Elektromagnetno polje

Kontakt: Miha Ravnik

miha.ravnik@fmf.uni-lj.si

J11, 204 po dogovoru

Obveznosti: Izpit iz predavanj

www.predmeti.fmf.uni-lj.si/emp

Literatura:

R. Podgornik in A. Vilfan, Elektromagnetno polje, DMFA

Landau in Lifshitz, Classical theory of Fields, 4th Ed...

Jackson. Classical Electrodynamics, 3rd Wiley

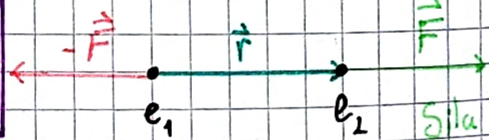
D.J. Griffiths, Introduction to Elektrodynamics, 3rd Ed

I. Elektrostatika

3.1. Coulombova sila med naboji

Elektrostatika opisuje sile med mirujočimi naboji, ki so konstantni/časovno nespremenljivi. Točkasti nabiti delci med seboj delujejo s silo:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{e_1 e_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}}$$



Sila, ki deluje na drugega, ki pa jo povzroča prvi.

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{As}{Vm}$$

Ta formula je empirična. To smo zmerili. Je taka, ker je taka narava. Tega se ne da ravno izpeljati.

3.2. Velikost in enota električnega naboja

- Naboj merimo v Coulombih $1C = 1As$.
- Naboj je (praviloma) mnogokratnik (→ kvarki 1/3) osnovnega naboja $e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,As$

Najmanjši naboj v naravi (kvarki) $\frac{1}{3}e_0 = 0{,}5 \cdot 10^{-19}\,As$

Naboj elektrona $-e_0$

Naboj na kondenzatorju	10^{-7} As
Naboj pri blisku	1 - 100 As
Naboj v akumulatorju	$0,2 \cdot 10^{6}$ As
Naboj Zemlje (brez atmosfere)	$5 \cdot 10^{5}$ C
Naboj Zemlje (z bližnjo atmosfero)	1 C
Naboj, ki ga proizvede elektrarna (v enem letu)	$3 \cdot 10^{11}$ C

3.3 Jakost električnega polja

V Faradayevi oz. Maxwellovi sliki se delovanje/interakcije med nabitimi delci opiše z delovanjem električnega polja.

Električno polje je torej posrednik interakcije med naboji

Električno silo izračunamo kot:

Drugi naboj v polju prvega

$$\vec{F} = e\vec{E} \qquad \left(\vec{F}_{21} = e_2 E_1\right)$$

Sila prvega na drugega

Polje, ki ga povzroči prvi naboj

Posledica:

Smer $\vec{E}$ je vedno določena s smerjo sile, ki bi delovala na točkast naboj.

Električno polje za točkast naboj: (→ primerjava s Coulombovim zakonom)

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$; za naboj, ki se nahaja v $\vec{r} = 0$

Transformacijske lastnosti $\vec{E}$:

$\vec{E}$ je vektor torej se pri ortogonalni transformaciji transformira kot vektor.

$$\vec{E}' = \underline{\underline{a}}\vec{E}\,; \quad E_i' = \sum_k a_{ik} E_k$$

Ortogonalne transformacije

Transformacije a, ki ohranjajo skal. produkt

$$\langle u, v \rangle = \langle au, av \rangle$$

Ohranja kote. To so rotacije in zrcaljenja.

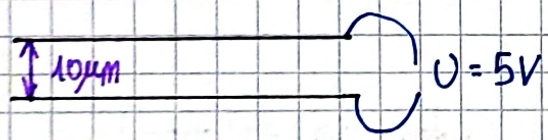
Intenziteta polja je skalar, ki se ohranja pri ortogonalnih transformacijah.

$$|\vec{E}|^2 \rightarrow \text{intenziteta}$$

Značilne velikosti jakosti $\vec{E}$

Kozmično sevanje	$10\,\mu V/m$
Polje znotraj žice	$0{,}5\,mV/m$
Polje v Zemeljski atmosferi	$100-300\,V/m$
Prebojna jakost v atmosferi	$1-3\,MV/m$
Polje preko biološke membrane (recimo celic)	$10\,MV/m$
Polje v močnem laserskem snopu	$100\,TV/m$

Primer/naloga: Oceni polje v zaslonu (LCD) vašega mobitela



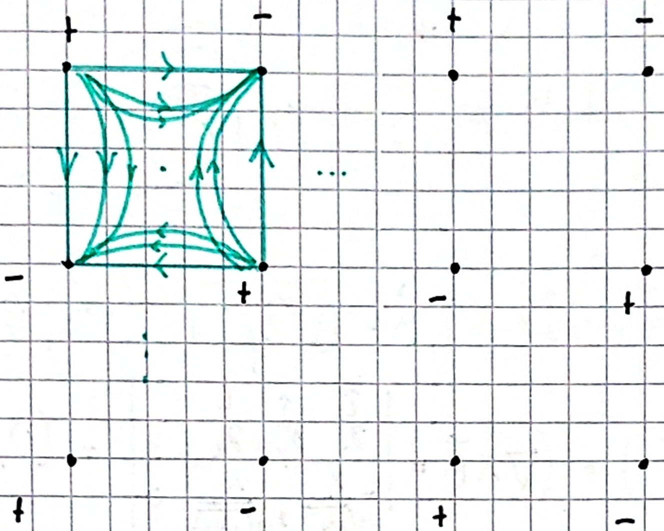
$$E = \frac{U}{d} = \frac{5V}{10\mu m} = 0{,}5\,MV/m$$

3.4. Električne silnice

Električne silnice kažejo v smeri električnega polja. Uvedemo jih kot krivuljo:

$$\dot{\vec{r}}(s) = \frac{d\vec{r}}{dS} = \frac{\vec{E}(\vec{r}(s))}{|\vec{E}(\vec{r}(s))|}$$

Primer: Nariši el. silnice za 2D mrežo enakih +/- nabojev



Faradayeva konstrukcija

i) Silnice kažejo v smeri $\vec{E}$ in se ne sekajo
ii) gostota silnic ustreza jakosti polja
iii) Začnejo se v + in končajo v −
iv) Silnice električnega polja NISO zaključene

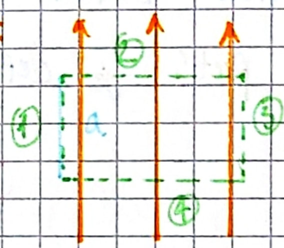
3.5. Električna cirkulacija

Cirkulacija se uvede kot integral

$$\Gamma_e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

po zaključeni zanki C

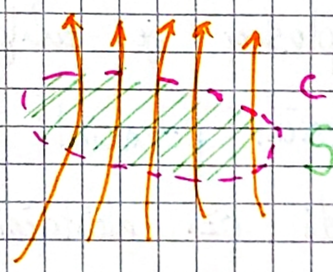
Primer: $\vec{E} = konst$



$\Gamma_e = (1) + (2) + (3) + (4) = aE + 0 + (-aE) + 0 = \underline{0}$

! Za vsa statična polja velja $\Gamma_e = 0$

(Tudi za drugačno zanko in polje)



Iz česa sledi:

$$0 = \oint_C \vec{E}\, d\vec{r} \overset{\text{Stokesov izrek}}{=} \int_S \nabla \times \vec{E}\, d\vec{S}$$

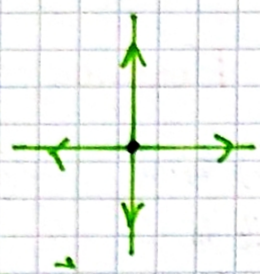
$$\Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Torej je statično el. polje brezvrtinčno.

