Lahko uporabimo umeritev $\vec{A}_2 = 0$, ker je rotor njega 0 in bi lahko vzeli karkoli.

Zato je:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\vec{A}_1 + \vec{A}_2) = \nabla \cdot \vec{A}_1 = 0$$

Sledi:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$$

Kirchoffova enačba
(je osnovna enačba za izračun $\vec{A}$)

Enačba je "podobna Poissonovi enačbi. Sklepamo o rešitvi enačbe:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'}$$

teče povsod kjer je $\vec{j} \neq 0$

Splošna rešitev za Kirchoffovo enačbo

Od tod sledi (je usklajeno) Biot-Savartov zakon:

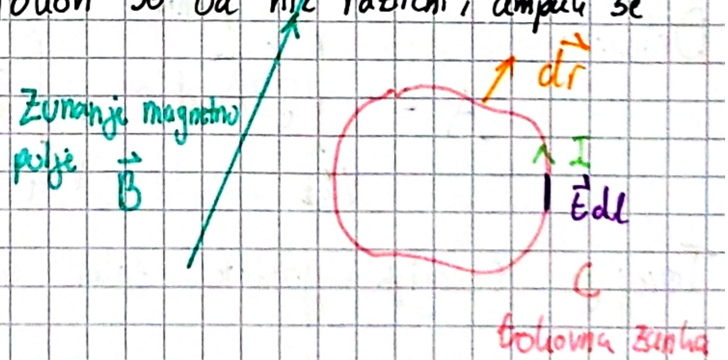
$$\vec{B} = \underbrace{\nabla \times \vec{A}}_{\text{Deluje na } \vec{r}} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(r') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3\vec{r}\,'$$

Ena oblika Biot-Savartovega zakona

4.21 Magnetna energija

4.21.1 Magnetna energija v zunanjem polju

Vpeljemo jo v stacionarni aproksimaciji ⇒ Tokovi so od nič različni, ampak se s časom ne spreminjajo.



Sila na zanko:

lokalna smer zanke

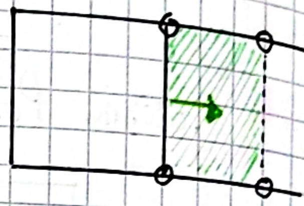
$$\vec{F} = I \oint_C d\vec{l} \times \vec{B} = I \oint (\vec{t} \times \vec{B})\, dl$$

Če zanko premaknemo za $d\vec{r}$, opravimo delo:

$$dA = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow dA = -I \oint_C \underbrace{(\vec{t} \times \vec{B})\, dl \cdot d\vec{r}}_{\text{mešani prod.}} = -I \oint (d\vec{r} \times \vec{t}) \cdot \vec{B}\, dl = -I \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S}$ površina, ki jo zanka opiše ob premiku



(S)

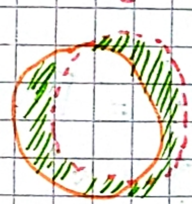
Torej:

$$A = -I \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -I \Phi_m$$

Energija z uporabo vektorskega mag. potenciala $\vec{A}$

$$A = -I \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = -I \int_{(S)} \underbrace{(\nabla \times \vec{A})}_{\text{Stokesov izrek}} \cdot d\vec{S} =$$

C_2 C_1



Cilindrično

$$= -I \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} + I \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} =$$

Uporabimo: $I\, d\vec{r} = \vec{j}\, d^3\vec{r}$ (Posplošitev na gostoto toka)

Dobimo:

gostota toka po premiku; gostota toka pred premikom

$$A = -\int_{V_2} \vec{j} \cdot \vec{A}\, d^3 r + \int_{V_1} \vec{j} \cdot \vec{A}\, d^3\vec{r} \quad ; \quad A = \Delta W_k + \Delta W_p + \dots$$

Torej je energija gostote toka v zunanjem polju:

$$\boxed{W = -\int_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{A}\, d^3\vec{r}}$$

Volumen kjer je $\vec{j} \neq 0$

Gostota energije pa je:

$$w = -\vec{j} \cdot \vec{A}$$

4.21.2 Magnetna energija polja kot funkcional tok

Iz Kirchoffove enačbe imamo: $\vec{j}'$ ustvarja $\vec{A}$ (in je drugi kot $\vec{j}$)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}'(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'$$

Tako dobimo energijo tokov $\vec{j}$ v polju, ki ga ustvarjajo tokovi $\vec{j}'$ kot:

$$W = \int_{V'} \int_{V} \frac{\vec{j}(\vec{r})\vec{j}'(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,' \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}$$

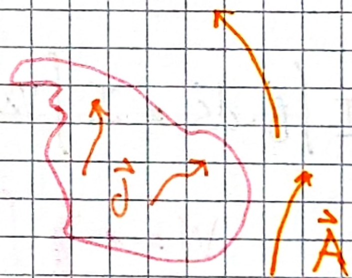
4.21.3 Celotna magnetna energija

Zanima nas celotna magnetna energija polja $\vec{A}$, ki ga ustvarja gostota tokov $\vec{j}$.

Uporabimo analogijo z elektrostatiko:

Uvedemo nek parameter α, ki "postopoma vključi" tok $\vec{j}: 0 \to \vec{j}$;

kar ustreza $\alpha: 0 \to 1$.



$\vec{j}$ ustvari $\vec{A}$

Smo pri nekem α (ki mu ustreza potencial $\hat{A}$) in mu dodamo nekaj toka $d\vec{j}$.

$$d\vec{j} = \vec{j}\, d\alpha$$

Potem:

$$dW = -\int_{(V)} d\vec{j} \cdot \hat{\vec{A}}\, d^3\vec{r} = -\int_{(V)} \vec{j} \cdot d\alpha \cdot \alpha\vec{A}$$

Uporabimo linearnost Kirchoffove en.

$\nabla^2 \frac{A}{3} = \mu_0 \vec{j} \frac{1}{3}$; za $\alpha = 1/3$ $\frac{A}{3} = \hat{A}$ $\nabla^2(\alpha \vec{A}) = -\mu_0 \alpha \vec{j}$

$$W = -\int_0^1 \alpha\, d\alpha \int \vec{j} \cdot \vec{A} \cdot d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = -\frac{1}{2}\int \vec{j}\cdot\vec{A}\, d^3\vec{r}} \quad (\ast)$$

Vendar:

Prejšnji izraz ne upošteva, da je za vzpostaviter toka potrebna energija (drugače kot v elektrostatiki, kjer je naboj stalen).

