezo:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial (x_j T_{ik})}{\partial x_k} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} T_{ik} = \frac{\partial (x_j T_{ik})}{\partial x_k} - \delta_{jk} T_{ik}$$

Dobimo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_j g_i) = \frac{\partial (x_j T_{ik})}{\partial x_k} - T_{ij} - x_j f_i$$

To sedaj pomnožimo z Levi-Civita tenzorjem ε_{lji}:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{lji}x_j g_i) = \frac{\partial(\varepsilon_{lji}x_j T_{ik})}{\partial x_k} - \varepsilon_{lji}T_{ij} - \varepsilon_{lji}x_j f_i$$

En člen nam zaradi simetrije odpade- Tako ostane:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{lji}x_j g_i) = \frac{\partial(\varepsilon_{lji}x_j T_{ik})}{\partial x_k} - \varepsilon_{lji}x_j f_i$$

Dobimo **kontinuitetno enačbo za gibalno količino**:

$$\frac{\partial \gamma_l}{\partial t} - \frac{\partial(\varepsilon_{lji}x_j T_{ik})}{\partial x_k} + m_l = 0$$

kjer je m_l **gostota navora** in γ_l **gostota vrtilne količine**:

$$m_l = \varepsilon_{lji}x_j f_i$$

$$\gamma_l = \varepsilon_{lji}x_j g_i$$

To lahko prepišemo v integralsko obliko:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \gamma_l \, d^3\vec{r} = \int\limits_{\partial V} (\varepsilon_{lji}x_j T_{ik})n_k \, dS - \int\limits_V m_l \, d^3\vec{r}$$

Vrtilna količina elektromagnetnega polja se torej spreminja kot posledica delovanja napetostnega tenzorrja na površini in volumskih navorov.