Spomni se, da je to že zametek maxwellove enačbe (nimamo B) ker imamo statiko $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Primer: Kakšni sta polji, vrtinčni/brezvrtinčni?

a)



$$\vec{E} = E_0 \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left(E_0 \frac{\vec{r}}{r}\right) = 0$$

Brezvrtinčno

b)

$$\vec{B} = B_0 \hat{e}_\varphi = B_0\left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0\right)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \neq 0) \neq 0$$

Je vrtinčno

3.6 Električni pretok

Električni pretok je definiran kot

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Kakšna je ploskev S? Poljubna! (Ko ploskev postane sklenjena bomo prišli do Gaussa)

Posebna ploskev je zaključena ploskev → Dobimo Gaussov izrek

3.7 Električni potencial

Elektrostatski oz. električni potencial uvedemo kot skalarno funkcijo/polje kot:

$$\boxed{\vec{E}(r) = \underbrace{-}_{\text{po dogovoru}} \nabla f(\vec{r})}$$

Zakaj to sploh naredimo?

Ker je f skalarna količina (in ne vektorska kot $\vec{E}$) in se zato lažje računa.

Kratko o operatorjem ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad ; \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

∇ je vektorski operator, ki deluje na skalar (v osnovni obliki). Iz skalarja naredi vektor.

Primer:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \frac{\partial}{\partial y}(\ldots), \frac{\partial}{\partial z}(\ldots)\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}, \ldots, \ldots\right) = \left(\frac{-x}{r^3}, \frac{-y}{r^3}, \frac{-z}{r^3}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Operator ∇^2 je definiran kot:

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{(Laplaceov operator)}$$

Primer: [Električni potencial točkastega naboja]

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

Konstanta! (Določen je do konstante natančno)

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\nabla\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \varphi_0\right)$$

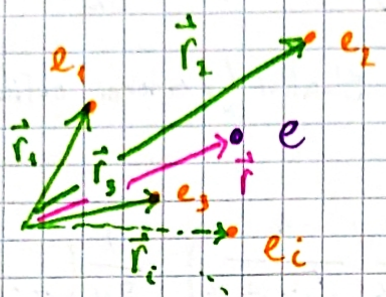
$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \varphi_0$$

Temu se reče <u>umeritev</u> (gauge)
(ko se zmenimo koliko je φ_0)

V tem primeru je umeritev konstanta, v splošnih primerih pa je lahko funkcija.

3.10 Princip superpozicije

Obravnavamo:



V takem sistemu je sila na naboj e enaka:

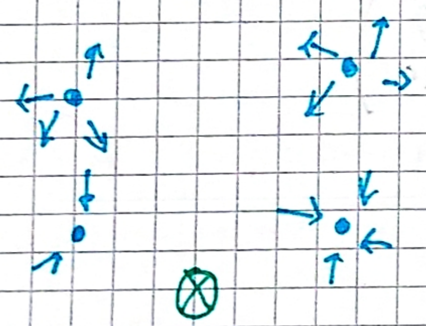
$$\vec{F} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1) + \ldots + \frac{e_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)\ldots\right]$$

$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{e_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

Celotna sila je Vsota posameznih parskih prispevkov (Princip superpozicije)

Recimo primer fizike kjer ne velja

Izviri vode



Hitrostno polje ec? Ne velja nujno princip superpozicije (da samo seštejemo vse prispevke).

V elektrostatiki velja princip superpozicije.

Enako velja za el. polje in el. potencial:

$$\vec{E} = \sum_i \frac{e_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

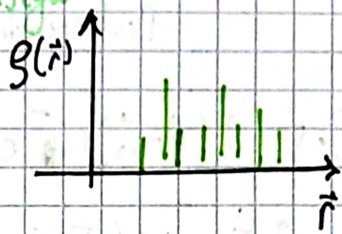
El. polje in potencial sta aditivna (kar pa pogosto ne velja za druga fizikalna polja).

3.11 Gostota električnega naboja

El. naboj je pogosto porazdeljen. Zato se uvede količina - Volumsko gostoto naboja.

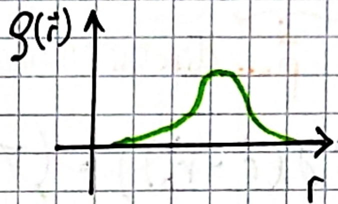
• Diskretno:

$$\rho(\vec r) = \sum_i \overbrace{e_i \,\delta}^{\text{Da je naboj res del našega Volumna}}(\vec r - \vec r_i)$$



• Zvezno:

$$\rho(\vec r) = \frac{de}{dV}$$



Z uporabo gostote naboja zapišimo $\vec F, \vec E, \varphi$:

$$\vec F = \int_V \rho(\vec r)\vec E(\vec r)\,d^3\vec r \qquad ; \ \vec F = e\vec E$$

↑ Sila na neko telo (z Volumnom V), ki ima porazdeljen naboj po $\rho(\vec r)$.

$$\vec E(\vec r) = \int_V \frac{\rho(\vec r\,')(\vec r - \vec r\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r - \vec r\,'|^3}\,d^3\vec r\,' \qquad ; \ \vec E = \frac{e\,\vec r}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\varphi(\vec r) = \int_V \frac{\rho(\vec r\,')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec r - \vec r\,'|}\,d^3\vec r\,'$$

3.12 Primeri gostote naboja

1.) Točkast naboj

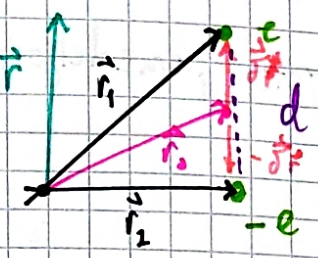
$$\rho(\vec r) = e\,\delta(\vec r - \vec r\,')$$

↑ ↑

Naboj se nahaja na $\vec r\,'$

2) Točkast dipol

$$\rho(\vec r) = e\delta(\vec r - \vec r_1) - e\delta(\vec r - \vec r_2) =$$



$$= e\delta(\vec r - (\vec r_0 + \vec\delta_r)) - e\delta(\vec r - (\vec r_0 - \vec\delta_r)) =$$

Predpostavimo da je majhno

$$f(r+h) = f(r) + h f'(r)$$

$$f(\vec r + \vec h) = f(\vec r) + \vec h \cdot \nabla f(\vec r)$$

$$= -e\,\vec\delta_r \cdot \nabla(\delta(\vec r - \vec r_0))\ e\,\vec\delta_r\ \nabla(\delta(\vec r - \vec r_0)) =$$

$$= -\underbrace{e \cdot 2\vec\delta_r}_{\vec p \ldots \text{ dipolni moment}} \cdot \nabla(\delta(\vec r - \vec r_0)) = (*)$$

$$\nabla \cdot (\vec p\,\delta(\vec r - \vec r_0)) = \underbrace{(\nabla \cdot \vec p)}_{0}\,\delta(\vec r - \vec r_0) + \vec p \cdot \nabla(\delta(\vec r - \vec r_0))$$

$$(*) = -\nabla \cdot (\underbrace{\vec p\,\delta(\vec r - \vec r_0)}_{\vec P})$$

↳ 3D delta enote $1/m^3$

$\vec P$ ... Polarizacija: gostota dipolnega momenta na enoto volumna

Volumska gostota naboja $\rho = \frac{de}{dV}$

$$\boxed{\rho(\vec r) = -\nabla \cdot \vec P}$$

Volumska gostota dipolov $\vec P = \frac{d\vec p}{dV}$

V sistemih el. dipolov sta gostota naboja in polarizacija neposredno povezani.