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\, d\vec{s}$

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

Torej za vzpostavitev toka je potrebna energija:

Malo preskočimo 'statiko'

$$P = -UI = -I \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} =$$

C Zanka po kateri teče tok

$$= I \frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad W = I\int \vec{B}\cdot d\vec{s} = I\int \nabla\times\vec{A}\, d\vec{s} = \overbrace{I\oint \vec{A}\, d\vec{r}}^{\vec{j}\, d^3\vec{r}} = \int \vec{j}\cdot\vec{A}\, d^3\vec{r}$$

$$W = \int \vec{j}\cdot\vec{A}\, d^3\vec{r} \quad (\nabla)$$

Celotnega energija polja je torej:

$$\boxed{W = (\ast) + (\nabla) = \frac{1}{2}\int_V \vec{j}\cdot\vec{A}\, d^3\vec{r}}$$

To je energija celotnega polja $\vec{A}$, ki ga ustvarja gostota toka $\vec{j}$ (upoštevamo tudi, da je bilo potrebno ta $\vec{j}$ vzpostaviti).

4.22 Gostota magnetne energije

Celotno energijo želimo prepisati v odvisnost od $\vec{B}$ (in ne $\vec{A}$).

Velja:
$$\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{A}) = (\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{A} - (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{j}\cdot\vec{A}\, d^3\vec{r} = \frac{1}{2\mu_0}\int_V (\nabla\times\vec{B})\vec{A}\, d^3\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2\, d^3\vec{r} + \frac{1}{2\mu_0}\int_V \nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{A})\, d^3\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2\, d^3\vec{r} + \cancel{\frac{1}{2\mu_0}\oint_{\partial V} (\underbrace{\vec{B}}_{\propto \frac{1}{r}}\times\underbrace{\vec{A}}_{\propto \frac{1}{r^2}})\, d\vec{S}}^{\,0}\qquad d\vec{S} \propto r^2$$

(če $r \to \infty$; torej je volumen V velik)

↑ Ni vedno nujno da to lahko naredimo sicer!

Torej magnetna energija:

$$\boxed{W = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2\, d^3\vec{r}}$$

in gostota energije:

$$\boxed{w = \frac{1}{2\mu_0} B^2}$$

4.24 Sila kot funkcional magnetnega polja

Zanima nas kakšna sila deluje na delec z gostoto toka $\vec{j}$, ki se nahaja v magnetnem polju.

Celoten $\vec{B}$

Velja: $\vec{F} = \int \vec{j}\times\vec{B}\, d^3\vec{r}$ → Hočemo zapisati kot integral po površini delca; pri čemer naj poznamo samo $\vec{B}$.

$$\vec{F} = \int_{V} \vec{j}\times\vec{B}\, d^3\vec{r} = \frac{1}{\mu_0}\int_V (\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}\, d^3\vec{r}$$

V po volumnu delca, kjer je $\vec{j} \neq 0$

Uporabimo: $\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B}) = \frac{1}{2}\nabla B^2 - \nabla\cdot(\vec{B}\otimes\vec{B}) + \vec{B}\,(\underbrace{\nabla\cdot\vec{B}}_{\to 0})$

V primeru mag. polja

$$= \frac{1}{\mu_0}\int_V \left[\nabla\cdot(\vec{B}\otimes\vec{B}) - \frac{1}{2}\nabla B^2\right] d^3\vec{r}$$

Skalar: $\int_V \nabla B^2\, d^3\vec{r} = \int_{\partial V} B^2\, \underline{\underline{I}}\, d\vec{S}$

Tenzor: $\int_V \nabla\cdot(\vec{B}\otimes\vec{B})\, d^3\vec{r} = \int_{\partial V} \vec{B}\otimes\vec{B}\, d\vec{S}$

Sedaj pa lahko uporabimo Gaussov izrek

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{\mu_0}\oint_{\partial V} \left(\vec{B}\otimes\vec{B} - \frac{1}{2}B^2\underline{\underline{I}}\right) d\vec{S}}$$

Integral poteka po površini "delca" na katerega računamo silo.
Tu imamo celoten $\vec{B}$, ki je vsota zunanjega polja in polja, ki ga ustvarja $\vec{j}$.

4.25 Tenzor napetosti magnetnega polja

Uvedemo tenzor napetosti mag. polja kot:

normala

$$F_i = \int_{\partial V} T_{ik}\, n_k\, dS$$

kjer je

$$\boxed{T_{ik} = \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_k - \frac{1}{2}B^2\delta_{ik}\right)}$$

Zapišemo lahko tudi:

Volumska gostota sile

$$F_i = \int_{\partial V} T_{ik}\, n_k\, dS = \int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\, dV$$

4.27 Multipolni razvoj magnetnega polja

Zanima nas magnetni potencial $\vec{A}$ daleč stran od njegovega izvira.

Velja:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'$$

Razvijemo za $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} - (\vec{r}\,' \cdot \nabla)\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\,' \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Magnetni potencial se torej do drugega (dipolnega) reda zapiše kot:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r} \int \vec{j}(\vec{r}\,') d^3\vec{r}\,'}_{\text{monopol}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int \vec{j}(\vec{r}\,')(\vec{r}\,' \cdot \vec{r}) d^3\vec{r}\,'}_{\text{dipol}} + \ldots$$

Opazi:

V primerjavi z elektrostatiko; monopolni člen je vektor

dipolni člen je tudi višjega reda (tenzor)

4.27.1 Monopolni člen

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}\,') d^3\vec{r}\,' = 0$$; tokovnice so sklenjene

4.27.2 Dipolni člen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int \vec{j}(\vec{r})(\vec{r}\,' \cdot \vec{r}) d^3\vec{r}\,'$$

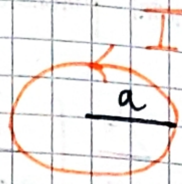
$\Downarrow$ V knjigi

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \text{ kjer je } \underline{\underline{\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r}\,' \times \vec{j}\, d^3\vec{r}\,'}}$$

Magnetni dipolni moment

4.29 Amperova ekvivalenca

Izračunaj magnetni dipolni moment krožne zanke.