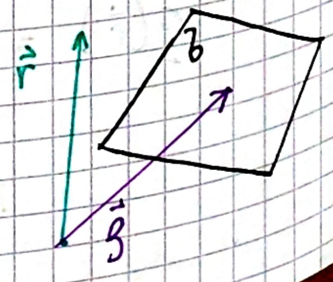
3) Površinsko porazdeljen naboj

Naboj je porazdeljen po tanki plasti - površini. Vpeljemo površinsko gostoto naboja $\sigma(\vec\xi)$:

$$\rho(\vec r) = \sigma(\vec\xi)\,\delta(z - z_0)$$

Teče po površini ↑

↑ kje je plast naboja



4) Volumsko porazdeljen naboj

$$\rho(\vec r) = \begin{cases} \rho_0 \; ; & \text{če } r < a \\ 0 \; ; & \text{sicer} \end{cases} =$$

Enakomerno po volumnu nabita krogla.

$$= \rho_0 H(a-r)$$

↳ Heavisideova/stopničasta funkcija

5) Volumsko porazdeljeni dipoli

$$\vec P(\vec r) = \begin{cases} \vec P_0 \, , & \text{če } r < a \\ 0 \, , & \text{sicer} \end{cases} =$$

Enakomerno po volumnu porazdeljeni dipoli

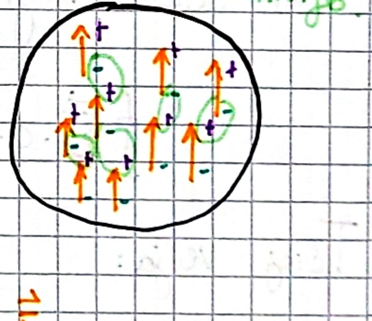
$$= \vec P_0 H(a-r)$$

$$\rho(\vec r) = -\nabla\cdot\vec P = -\nabla\cdot\left(\vec P_0 H(a-r)\right) =$$

$$= -\cancel{(\nabla\cdot\vec P_0)}^{\,0} H(a-r) - \vec P_0\cdot\nabla H(a-r) = -\vec P_0 \frac{\partial}{\partial \vec r}\left(H(a-r)\right) =$$

$$= -\vec P_0\, \delta(a-r)\, \nabla(-r) = \vec P_0 \cdot \frac{\vec r}{r}\, \delta(a-r)$$

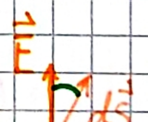
Se izničijo!



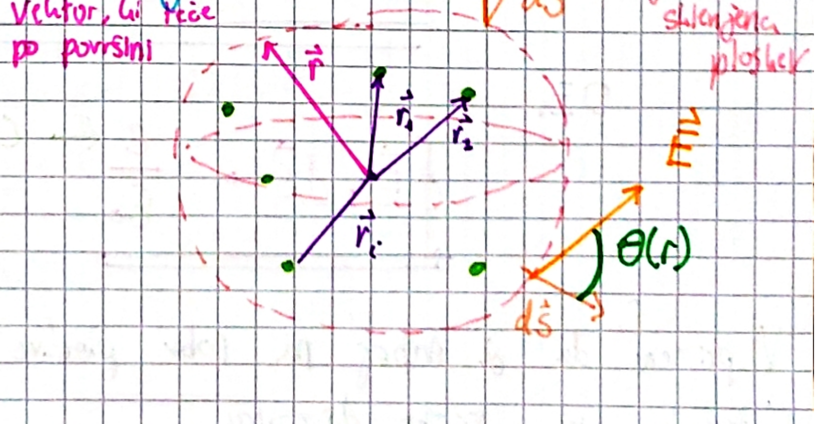
Gostota Naboja je torej $\underline{\underline{\text{samo}}}$ na robu.

"Ne izničijo" se samo naboji na robu krogle.

3.13 Integralna oblika Gaussovega izreka



Obravnavamo (diskretna slika):
- Površina mora biti sklenjena
- Površina naboje zaobjame



Zanima nas električni pretok skozi tako sklenjeno površino, ki zaobjema naboje e_i.

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E\,dS\cos\theta(\vec{r}) = \oint_S \sum_i \frac{e_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^2}\cos\theta_i\,dS$$

Kot med lokalno normalo in poljem $\vec{E}_i$

Razmislimo kaj računamo:

Kot med normalo površine in poljem prvega naboja

$$\oint \vec{E}\,d\vec{S} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\cos\theta_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}dS + \frac{e_2}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\cos\theta_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^2}dS + \dots$$

teče po sferi

kje prvi naboj je

Npr. izberimo $\vec{r}_1 = 0$

1, oba kažeta radialno

Prostorski kot

$$\frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\cos\theta_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}dS = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int\frac{1}{r^2}r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}_{4\pi} = \frac{e_1}{\varepsilon_0}$$

Gauss je tudi za ostale, ki so izven središča, pokazal, da je tako. Tudi ostali integrali so enaki 4π. Torej:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{e_1}{4\pi\varepsilon_0}4\pi + \frac{e_2}{4\pi\varepsilon_0}4\pi + \dots = \frac{\sum_i e_i}{\varepsilon_0}$$

Torej velja:

Gaussov izrek!

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho(\vec{r})\,d^3\vec{r}$$

oz.

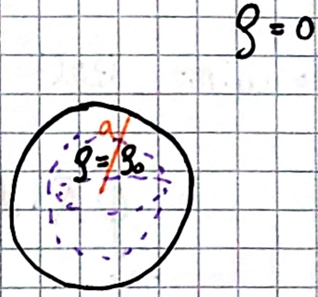
$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{e}{\varepsilon_0}$$

← celoten naboj zaobjet v površini S.

V primeru da je naboj na robu ploskve delimo z 0 in en od teh integralov v vsoti divergira.

Primer uporabe:

El. polje enakomerno nabite krogle (radija a, cel naboj e).



Volumska gostota naboja:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_0 & ; r < a \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

$$\rho_0 = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

1. $r < a$

$$\oint_{\partial V} E\, dS\, \overset{1}{\cancel{\cos\theta}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r})\, d^3 r \quad \rightarrow \quad E \int_{\partial V} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r})\, d^3 r$$

$$\Rightarrow \quad E\, 4\pi r^2 = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4\pi r^3}{3} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 a^3} r$$

2. $r > a$

$$\oint_{\partial V} E\, dS\, \overset{1}{\cancel{\cos\theta}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

$$E \int_{\partial V} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int H(a-r)\, \rho_0\, dr$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{4\pi a^3}{3} \quad \rightarrow \quad E = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

3.14 Diferencialna oblika Gaussovega izreka

Uporabimo izrek Gauss-Ostrogradskega:

$$\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dV$$

Torej:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} \, d^3\vec{r}$$

$$\|$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}) \, d^3\vec{r}$$

To dvoje mora biti enako $\Rightarrow$

Diferencialna oblika Gaussovega izreka

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

3.17 Poissonova in Laplaceova enačba

Poissonova enačba je osnovna enačba elektrostatike, ki določa elektrostatski potencial in sicer ~~sledi~~ sledi iz:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \; ; \; \vec{E} = -\nabla \varphi$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Tako je:

Poissonova enačba

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Če v prostoru ni naboja $\rho(\vec{r}) = 0$:

Laplaceova enačba

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0$$

3.17.1 Greenova funkcija Poissonove enačbe

Metoda Greenove funkcije splošne rešitve, v našem primeru, Poissonove enačbe.

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Rešitve iščemo kot konvolucijo:

$$\phi(\vec{r}) = \int \underbrace{G(\vec{r}-\vec{r}\,')}_{\text{Greenova funkcija}} \overset{\text{gostota naboja}}{\rho(\vec{r}\,')}\, d^3\vec{r}\,'$$

Predpostavimo, da je rešitev take oblike

Kaj je greenova funkcija?

Uporabimo ta nastavek v Poissonovi enačbi:

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = \underset{\text{deluje na } \vec{r} \text{ (in ne na } \vec{r}\,')}{\nabla^2} \left(\int G(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,' \right) =$$

$$= \int \nabla^2 G(\vec{r}-\vec{r}\,')\, \rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,' = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Če naj to velja potem:

$$\nabla^2 G(\vec{r}-\vec{r}\,') = -\frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\varepsilon_0}$$

Za točkast naboj

$$\rho = e\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Torej Greenova funkcija je rešitev Poissonove enačbe za točkast naboj, ki se nahaja v $\vec{r}\,'$ (z razliko konstante e).

• Kakšna je Greenova funkcija?

Gremo v Fourierov prostor:

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\, G(\vec{k})\, d^3\vec{k}$$

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\, d^3\vec{k}$$

(to je integralska definicija Delta funkcije)

Vstavimo v Poissonovo enačbo:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} G(\vec{k})\, d^3\vec{k}\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} d^3\vec{k} = 0$$

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\left[\nabla^2\left(e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} G(\vec{k})\right) + \frac{1}{\varepsilon_0} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\right] = 0$$

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\Big[\underbrace{-k^2 G(k) + \frac{1}{\varepsilon_0}}_{=0}\Big] e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} = 0$$

S Fourierovo transformacijo smo reševanje diferencialne enačbe prevedli na reševanje algebrajske enačbe

Dobimo:

$$G(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon_0 k^2}$$

↳ Greenova funkcija v Fourierovem prostoru

Gremo nazaj v direktni prostor:

$$G(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\frac{1}{\varepsilon_0 k^2}\, d^3\vec{k} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta\, d\theta\, \cancel{k^2}\, dk\, \frac{1}{\varepsilon_0 \cancel{k^2}}\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, dk\, \frac{1}{\varepsilon_0}\, e^{i\vec{k}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\cos\theta} = \ldots =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

Torej splošna rešitev Poissonove enačbe:

$$\phi(\vec{r}) = \int G(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,')\, d^3\vec{r}\,'$$

de

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3\vec{r}\,'$$

Že kompletno poznan rezultat

Ustrezajoče električno polje:

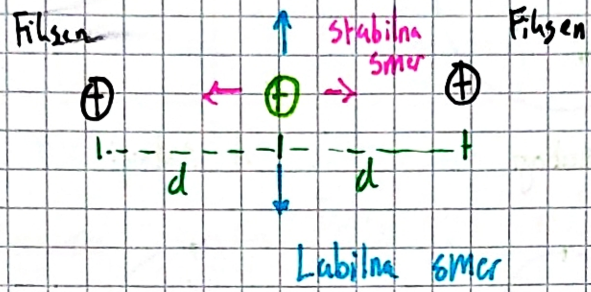
$$E = -\nabla \phi = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{deluje na } \vec r}}{\nabla} \int \frac{\rho(\vec r')\, d^3\vec r'}{4\pi\epsilon_0 |\vec r - \vec r'|} = \int \frac{\rho(\vec r')(\vec r - \vec r')}{4\pi\epsilon_0 |\vec r - \vec r'|^3}\, d^3\vec r'$$

Kot pričakovano

3.19 Earnshawjev teorem (19. stol)

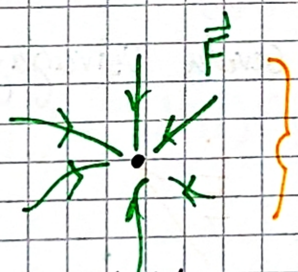
"Nabor točkastih nabojev ne more biti v <u>stabilnem</u> ravnovesju, samo kot posledica elektrostatskih interakcij med naboji."

Primer:



=> Elektrostatski potencial v praznem nima minimumov ali maksimumov, ampak kvečjemu <u>sedla</u>.

Če je točka stabilen minimum morajo vse silnice sikazati



$$\nabla \cdot \vec F \neq 0$$

Ampak v elektrostatiki

$$\nabla \cdot \vec F = \nabla \cdot (-e\nabla\phi) = -e\nabla^2\phi = 0$$

↳ Po Laplaceovi enačbi

Torej točke so kvečjemu sedla.

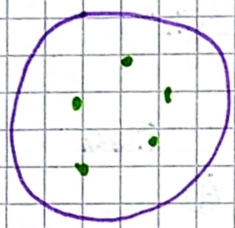
Vprašanje: Zakaj je snov stabilna, če jo veže elektrostatska interakcija?

Obstaja nekaj več... kvantna mehanika (Paulijevo izključitveno načelo)

3.20 Thomsonov problem

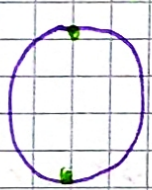
Elektrostatska lahko ima minimume, če naboje ogradiš naprimer na površino.

Npr.: enaki naboji na površini sfere

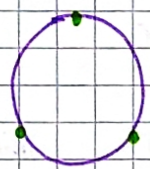


1 naboj: Kjerkoli na sferi

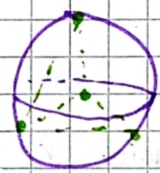
2 naboja



3 naboji



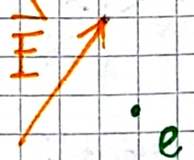
4 naboji:



3.21 Elektrostatska energija

3.21.1 Elektrostatska energija v zunanjem polju

Gledamo naboj v zunanjem polju (ki ga seveda ustvarjajo drugi, ampak ne ta naš konkretni naboj).



Na naboj deluje sila:

$$\vec F = e\vec E$$

Izračunamo energijo, kot potencial, ki je potreben, da ta naboj e "drži" na mestu (isto kot kaj če ga iz neskončnosti pripeljemo sem).

$$dA = -\vec F\cdot d\vec r = -e\vec E\cdot d\vec r = e\nabla\phi\cdot d\vec r$$

delujemo nasproti sili polja

Uporabimo energijski zakon:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{(1)}^{(2)} e \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = e\varphi(2) - e\varphi(1)$$

Torej energija naboja v zunanjem polju (potencialu):

$$\boxed{W = e\varphi}$$

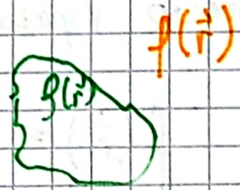
Za zvezno porazdeljen naboj:

$$\boxed{W = \int \rho(\vec{r})\, \varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r}}$$

Energija porazdelitve nabojev (ρ) v zunanjem potencialu (φ), ki ga ne delajo ti naboji (ampak nekaj drugega)

3.21.2 Celotna elektrostatska energija

Sedaj pa nas zanima energija polja vseh nabojev. $\rho(\vec{r})$ ustvari neko okolišk $\varphi(\vec{r})$. Zanima nas energija, ki je potrebna, da to naredimo (ustvarimo oz. nabijemo to gostoto $\rho(\vec{r})$).



$\alpha = 0 \dots 1$ "Gumb za nabijanje"

Izračunajmo spremembo energije, če dodamo $d\rho$ naboja

$$dW = \int_V \underbrace{d\rho(\vec{r})}_{\rho\, d\alpha}\, \overset{\Delta}{\tilde{\hat{\varphi}}}(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

↳ Kakšen je takrat ko dodamo $d\rho$

Predpostavimo, da lahko gostoto vključimo z "gumbom"/parametrom $\alpha \in [0,1]$, ki potem nastavi gostoto naboja med 0 in $\rho(\vec{r})$.