$\vec m = ?$

$$\vec m = \frac{1}{2} \int_V \underbrace{\vec r\,'}_{a\hat e_r} \times \underbrace{\vec j(\vec r\,') d^3 \vec r\,'}_{I(\hat e_\varphi) dl} =$$

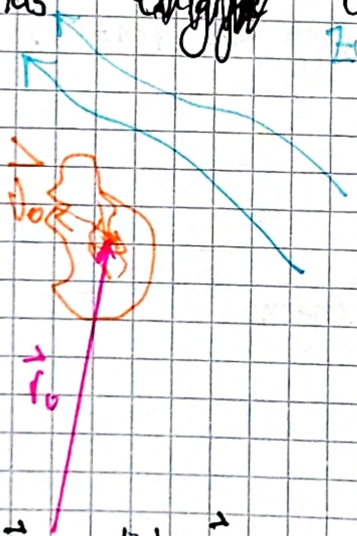
$$= \frac{1}{2} a I \int \hat e_r \times \hat e_\varphi \, dl = \frac{1}{2} \hat e_z a I \int dl = \pi a^2 I \hat e_z$$

Amperova ekvivalenca:

Tokovna zanka v magnetnem polju je ekvivalentna magnetnemu dipolu v zunanjem mag. polju.

4.30 Multipolni razvoj magnetne energije

Zanima nas ~~energijo~~ energija gostote toka v zunanjem mag polju.



Zunanji magnetni potencial

$\vec A$

$$W = -\int_V \vec j_0(\vec r) \vec A(\vec r) \, d^3 \vec r$$

Razvijemo $\vec A$ okoli $\vec r_0$:

$$\vec A(\vec r) = \vec A(\vec r_0) + (\vec r - \vec r_0) \nabla_0 A_0(\vec r_0) + \dots$$

$$W = -\int \vec{j}_0(\vec{r})\vec{A}(\vec{r}_0)\, d^3\vec{r} - \int_V \vec{j}_0(\vec{r})\left[(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\nabla_0\right]\vec{A}(\vec{r}_0)\, d^3\vec{r} =$$

$$= \underbrace{-\vec{A}(\vec{r}_0)\int j_0(\vec{r})\, d^3\vec{r}}_{\text{Monopolni člen je } 0} - \underbrace{\int \vec{j}_0(\vec{r})\left[(\vec{r}-\vec{r}_0)\right.}_{\text{Glej naprej}}\underbrace{\left.\nabla_0\right]\vec{A}(\vec{r}_0)}_{\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_0)}{\partial \vec{r}_{0,i}}}\, d^3\vec{r} =$$

(indeksi nad členi: j, i, i, j)

=

Temu se reče simetrizaciji tenzorja

Glej naprej △

$$\to \int \vec{j}_0(\vec{r})_j\,(\vec{r}-\vec{r}_0)\, d^3\vec{r} = -\int \vec{j}_0(\vec{r})_i \cdot (\vec{r}-\vec{r}_0)_j\, d^3\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}\int \left(j_0(\vec{r})\right)_j (r-r_0)_i - \vec{j}_0(\vec{r})\cdot(\nabla - \vec{r}_0)_j\, d^3\vec{r}$$

Potem:

$$W = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}_0)_j}{\partial \vec{r}_{0i}}\int \frac{1}{2}\, j_0(\vec{r}-\vec{r}_0)_i - j_0(\vec{r}_i)(\nabla - \nabla_0)\, d^3r =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left[\left[\vec{j}_0\left((\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{\nabla}_0\right)\right)\vec{A}(\vec{r}_0) - (\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{j}_A\, j_0(r)) + (\vec{j}_0\nabla_0)\vec{A}(\vec{r}_0) =$$

Uporabimo:

$$(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$= -\frac{1}{2}\int\left[(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{j}_0(r)\right]\cdot\left[\nabla_0\times\vec{A}(\vec{r}_0)\right] d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad W = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

Energija mag. dipola v zunanjem polju.

4.31 Sila in navor v zunanjem polju (dipolu)

Sila:

Velja: $\vec{F} = -\nabla W \iff dW = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$

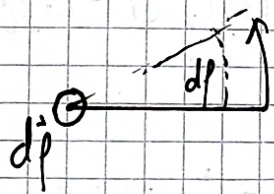
$$-\nabla(\vec{m}\cdot\vec{B}) = \vec{m}\times(\underbrace{\nabla\times\vec{B}}_{\mu_0\vec{j}=0}) + (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$$

Tok ki ustvarja zunanje polje

$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{m}\cdot\nabla)\vec{B}$$

Navor:

Velja: $dW = -\vec{M}\cdot d\vec{\varphi}$



Zavrtimo dipol: $d\vec{m} = d\vec{\varphi}\times\vec{m}$

$$dW = -d(\vec{m}\cdot\vec{B}) = -d\vec{m}\cdot\vec{B} = -(d\vec{\varphi}\times\vec{m})\cdot\vec{B}$$

$$= -(\vec{m}\times\vec{B})\,d\vec{\varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$$

Simetrizacija tenzorja $\triangle$

Sledi iz izreka Gauss-Ostrogradskega. Velja (272, p31):

tenzor pretvoriš v tenzor, ki ima "preprostejšo" strukturo

Klasična formulacija:

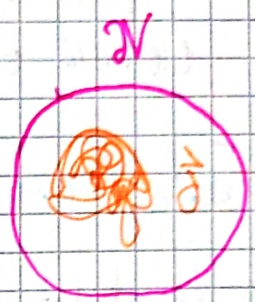
$$\oint_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV$$

Uporabimo izrek G-O za tenzor 3. ranga $\vec{r} \otimes \vec{r} \otimes \vec{A}$

normala

$$\oint_{\partial V} r_i r_j A_k n_k \, dS = \int_V \left(r_i A_j + r_j A_i + r_i r_j (\nabla \cdot \vec{A})\right) d^3\vec{r}$$

Če uporabimo ta izrek v kontekstu gostote toka $\vec{A} = \vec{j}$.



$$\underbrace{\oint_{\partial V} r_i r_j j_k n_k \, dS}_{\substack{\text{na robu } \partial V \\ \vec{j} = 0 \Rightarrow \text{cel člen enak } 0}} = \int_V \Big[r_i j_j + r_j j_i + r_i r_j \underbrace{(\nabla \cdot \vec{j})}_{0}\Big] d^3\vec{r}$$

Sledi:

$$\int_V r_i j_j \, d^3\vec{r} = -\int_V r_j j_i \, d^3\vec{r}$$

in lahko napišemo

$$\int_V r_i j_j \, d^3\vec{r} = \frac{1}{2} \int \left[r_i j_j - r_j j_i\right] d^3\vec{r}$$

III. Kvazistatična Polja

Obravnaramo indukcijo (Henry, Faraday)

Lenzevo pravilo

"Sprememba magnetnega pretoka skozi tokokrog (zanka) požene električni tok, ki se upiru vzroku svojega nastanka.