Δ => Uporabimo linearnost Poissonove enačbe

$$\nabla^2 \alpha\varphi = -\frac{\alpha \rho(r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \hat{\varphi} = \alpha \varphi(\vec{r})$$

Torej: $$dW = \int \rho \, d\alpha \, \alpha \, \phi \, d^3\vec{r}$$

To je energija, da dodamo v sistem delček gostote naboja $d\rho$

$$\Rightarrow \quad W = \underbrace{\int_0^1 \alpha \, d\alpha}_{1/2} \int \rho(\vec{r}) \, \phi(\vec{r}) \, d^3\vec{r}$$

ϕ ki ga ustvarja prav ta ρ.

Elektrostatska energija polja

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \, \phi(\vec{r}) \, d^3\vec{r}}$$

To je torej energija polja, ki ga ustvarja ta gostota $\rho(\vec{r})$.

3.21.3 Elektrostatska energija kot funkcional gostote naboja

Uporabimo Greenovo reprezentacijo električnega potenciala:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d^3\vec{r}\,'$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \, \phi(\vec{r}) \, d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d^3\vec{r} \, d^3\vec{r}\,'$$

"vsak z vsakim" (pa $1/2$ uspred ko par)

3.22 Gostota elektrostatske energije polja z $\vec{E}$

Elektrostatsko energijo lahko zapišemo z uporabo el. polja $\vec{E}$.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \, \phi(\vec{r}) \, d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) \, \varepsilon_0 \, \phi(\vec{r}) \, d^3\vec{r} =$$

Velja: $\nabla \cdot (f\vec{g}) = \nabla f \cdot \vec{g} + f \, \nabla \cdot \vec{g}$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V \Big[\nabla \cdot \big(\vec{E}(\vec{r}) \, \phi(\vec{r}) \big) \underbrace{- \nabla \phi}_{\vec{E}} \cdot \vec{E} \Big] \, d^3\vec{r} =$$

Gauss $\rightsquigarrow$ $$= \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{\partial V} \underset{\propto \frac{1}{r^2}}{\vec{E}(\vec{r})}\, \underset{\propto \frac{1}{r}}{\phi(\vec{r})} \cdot d\vec{S}}_{\propto 1/r \ \xrightarrow[r\to\infty]{} \ 0} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int \underset{\propto r^2}{E^2\, d^3\vec{r}}$$

To ne velja v splošno!

Lahko da je važno!

(Kot da rob volumna damo neskončno daleč stran)

Torej energijo (v nekem približku sicer) lahko zapišemo kot:

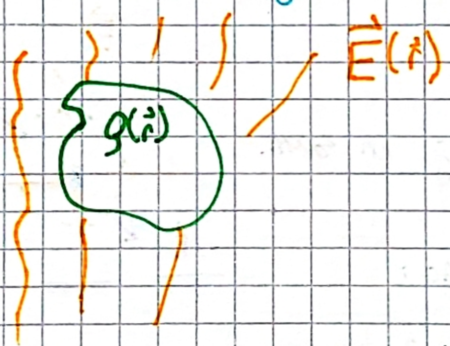
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V \vec{E}^2\, d^3\vec{r}}$$

(Pazi!)

To je energija električnega polja, ki ga ustvarja neka porazdelitev naboja.

3.24 Sila kot funkcional električnega polja

Obravnavamo:



Zanima nas sila, ki deluje na telo, ki se nahaja v el. polju $\vec{E}(\vec{r})$.
To je celotno polje (lastno, ki ga ustvari ρ in zunanje polje brez katerega je sila 0).

Velja:
$$\vec{F} = \int_V \rho(\vec{r})\, \vec{E}(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

$\leftarrow V$ povsod po delu, kjer je $\rho(\vec{r}) \neq 0$.

$\hookrightarrow$ Celotno polje

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \int_V (\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}\, d^3\vec{r} =$$

Velja:
$$\nabla\cdot(\vec{E}\otimes\vec{E}) = \vec{E}\cdot(\nabla\cdot\vec{E}) + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}$$

$$= \varepsilon_0 \int_V \left(\nabla\cdot(\vec{E}\otimes\vec{E}) - (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}\right) d^3\vec{r} =$$

$$= \varepsilon_0 \oint_{\partial V} (\vec{E} \otimes \vec{E})\, d\vec{S} - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \nabla(E^2)\, d^3\vec{r} =$$

Velja: $\frac{1}{2}\nabla(E^2) = (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} + \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$

rotor E v elektrostatiki $= 0$

$$= \varepsilon_0 \oint_{\partial V} (\vec{E} \otimes \vec{E})\, d\vec{S} - \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{\partial V} E^2\, d\vec{S} \;*$$

* Torej je celotna sila

$$\boxed{\vec{F} = \varepsilon_0 \oint_{\partial V} \left[\vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{n}) - \frac{1}{2}E^2\vec{n}\right] dS}$$

$\vec{n}$... normala na površino

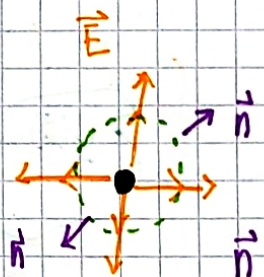
$\vec{E}$ je celotno el. polje!

Integral teče po (zaključeni) površini telesa

V tem se skriva ρ

(integriramo po ∂V kjer je $\rho \neq 0$)

Primer: [En točkast naboj]



Kolikšna je sila? $= 0$ ker je en sam.

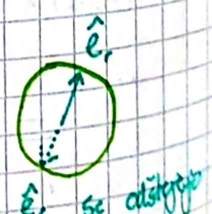
Preverimo, če to tudi res dobimo:

$\vec{n} = \hat{e}_r$

$\vec{E} = E\,\hat{e}_r$

$$\vec{F} = \varepsilon_0 \oiint_{\partial V} \left[\vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{n}) - \frac{1}{2}E^2\vec{n}\right] dS =$$

$$= \varepsilon_0 \oiint_{\partial V} \left[E^2\hat{e}_r - \frac{E^2}{2}\hat{e}_r\right] dS = \frac{1}{2}E^2\varepsilon_0 \oint_{\partial V} \hat{e}_r\, dS =$$



$$= 0 \underset{\text{brez simetrije}}{\overset{\text{ali}}{=}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

Kot mora biti! Lastno polje ne deluje na njega.

3.25 Napetostni tenzor el. polja

Dobljen zapis sile naboja v el. polju se zapiše z uvedbo Napetostnega tenzorja

$$\boxed{\begin{aligned} F_i &= \oint_{\partial V} T_{ik} n_k \, dS \\ T_{ik} &= \varepsilon_0 \left(E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} \right) \end{aligned}}$$

↑ Napetostni tenzor električnega polja

Velja tudi (Gauss - Ostrogradski):

→ divergenca T

⇒ Ustreza gostoti sile

$$F_i = \oint_{\partial V} T_{ik} n_k \, dS = \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \, dV$$

Iz tega zapisa lahko razberemo/uvedemo gostoto sile:

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

Einsteinovo sumacijsko pra

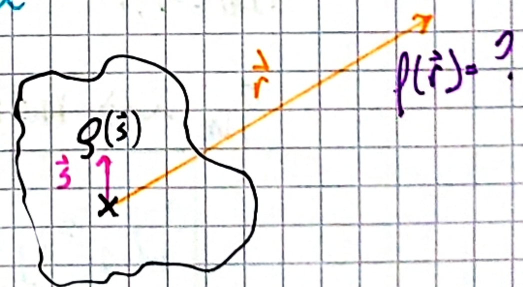
$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$$

Po ponovljenem indeksu se sešteva.

Zapis gostote sile kot divergence napetostnega tenzorja je splošen in se uporablja tudi za druga polja.

3.27 Multipolni razvoj električnega potenciala

Zanima nas električno polje/potencial daleč stran od same gostote naboja in to po vodilnih prispevkih (multipoli).



Velja: $$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|} \, d^3\vec{s}$$

Zanima nas: $|\vec{r}| \gg |\vec{s}|$

↳ To je to kar je "dovolj" daleč

Potem lahko razvijemo:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{s}|} = \frac{1}{|\vec{r}|} \vec{s}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) + \frac{1}{2}\vec{s}^T \underline{\underline{H}}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right)\vec{s} + \ldots =$$

$f(x+h) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot h + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2$

$f(\vec{r}+\vec{h}) = f(\vec{r}) + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\cdot\vec{h} + \frac{1}{2!}\vec{h}^T \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial\vec{r}\,\partial\vec{r}}}_{\underline{\underline{H}}(\vec{r})}\vec{h}$

Hessova matrika

$$= \frac{1}{|\vec{r}|} + \vec{s}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} + \ldots$$

Torej:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int g(\vec{s})\,d^3\vec{s} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\int \vec{s}\,g(\vec{s})\,d^3\vec{s} + \ldots$$

Kjer smo uvedli:

$\int_V g(\vec{s})\,d^3s = e$ (monopol) celotni naboj

$\int_V \vec{s}\,g(\vec{s})\,d^3\vec{s} = \vec{p}$ dipolni moment porazdelitve naboja

$$\Rightarrow \quad f(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \ldots$$

Ko smo daleč stran zgleda kot monopol (točkast naboj) in bližje kot pridemo več multipolov "vidimo."

V splošnem pa velja:

Multipolni razvoj

$$\boxed{f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

kjer so:

$Y_{lm}(\theta,\varphi) \rightsquigarrow$ krogelne funkcije (sferični harmoniki)

$q_{lm} \rightsquigarrow$ multipolni koeficienti

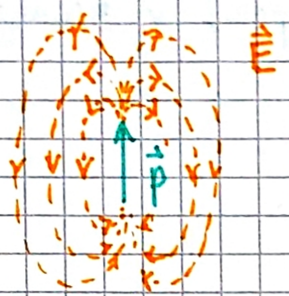
$$\boxed{q_{lm} = \int_V g(\vec{s})\,s^l\,Y_{lm}(\theta',\varphi')\,d^3\vec{s}}$$

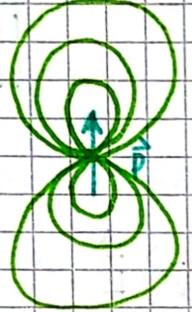
$V \leftarrow$ po celotni porazdelitvi naboja

3.28 Polje in potencial točkastega naboja

Velja: $f(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

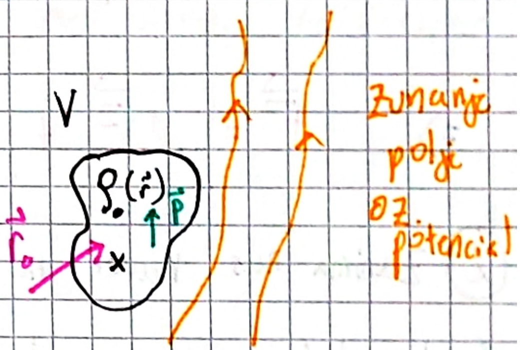
Polje: $\vec{E} = -\nabla f(\vec{r}) = -\nabla\left(\dfrac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\right) = -\dfrac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$





Ekvipotencialne ploskve $f(\vec{r})$.

3.29 Multipolni razvoj elektrostatske energije



Zanimajo nas prispevki k energiji, če lahko $\rho_0(\vec{r})$ opišemo z multipoli.

$$W = \int_V \rho_0(\vec{r})\, f(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

Predpostavimo, da je večina energije zbrana okrog točke $\vec{r}_0$ (blizu tam so multipoli), ki se nahaja znotraj V. Potem:

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + (\vec{r}-\vec{r}_0)\nabla f(\vec{r}_0) + \dots$$

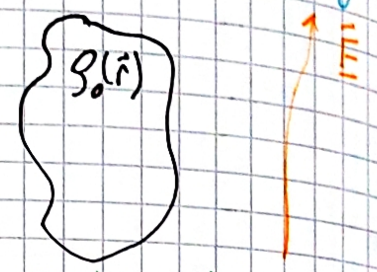
Potem je energija:

$$W = \int_V \rho_0(\vec{r})\, f(\vec{r}_0)\, d^3\vec{r} + \int_V \overbrace{\rho_0(\vec{r})(\vec{r}-\vec{r}_0)}^{\vec{p}}\, \underbrace{\nabla f(\vec{r}_0)}_{-\vec{E}(\vec{r}_0)}\, d^3\vec{r} + \dots =$$

$$= \underbrace{e\,\varphi(\vec r_0)}_{\text{Energija monopola (naboja) v zun polju}} \;\; \underbrace{-\,\vec p\,\vec E(\vec r_0)}_{\text{Energija dipola v zunanjem polju}}$$

3.30 Sila in navor (na multipole) v zunanjem električnem polju

① Zanima nas sila na $\rho_0(\vec r)$



Porazdelitev naboja si predstavimo z multipoli

Velja:

$$\vec F = -\nabla W \iff dW = -\vec F\cdot d\vec r$$

$$\vec F = -\nabla W = -\nabla\left(e\varphi(\vec r_0) - \vec p\cdot\vec E(\vec r_0)\right) =$$

$$= -e\,\nabla\varphi(\vec r_0) + \nabla\left(\vec p\cdot\vec E(\vec r_0)\right) =$$

$$= e\vec E(\vec r_0) + p\times\cancelto{0}{(\nabla\times\vec E)} + (\vec p\cdot\nabla)\vec E$$

$$\Rightarrow \quad \vec F = e\vec E + (\vec p\cdot\nabla)\vec E$$

② Zanima nas navor na $\rho_0(\vec r)$:

Spet gledamo spremembo energije:

$$dW = -\vec M\cdot \underbrace{d\vec\phi}_{\text{smer osi}}$$

Uporabimo $W = e\varphi - \vec p\cdot\vec E$ in diferenciramo:

$$dW = 0 - d\vec p\cdot\vec E = -(d\vec\phi\times\vec p)\cdot\vec E = -d\vec\phi\cdot(\vec p\times\vec E)$$

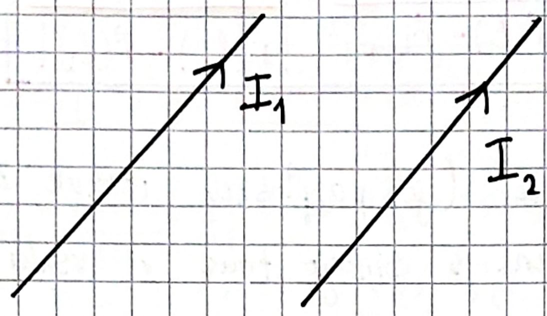
$$d\vec p = d\vec\phi\times\vec p$$

$$\Rightarrow \quad \vec M = \vec p(\vec r_0)\times\vec E(\vec r_0)$$

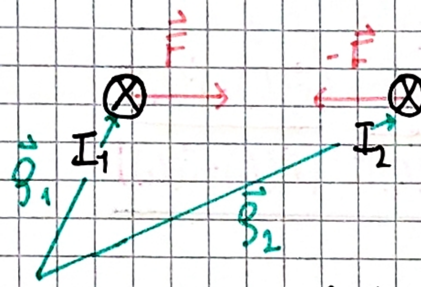
Dipol se torej poskuša zavrteti tako, da bo vzporeden z električnim poljem.