5.1 Maxwellova formulacija elektromagnetne indukcije

Kvantitativni zakon (Faradayev) indukcije pravi:

$$\Gamma_e = \boxed{-\frac{d}{dt}\phi}$$

Časovna sprememba magnetnega pretoka

Električna cirkulacija

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

Zanka C je rob ploskve S

Prepišemo:

$$\int \nabla\times\vec{E}\, d\vec{S} = -\int \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}$$

Zanka se ne spremeni v času

Dobimo:

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Kinematična maxwellova enačba (opazi, da ne vsebuje konstant parameter)

5.1.1 Maxwellov impulz magnetnega polja

Velja:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \; ; \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

Velja:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Velja splošno

~~Poissono~~

Povezava z 2. Newtonovim zakonom

gibalna količina

$$\vec{F} = e\vec{E} = e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial (e\vec{A})}{\partial t} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Zveza $e\vec{A}$ torej predstavlja gibalno količino in indukcija je impulz te gibalne količine, ki jo vnesemo v sistem.

5.2 Popravljen (kvazistatičen) sistem Maxwellovih enačb

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \; (+\ldots)$$

in

Kvazistatična EM polja

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Tokovne zanke so sklenjene

5.2.1 Elektromagnetna potenciala za kvazistatična polja

Zanima nas, kako zapisati $\vec{E}$ in $\vec{B}$ z osnovnim potencialoma φ in $\vec{A}$.

① Velja: $\nabla\cdot\vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

② Velja: $\underbrace{\nabla\times\vec{E}} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \underbrace{-\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

$$\nabla\times\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Če nam to velja: $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

V kvazistatičnem sistemu je el. polje podan z električnim in magnetnim vektorskim potencialom.

5.3 Prevodniki in Ohmov zakon

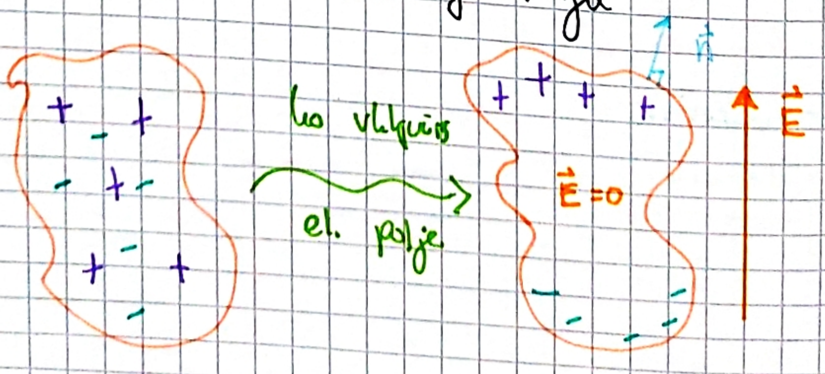
Snovi, v katerih so nosilci naboja prosto gibljivi, imenujemo prevodniki. Nosilci naboja so lahko elektroni, ioni, vrzeli.

Za prevodnike velja Ohmov zakon:

$$\vec{j} = \sigma_E \vec{E}$$

Električna (ohmska) prevodnost

V ravnovesju v prevodniku torej velja:



$\vec{j} = 0$

$\vec{E} = 0$

Predpostavljamo, da je v prevodniku vedno dovolj (+-) parov, ki z ločitvijo lahko kompenzirajo zunanje el. polje.

Torej - kje je naboj:

Znotraj $\vec{E} = 0$ -> $\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ -> $\rho = 0$ znotraj

Gibljivi naboj je na površini prevodnika.

Na površini velja:

Površinski naboj

$$\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Inducirana površinska gostota naboja zasenči zunanje el. polje. Električno polje je v ravnovesju vedno pravokotno na površino prevodnika ($\vec{n} \times \vec{E} = 0$).
Če ne bi to bilo, bi tekel električni tok (in nismo v ravnovesju).
=> Torej površina prevodnika je ekvipotencialna ploskev

5.3.1 Časovna konstanta prevodnika

Ko vključimo el. polje, se v prevodniku prerazporedi naboj. Zanima nas kako hitro se vzpostavi ravnovesje?

Uporabimo kontinuitetno enačbo:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma_E \vec{E}$$

$$\nabla \cdot (\sigma_E \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dobimo enačbo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma_E}{\varepsilon_0}\rho = 0$$

$$\Rightarrow \rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t=0)\, e^{-t/\tau} \; ; \; \tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_E}$$

τ je značilni čas, večja kot je privodnost σ_E prej bo prevodnik prišel v ravnovesje.

Npr. za železo

Pod atosekundami

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{10^7\, S/m} = 8{,}85 \cdot 10^{-19}\, s$$

!

5.4 Mikroskopski izvor prevodnosti

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$

A znamo to razložiti?

Ohmov zakon lahko dobimo že iz preproste mikroskopske slike/modela.

Uporabimo Drudejev model prevodnosti
(v bistvu je to le 2. NZ)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\gamma\vec{v} + e\vec{E}(t)$$

proces disipacije (v kristalih sipanje, v elektrolitih hidrodinamika)

Sila na nabit delec

Ko ni polja ($\vec{E}=0$):

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0\, e^{-\gamma t} \; ;$$

hitrost eksponentno pojema s časom

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} e^{-2\gamma t}$$

Disipacija Energije - Izvor Joulove toplote

S poljem ($\vec{E} \neq 0$):

Rešitev (nastavek):

$$v(t) = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')} \vec{E}(t')\, dt'$$

Gostota toka:

Številska volumska gostota naboja

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = n e \vec{v}$$

gostota naboja

Vstavimo:

$$\vec{j} = n e \vec{v} = \frac{n e^2}{m} \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')} \vec{E}(t')\, dt'$$

Za konstantno el. polje $\vec{E}$:

$$\vec{j} = \frac{n e^2}{m} \vec{E} \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')}\, dt'$$

$$\vec{j} = \underbrace{\frac{n e^2}{m \gamma}}_{\sigma_E} \vec{E}$$

Tako uvedemo: $\sigma_E = \frac{n e^2}{m \gamma}$

Prevodnost je višja za večje gostote naboja, je pa manjša za težje nosilce naboj ali če so delci močno dušeni.

5.5 Velikost električne prevodnosti

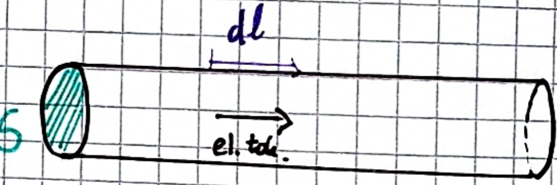
$[\sigma_E] = \frac{S}{m}$; Siemens $S = \frac{1}{\Omega}$

σ_E je tipično močno odvisna od temperature

Aluminij	$3{,}7 \cdot 10^7\ S/m$
Železo	$9{,}4 \cdot 10^7\ S/m$
$YBa_2Cu_3O_7$ nad $T = 92K$	$1 \cdot 10^4\ S/m$
$YBa_2Cu_3O_7$ nad $T = 91K$	∞
Steklo $T = 300K$	$1 \cdot 10^{-15}\ S/m$
Steklo $T = 1000K$	$1 \cdot 10^{-7}\ S/m$

5.6 Upornost

El. tok omejimo na vodnik



Vzamemo $\vec{j} = \sigma_E \vec{E}$

$$\rightarrow \int \vec{j} \cdot d\vec{l} = \sigma \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sigma [\varphi(2) - \varphi(1)]$$

$$\parallel$$

$$\int \vec{j} \cdot \vec{t} \frac{d^3\vec{r}}{S(l)} = I \int \frac{dl}{S(l)}$$

Presek žice

Vpeljemo Upornost R:

$$R = \int \frac{dl}{\sigma S(l)}$$

Dobimo ohmov zakon

$$U = -(\varphi(2) - \varphi(1)) = RI$$

5.6.1 Disipacija energije

Na naboje v EM polju delujeta električna in magnetna sil. Magnetna sila je vedno pravokotna na tir delcu, zato ne troši/dodaja energije.

Velja: $\vec{F} = \int \rho \vec{E}\, d^3\vec{r}$

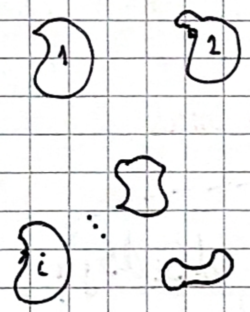
Izračunamo Joulevo moč:

$$P = \int \underbrace{\vec{f}}_{\text{gostota sile}} \cdot \vec{v}\, d^3\vec{r} = \int \frac{\vec{j}}{\rho} (\rho \vec{E} + \underbrace{\vec{j} \times \vec{B}}_{\to 0})\, d^3\vec{r} = \int \vec{j} \cdot \vec{E}\, d^3\vec{r}$$

Ta izraz opisuje izgube pri gibanju nabitih delcev...

5.7 Kapacitivnost

V splošnem želimo vpeljati kapacitivnost prevodnika. Vzamemo N prevodnikov $\to i = 1, \dots, N$.



$$\phi(\partial V_i) = (\text{konst})_i$$

$\uparrow$ Potencial na površini i-tega prevodnika

Gledamo celotno energijo el. polja

a)

$$W_e = +\frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r})\, d^3\vec{r}$$

Po vsem naboju

Ker so prevodniki, so naboji le na površini:

$$\rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} \to \sum_i \sigma_i\, dS_i$$

Dobimo:

naboj na i-tem prevodniku

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i \oint \varphi \sigma_i \, dS_i = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i e_i$$

konst.

potencial na površini i-tega prevodnika

b) Isto energijo izrazimo drugače

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})\, d^3\vec{r} =$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\int_V \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,' =$$

Prepoznamo, da je ves naboj na površinah prevodnika

$$\rho(\vec{r})d^3\vec{r} \to \sum_i \sigma_i dS_i$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i,j}\iint_{(i)(j)} \frac{\sigma_i \sigma_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j\,'|} dS_i dS_j =$$

Poljubne točke na površini i-tega in j-tega prevodnika

Integrala tečeta po površini i-tega in j-tega prevodnika

Uvedemo: $\int \sigma_i dS_i = e_i$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 e_i e_j} e_i e_j \iint_{(i)(j)} \frac{\sigma_i \sigma_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} dS_i dS_j$$

Uvedemo C_{ij}^{-1} ; inverz tenzorja kapacitivnosti

Združimo:

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i e_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}^{-1} e_i e_j$$

kjer je:

vsebujejo info o porazdelitvi nabojev po plošči

C_{ij} kapacitivnost

$$C_{ij}^{-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 e_i e_j}\iint_{(i)(j)} \frac{\sigma_i \sigma_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} dS_i dS_j$$

Normirano na naboj

Torej je:

$$f_i = \sum_j C^{-1}_{ij} e_j$$

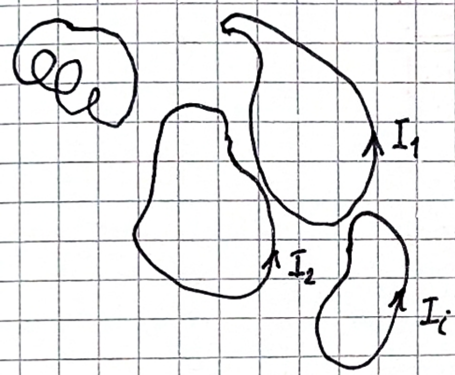
oz.

$$e_i = \sum_j C_{ij} f_j \qquad (e = CU)$$

kapacitivnost med i in j vodnikom

5.8 Induktivnost

Podobno kot kapacitivnost samo v jeziku magnetizma. Imamo $i = 1, \dots, N$ tokovnih vodnikov (žic), po katerih teče tok I_i.



Računamo magnetno energijo polja: $\vec{j}\, d^3\vec{r} = I d\vec{l}$

a)

$$W_m = \frac{1}{2} \int \vec{j} \cdot \vec{A}\, d^3\vec{r}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \iint_S \nabla \times \vec{A}\, d\vec{S} = \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{(i)} \vec{B} \cdot d\vec{S} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i I_i \Phi_{m_i}$$

b) Zapišemo to še na drug način

$$W = \frac{1}{2} \int \vec{j} \cdot \vec{A}\, d^3\vec{r} =$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,'$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{j}(\vec{r})\,\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}\,' =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} I_i I_j \iint_{(i)(j)} \frac{d\vec{l}_i\, d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}_{L_{ij} \text{ induktivnost}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i} L_{ij} I_i I_j$$

Kjer wedemo tenzor induktivnosti kot:

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(i)} \oint_{(j)} \frac{d\vec{l}_i \cdot d\vec{l}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

po zankah (žicah)

$L_{ii} \to$ Lastna induktivnost

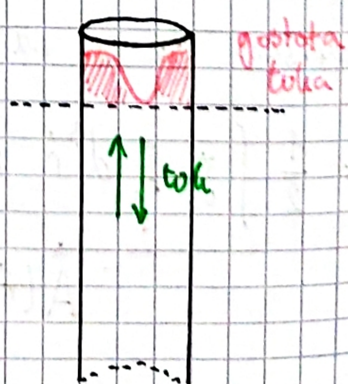
(npr. induktivnost ene tuljave)