II. Magnetostatika

4.1 Amperova sila med ravnima tokovnima vodnikoma



Preseki:



Med tokovnima vodnikoma deluje sila $\vec{F}$

dolžina žic

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 \cdot L}{|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|}\frac{(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)}{|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|}$$

Sila na prvi vodnik

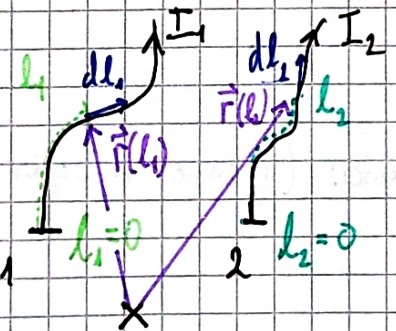
$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

Sila je za istosmerna tokova privlačna, za nasprotno usmerjena tokova pa odbojna. Sila je magnetni analog Coulombove sile med dvema točkastima nabojema.

4.2 Amperova sila med poljubnima vodnikoma

Gledamo dva splošna vodnika

dl... ločni element žice v smeri žice



Vzameš ločna elementa žic, kje pa si na žici merita l_1 in l_2.

Sila na odsek žice:

$$d^2\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1 dl_1}{|\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)|^2}\cdots$$

→ next page

Sila na odseka žice

$$\boxed{d^2\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I_1 d\vec{l}_1)(I_2 d\vec{l}_2)}{|\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)|^2}\frac{(\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1))}{|\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)|}}$$

↳ sila na prvi vodnik

Ta formula je rezultat meritev (je posplošitev formule za ravna vodnika).
Smer $d\vec{l}_1$ in $d\vec{l}_2$ je določena s smerjo toka v vsaki žici.

Celotna sila (na 1. žico):

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\int \frac{d\vec{l}_1\, d\vec{l}_2}{|\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)|^2}\frac{(\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1))}{|\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)|}$$

Zveza se lahko prepiše v:

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\int_{1}\int_{2}\frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)))}{|\vec{r}(l_2)-\vec{r}(l_1)|^3}}$$

4.3 in 4.4 Električni tok in velikost

Električni tok je gibanje nabitih delcev po vodniku. Je skalarna količina:

$$I = \frac{de}{dt}$$

V magnetostatiki je tok konstanten (gibanje nabojev je v stacionarnem stanju).

Nekaj velikosti I

tok skozi kanalček v celični membrani	1 - 10 pA
tok živčnega impulza	1 μA
gospodinjski tok	1A
tok skozi superprevodne magnete	12000 A
tok pri blisku	$1 - 20 \cdot 10^4$ A
tok v Zemljinem jedru	10^9 A

4.5 Gostota magnetnega polja

Podobno kot v elektrostatiki, lahko delovanje sile med vodniki opišemo z uvedbo magnetnega polja. In sicer:

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)))}{|\vec{r}(l_2) - \vec{r}(l_1)|^3}$$

V magnetostatiki so tokovne zanke vedno sklenjene.

$$\vec{F} = \int_{C_1} I_1 d\vec{l}_1 \times \underbrace{\left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\int_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}(l_1) - \vec{r}_2(l_2))}{|\vec{r}(l_1) - \vec{r}(l_2)|^3}\right)}_{\text{To uvedemo kot magnetno polje}}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}(l_1)) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\int_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (\vec{r}(l_1) - \vec{r}(l_2))}{|\vec{r}(l_1) - \vec{r}(l_2)|^3}}$$

Biot-Savartov zakon

S tako uvedenimi $\vec{B}$ se sila prepiše v:

$$\vec{F} = \int I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

4.6 Velikost gostot mag. polja

Nekaj velikosti B:

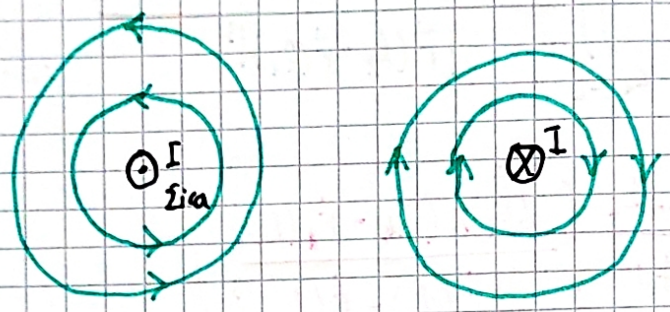
Možganska aktivnost	1 fT
Medgalaktična mag. polja	1-10 pT
Srčna aktivnost	100 pT
Zemeljsko mag. polje	20-70 μT
Železni magneti	100 mT
Sončne pege	1 T
Pospeševalniki	10 T
Nevtronske zvezde	10^6 - 10^{11} T
Atomska jedra	1 TT

4.7 Magnetne silnice

Uvedemo jih kot

$$\vec{r}'(l) = \frac{\vec{B}(\vec{r}(l))}{|\vec{B}(\vec{r}(l))|}$$

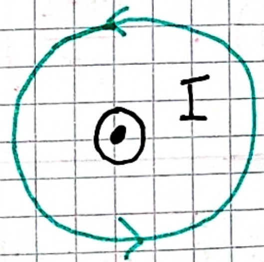
Značilni profili:



Silnice magnetnega polja so vedno sklenjene.

4.8 Magnetna cirkulacija

Uvedemo jo kot integral po zanki C



$$\Gamma_m = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

$$\Gamma_m = B(\vec{r}) \cdot 2\pi r$$

(Spomni se v elektrostatiki pa je $\Gamma_e = 0$).

$$0 \neq \int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_S \nabla \times \vec{B}\, d\vec{S}$$

Za magnetno polje ne moremo trditi, da je brezvrtinčno.

4.9 Magnetni pretok

Uvedemo ga kot:

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

po poljubni ploskvi.

Velja pa:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \; !$$

Magnetni pretok skozi vsako zaključeno ploskev je enak 0.
(ni magnetnih monopolov / izvorov, silnice so vedno sklenjene).

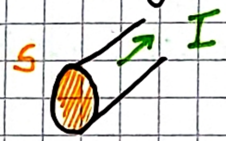
V diferencialni obliki:

$$0 = \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int \nabla\cdot\vec{B}\, dV$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

4.10 Gostota električnega toka

Električni tok, ki je vezan na žice, posplošimo na gostoto električnega toka. In sicer:

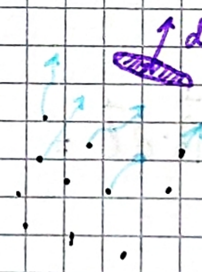


$$I = \int \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

Opazi $\vec{j}$ nosi informacijo tako o velikosti kot tudi smeri gibanja nosilcev nabojaj ni omejen na žice.

4.11 Primeri gostot toka

- Zvezna porazdelitev naboja



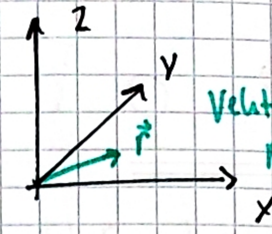
$$\vec{j}\cdot d\vec{S} = dI = d\left(\frac{de}{dt}\right) = d\left(\frac{\rho\, dV}{dt}\right) =$$

$$= \frac{\rho\, dS \cdot v_n\, dt}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{j}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\,\vec{v}$$ "mikroskopska slika $\vec{j}$"

• Linearen vodnik (v izhodišče)

$$\vec{j} = I\,\delta^2(\vec{r})\,\hat{e}_z$$



Vektor položaja v xy ravnini.