Velja:

$$\phi_{m_i} = \sum_j L_{ij} I_j \xrightarrow{\text{časovni odvod}} (U = L\dot{I})$$

5.11 Kožni pojav (Skin effect)

Ko izmenični tok teče skozi prevodnik, se razporedi tako, da je gostota toka največja blizu sten prevodnika. Temu se ~~ne~~ reče kožni pojav (skin effect)



5.11.1 Osnovne enačbe kožnega pojava

- Uporabimo Maxwellove enačbe + Ohmov zakon za prevodnik.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma_E \vec{E}$$

Delujemo z rotorjem:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\mu_0 \sigma_E \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \sigma_E \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \sigma_E \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Uporabimo: $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

Dobimo:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma_E \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \sigma_E \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

To sta "difuzijski" enačbi za $\vec{E}$ in $\vec{B}$

Iščemo rešitve kot:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

(Fourier) Predpostavimo, da lahko časovno odvisnost zapišemo kot sin in cos pri neki frekvenci.

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}$$

Dobimo:

$$\nabla^2 \vec{E} = \underbrace{-i\omega\mu_0\sigma_E}_{k^2} \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = -i\omega\mu_0\sigma_E \vec{B}$$

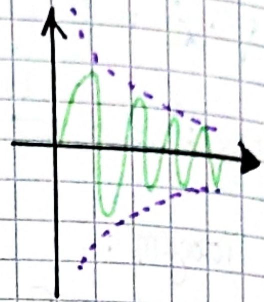
Helmholtzova enačba

$$k^2 = -i\omega\mu_0\sigma$$

$$k = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0\sigma}$$

Torej rešitev v 1D $\left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = k^2 E\right)$:

$$E \propto e^{-kz} = e^{-\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}z} e^{i\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z}$$



Udorna globina:

$$\sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$$

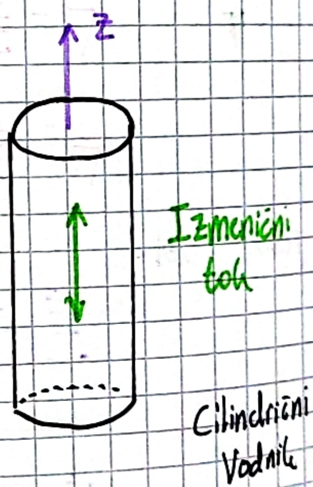
Za Cu pri 60 Hz: ~ 1 cm udorna globina (bolj natančno 8,6 mm)

Za Cu pri 750 MHz (internet): ~ 1 ~~mm~~ μm udorna globina (bolj natančno 2,4 μm)

↳ 10^4 atomov debeline

Kej zelo zmanjšati ne moremo, ker zmanjka atomov => Rabimo optične žice

5.11.2 Geometrija polj in ustrezna rešitev



Cilindrične koordinate + cilindrična baza

$$(r, \phi, z);\ (\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$$

Od nič različni samo:

$$E_z\ ,\ B_\phi$$

$$E_z(r,t) = E_z(r)e^{-i\omega t}$$
$$B_\phi(r,t) = B_\phi(r)e^{-i\omega t}$$

Laplaceov operator v cilindričnih koord. in cilindrični bazi:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}$$

Torej:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B_\phi}{\partial r}\right)-\frac{B_\phi}{r^2}=\overbrace{-i\omega\mu_0\sigma}^{k^2}B_\phi$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)=-i\omega\mu_0\sigma E_z$$

Sta te dve enačbi sklopljeni?

Veljati mora še povezava med $\vec{E}$ in $\vec{B}$: $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Pri nas "preživi" le z smer:

$$+i\omega B_\phi=(\nabla\times\vec{E})_\phi=-\frac{\partial E_z}{\partial r}$$

Povezava/vez ~~...~~/~~sklopljeni~~

JA!

(če rešimo eno imamo rešitev druge)

Rešitev enačb:

Modificirana Besselova funkcija

$$E_z(r)=A\,J_0(kr)$$

↳ Mora biti sposobna vzeti kompleksen argument

Odvod po $\frac{\partial}{\partial r}$

$$\rightarrow B_\phi(r)=-iA\frac{k}{\omega}J_1(kr)$$

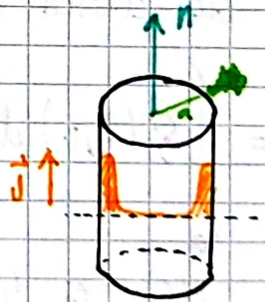
kjer je:

$$k=\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\sigma}$$

5.11.3 Tok skozi cilindrični vodnik

Gostota el. toka:

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}\rightsquigarrow j=\sigma E_z=\sigma A J_0(kr)$$



Celoten tok:

$$I=\int\vec{j}\cdot\hat{n}\,dS=\sigma\int_0^a E_z\,2\pi r\,dr=$$

$$E_z r=\frac{i}{\omega\mu_0\sigma}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)$$

$$=i\frac{2\pi a}{\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\Bigg|_0^a=\frac{2\pi a}{\mu_0}B_\phi(a)$$

↓ Povezan z B_ϕ

Tok skozi žico je pogojen z odvodom električnega polja na površini žice oz. z magnetnim poljem na površini žice.

Loči se močen in šibek kožni pojav glede na frekvenco (Velikost frekvence).

VI. Maxwellove enačbe

Maxwellova teorija EM polja povezuje električno in magnetno polje, $\vec{E}(\vec{r},t)$ in $\vec{B}(\vec{r},t)$, z gostoto naboja in gostoto toka

$$\rho = \rho(\vec{r},t) \qquad \vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t)$$

ki sta izvira polj.
Zavedajmo se Helmholtzovega izreka, ki trdi, da je poljubno vektorsko polje popolnoma določeno, če poznamo njegovo divergenco in rotor.

Vsled tega so Maxwellove enačbe:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \_\_\_ \qquad \nabla\cdot\vec{B} = \_$$

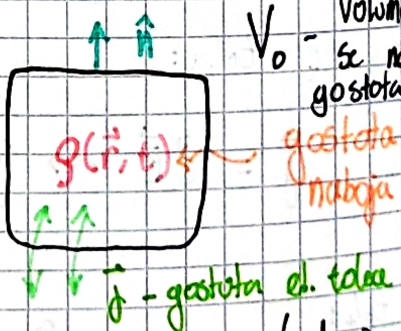
$$\nabla\times\vec{E} = \_\_\_ \qquad \nabla\times\vec{B} = \_\_\_$$

To pa določi fizika. Takšna je narava

6.1 Ohranjanje naboja - kontinuitetna enačba

Zanima nas celoten naboj v V_0:

V_0 - Volumen, v katerem se nahaja neka gostota naboja.



$$e(t) = \int_{V_0} \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r}$$

V splošnem $e(t)$ ni konstanten, ker $\vec{j}$ lahko stalno prinaša/odnaša naboj.
Torej:

$$\frac{de}{dt} = -\int_{\partial V_0} \vec{j}\cdot\hat{n}\, dS = -\int \nabla\cdot\vec{j}\, d^3\vec{r}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}\int \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} = \int \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d^3\vec{r}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$

Kontinuitetna enačba

Posledica kont. enačbe je, da gostota naboja na nekem mestu ni več nujno konstantna v času, saj tok lahko prinaša/odnaša naboje.

6.2 Maxwellov premikalni tok

Osnovne Maxwellove enačbe v kvazistatični sliki so oblike:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \underbrace{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Ta enačba implicira, da je vedno (delujemo nanjo z divergenco)

$$\mu_0 \nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$$

Kar pa ne sovpada s kontinuitetno enačbo.

To se reši z dopolnitvijo enačbe s Premikalnim tokom

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{Premikalni tok}}$$

(neničeln za časovno spremenljiv $\vec{E}$)

Preverimo. Delujemo z divergenco:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{\rho/\varepsilon_0})$$

$$0 = \nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Sedaj pa se ohranja naboj

6.3 Popoln set Maxwellovih enačb

I. enačba $\quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

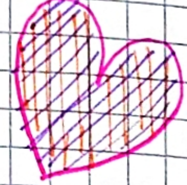
Povezava polj z izvori

II. enačba $\quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$

III. enačba $\quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Kinematični enačbi

IV. enačba $\quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$



Izpolnjujejo tudi kontinuitetno enačbo:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

To so enačbe, ki v celoti določajo klasično elektrodinamiko.

6.5 Ohranitveni zakoni

Maxwellove enačbe ohranjajo naboj, gibalno količino, vrtilno količino in celotno energijo.

6.5.1 Ohranjanje energije

Kontinuitetna enačba (za energijo):

Vzamemo III. in IV. enačbo in ju križno zmnožimo.

$$\vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} = \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B} = \vec{E} \cdot \mu_0 \vec{j} + \vec{E} \cdot \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Odštejemo

$$\mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \underbrace{\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\times\vec{E})} - \mu_0 \vec{j}\cdot\vec{E} \quad /:\mu_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2}_{\text{gostota energije}} + \underbrace{\tfrac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2}_{\text{gostota energije}}\Big) = -\frac{1}{\mu}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{j}\cdot\vec{E}$$

Dobimo:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{P} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0}$$

Kontinuitetna enačba za energijo (velja v točki)

kjer

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 \to \text{gostota energije}$$

$$\vec{P} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) \to \text{Poyntingov vektor}$$

V integralni obliki (za neki volumen V_0)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \overset{\triangle}{w\, d^3\vec{r}} = -\int_{\partial V} \overset{\circ}{\vec{P}\cdot d\vec{S}} - \int_V \overset{*}{\vec{j}\cdot\vec{E}\, d^3\vec{r}}$$

Torej celotna energija v nekem volumnu ($\triangle$) se lahko spreminja kot posledica odtoka/dotoka energije skozi površino (O) ali pa na nivoju celega volumna (*) (npr. Ohmske izgube).

6.5.2 Ohranitev gibalne količine

Kontinuitetna enačba za gibalno količino

Obravnavamo:

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})\right] = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B} + \varepsilon_0\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} =$$

Predelamo $(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B}$ in $\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})$

$$= \varepsilon_0\left[\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}(\nabla\times\vec{B})\times\vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{j}\times\vec{B} - \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})\right] = \ldots =$$

Dobimo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})}_{\vec{g}\ \text{gostota gibalne količine}}\Big) = \nabla\cdot\Big[\underbrace{\varepsilon_0\vec{E}\otimes\vec{E}-\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\underline{\underline{I}}+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\otimes\vec{B}-\frac{1}{2\mu_0}B^2\underline{\underline{I}}}_{\text{Napetostni tenzor EM Polja}}\Big]-\Big[\underbrace{\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}}_{\text{gostota EM sile}}\Big]$$

Torej:

Cauchyjeva kontinuitetna/ohranitvena enačba za gibalno količino

$$\boxed{\frac{\partial g_i}{\partial t}-\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}+f_i=0}$$

Kjer:

$$\vec{g}=\varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B}) \cdot \text{ gibalna količina}$$

$$T_{ik}=\varepsilon_0E_iE_k-\frac{\varepsilon_0}{2}E^2\delta_{ik}+\frac{1}{\mu_0}B_iB_k-\frac{1}{2\mu_0}B^2\delta_{ik} \quad \text{Napetostni tenzor}$$

$$\vec{f}=\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B} \quad \text{~~Maxwellova~~ Lorentzova gostota sile}$$

V integralni obliki:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V g_i\, d^3\vec{r}=\int_{\partial V}T_{ik}\,dS_k-\int_V f_i\, d^3\vec{r}$$

V danem volumnu se gibalna količina lahko spreminja kot posledica delovanja napetostnega tenzorja na površini telesa ali kot posledica Lorentzove volumske sile.

6.5.4 Ohranjevanje vrtilne količine

Vzamemo ohranitev gibalne količine:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t}-\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}-f_i \quad / \cdot x_j \qquad \text{Množimo z ročico}$$

Dobimo: $$\frac{\partial (x_j g_i)}{\partial t} = \underbrace{x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}}_{\frac{\partial (x_j T_{ik})}{\partial x_k} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} T_{ik}} - x_j f_i \qquad \underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial x_k}}_{\delta_{jk}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(x_j g_i) = \frac{\partial (x_j T_{ik})}{\partial x_k} - T_{ij} - x_j f_i \quad \Big/ \cdot \varepsilon_{lji}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\varepsilon_{lji} x_j g_i)}_{\text{vrtilna količina}} = \frac{\partial (\varepsilon_{lji} x_j T_{ik})}{\partial x_k} - \cancel{\varepsilon_{lji} T_{ij}}^{\,0} - \underbrace{\varepsilon_{lji} x_j f_i}_{\text{navor}}$$

ker je simetričen $T_{ij} = \varepsilon_0 (E_i E_j + \frac{E^2}{2}\delta_{ij}) + \text{mag. del.}$

Uvedemo:

gostota vrtilne količine $\quad \gamma_l = \varepsilon_{lji} x_j g_i$

gostota navora $\quad m_l = \varepsilon_{lji} x_j f_i$

Dobimo:

$$\boxed{\frac{\partial \gamma_l}{\partial t} - \frac{\partial (\varepsilon_{lji} x_j T_{ik})}{\partial x_k} + m_l = 0}$$

Kontinuitetna enačba za gibalno količino

Prepišemo v integralsko obliko:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \gamma_l \, d^3\vec{r} - \int_{\partial V} (\varepsilon_{lji} x_j T_{ik}) n_k \, dS + \int_V m_l \, d^3\vec{r} = 0$$

Vrtilna količina EM polja se torej spreminja kot posledica delovanja napetostnega tenzorja na površini in volumskih navorov.