• Premikajoči točkast naboj

$$\vec{j} = e\,\delta^3(\underbrace{\vec{r}-\vec{r}(t)}_{\text{Kje je naboj}})\,\vec{v}$$

hitrost naboja

• Površinska gostota toka

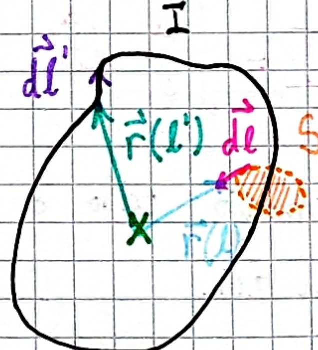
$[j] = \frac{A}{m^2}$

$$\vec{j} = \underbrace{\sigma}_{\text{površinska gostota naboja}}\,\delta(\underbrace{z-z_0}_{\text{Kje je površina}})\,\vec{v} \;;\quad \vec{j}_s = \sigma\vec{v}$$

$[j_s] = \frac{A}{m}$

4.13 Amperov izrek

Zanima nas obnašanje $\vec{B}$ oz. $\nabla\times\vec{B}$ vzdolž/po zanki $\underline{\underline{C}}$ (ne C').

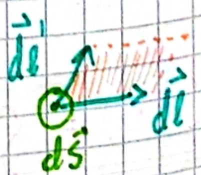


Uporabimo:

$$\Gamma_M = \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} =$$

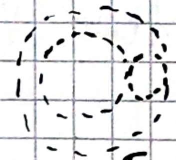
cirkulacija

$$= \underbrace{\oint_C \left[-\frac{\mu I}{4\pi}\oint_{C'} d\vec{l}' \times \nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}(l)-\vec{r}(l')|}\right)\right]\cdot d\vec{l}}_{\text{Mešani produkt}} =$$



$$= \oint_C\oint_{C'} -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\underbrace{(d\vec{l}\times d\vec{l}')}_{d\vec{S}}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}(l)-\vec{r}(l')|}\right) =$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \underbrace{d\vec{S} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|} \right)}_{-\frac{dS \cdot \cos\theta}{|\vec{r}(l)-\vec{r}(l')|} = -d\Omega} =$$



Torusna plosker okoli zanke?

Diferencial Prostorskega kota

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot 4\pi = \mu_0 I$$

Torej:

$$\boxed{\Gamma_\mu = \mu_0 I}$$

Amperov izrek

Cirkulacija mag. polja po navidezni zanki, ki zaobjema tokovno zanko, po kateri teče tok I, je enaka $\mu_0 I$.

Prepišemo:

$$\Gamma_\mu = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{B}\, d\vec{S}$$

$$\parallel$$

$$\mu_0 I = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Sledi:

$$\boxed{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Amperov zakon !

4.14 Magnetni (vektorski) potencial

Ker magnetno polje je vrtinčno ga ne moremo opisati s skalarnim potencialom.

$$\nabla \times \vec{B} \neq 0$$

El. polje:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\nabla f$$

Rotor grad bo vedno 0

Vemo pa, da so silnice $\vec{B}$ sklenjene:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Vemo pa, da je $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

Zato uvedemo vektorski magnetni potencial $\vec{A}$ kot:

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

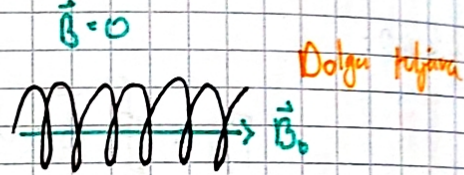
Magnetni pretok se zapiše kot:

$$\Phi_m = \int_{S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Poljubna ploskev

Magnetni pretok skozi ploskev je enak cirkulaciji magnetnega potenciala po robu te ploskve.

4.15 Vektorski magnetni potencial tuljave



Dolga tuljava:
- znotraj $\vec{B} = \vec{B}_0$
- zunaj $\vec{B} = 0$

Znotraj tuljave:

$$\vec{B}_0 = (0, 0, B_0)$$

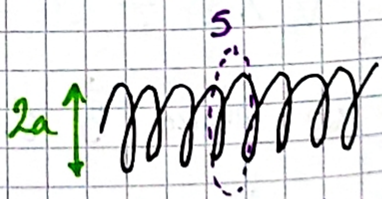
$\vec{A}$ mora biti oblike $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \times \vec{r}$, da je $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.

Tak je $\vec{A}$ znotraj tuljave

Zunaj tuljave:

Pričakoval bi, da ker je $\vec{B} = 0$, posledično $\vec{A}$ enak 0 ali neka konstanta.

Gledamo zanko ob zunanjem robu tuljave (je malo večja):



Navidezna zanka, malo večja od tuljave.

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_0 \pi a^2$$

$$= \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

$\vec{A}$ **ni** 0 oz. konst.

Poskusimo uganiti obliko $\vec{A}$ (tako da bo zvezen na robu):

$$\vec{A} = C\,\vec{B}_0 \times \frac{\vec{r}}{r^2} \quad ; \quad \nabla \times \vec{A} = 0$$

Uporabimo od prej

Izračunamo:

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint c\left(\vec{B}_0 \times \frac{\vec{r}}{r^2}\right) \cdot d\vec{r} = \dots = 2\pi C B_0 = B_0 \pi a^2$$

$$\Rightarrow C = \frac{a^2}{2}$$

Torej vektorski magnetni potencial zunaj tuljave:

$$\vec{A} = \frac{a^2}{2} \vec{B}_0 \times \frac{\vec{r}}{r^2}$$

Dobimo močno prostorsko odvisno polje čeprav je $\vec{B} = 0$ zunaj.

Na meji (robu tuljave) je $\vec{A}$ zvezen

Umeritev

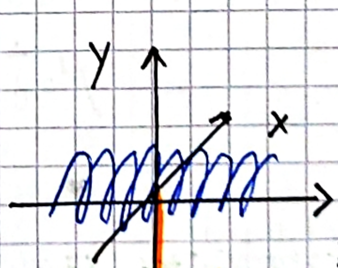
Uvedemo lahko nov magnetni potencial

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \varphi(\vec{r}) \quad ; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A}$$

Oba potenciala $\vec{A}$ in $\vec{A}'$ ustrezata isti gostoti magnetnega polja $\vec{B}$ (ker je $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$).

Konkretno za dolgo tuljavo lahko dodamo:

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{B_0 a^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$



Potem zunaj tuljave:

$$\vec{A} = \frac{a^2}{2} \vec{B}_0 \times \frac{\vec{r}}{r^2} - \nabla\left(\frac{B_0 a^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{B_0 a^2}{2} \frac{2\pi}{a} \delta(\phi - \pi)\, \hat{e}_\phi$$

$\vec{A} \neq 0$

Edino vzdolž os $-y$ je $\vec{A} \neq 0$, drugje zunaj $\vec{A} = 0$.

Z uvedbo umeritvenih funkcij torej lahko spreminjaš/prestavljaš $\vec{A}$ ne da bi spremenil $\vec{B}$.

4.17 Magnetna sila

Magnetna sila na vodnik se zapiše kot:

$$\vec{F} = \int I \, d\vec{l} \times \vec{B}$$

Za splošno gostoto toka pa $(I d\vec{l} = \vec{j} \, d^3\vec{r})$.

$$\boxed{\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B} \, d^3\vec{r} \quad \text{kjer } \vec{j} \neq 0}$$

Sila na poljubno gostoto toka

Primer: Sila na gibajoči točkast naboj

$$\vec{j} = e\,\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t))\vec{v}$$

$$\vec{F} = \int_V e\,\delta^3(\vec{r} - \vec{r}(t))\vec{v} \times \vec{B} \, d^3\vec{r} =$$

$$= e\,\vec{v} \times \vec{B}$$

4.19 Kirchoffova enačba

Zanima nas čemu zadošča vektorski magnetni potencial. Uporabimo Amperov zakon:

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Uporabimo Helmholtzov izrek, ki pravi, da vsako vektorsko polje lahko zapišeš kot:

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

kjer je $\nabla \cdot A_1 = 0$ in $\nabla \times \vec{A}_2 = 0$. Vsako vektorsko polje lahko razstaviš na del, ki je brezvrtinčen in del, ki je brez izvirov.