VII. Elektromagnetno polje v snovi

7.1 Električno polje v snovi

Zanima nas, kako se spremenijo Maxwellove enačbe, če polje ustvarimo v snovi.

7.1.1 Vezan naboj

Celotna gostota naboja v snovi je sestavljena iz dveh prispevkov:

- Zunanji naboj, ki ga lahko poljubno spreminjamo
- Vezan naboj, ki ga ne moremo spreminjati; je določen z zapleteno mikroskopsko porazdelitvijo

Vezan naboj definiramo kot:

$$\rho_v = \sum_i e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Povprečje gre preko ti. hidrodinamskega volumna

↓

Zgladi mikroskopske variacije

Dovoljuje zvezno spreminjanje vezanega naboja po snovi.

Prva Maxwellova enačba se prepiše v:

Vezan naboj

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_v(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$

Zunanji naboj

Snov obravnavamo makroskopsko na nivoju polja.

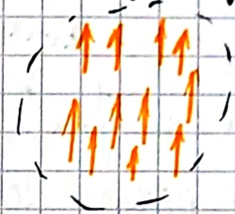
7.1.2 Polarizacija

Vezan naboj v snovi se izrazi kot polarizacija. Uvede se:

$$\rho_v = -\nabla\cdot\vec{P}$$

polarizacija

Spomni se računa ko konstantna polarizacija ustvari površinsko g. naboja.



Dobimo zvezo:

$$\nabla\cdot(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}) = \rho \quad \text{oz.} \quad \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

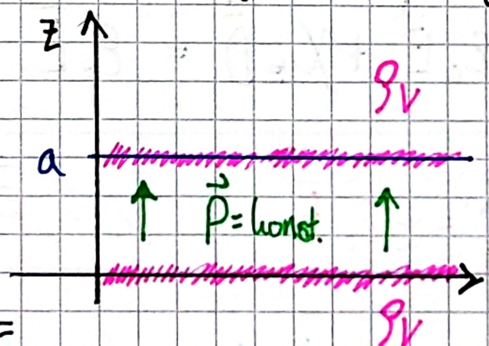
kjer uvedemo gostoto električnega polja $\vec{D}$ kot:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

Izvori $\vec{D}$ so izključno zunanji naboji.

Slika snovi:

Odziv snovi na el. polje je, da v snovi pride do prerazporeditve naboja in ustvari se polarizacija, ki zunanje polje ojači ali oslabi.



Primer polarizacije

$$\rho_v = -\nabla\cdot\vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}, \frac{\partial P_y}{\partial y}, \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) =$$

$$= -P\delta(z) + P\delta(z-a)$$

7.1.3. Konstitutivna relacija za električno polje v snovi

Porazdelitev vezanih nabojev ~~je~~ ρ_v je odvisna seveda od snovi in od zunanjega polja.

Torej:

$$\underline{\underline{\vec{P} = \vec{P}(\vec{D})}} \; ; \text{ ta funkcija je v principu poljubna}$$

Konstitutivna relacija

Za majhna zunanja polja in homogene ter izotropne snovi razviješ $\vec{P}(\vec{D})$ do prvega člena.

$$\vec{P}(\vec{D}) = \chi_E \vec{D} + \mathcal{O}(\vec{D}^2)$$

električna susceptibilnost

Ponavadi se zapiše:

$$\chi_E = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$$

dielektričnost (dielektrična funkcija)

Torej:

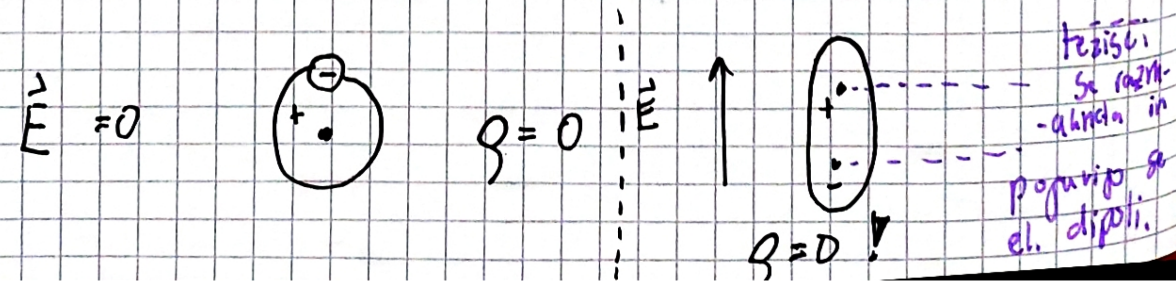
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_E \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\vec{D}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{in} \quad \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}}$$

Osnovni zvezi, ki opisujeta polarizacijo in polje v homogeni izotropni snovi

7.1.4. Polarizacija in gostota električnega dipolnega momenta

Zanima nas, kaj ~~tamo~~ točno je vektorsko polje polarizacije.



Vzamemo Poissonovo enačbo + naboji v snovi:

$$-\nabla^2 f = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla\cdot\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Rešitev:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \underbrace{\frac{\nabla'\cdot\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}\, d^3\vec{r}\,'$$

$$\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \frac{\nabla'\cdot P(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + P(\vec{r})\,\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \underbrace{\nabla'\cdot\left(\frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)}_{\oint_{\partial V}(\ )\,d\vec{S}=0} d^3\vec{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|r-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \vec{P}(\vec{r})\cdot\underbrace{\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)}_{-\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)} d^3\vec{r}$$

Ko ni zunanjega naboja ($\rho(\vec{r}\,')=0$):

$$f(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\int_V \frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3\vec{r}\,' \quad (*)$$

Primerjamo dobljeno z el. potencialom za električni dipol, ki je oblike:

$$f(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) \quad (\Delta)$$

dipol je pri $\vec{r}\,'$

da dobimo iz $(*)$ rešitev (Δ), moramo vzeti:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{p}\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}\,')$$