=> Sledi: Polarizacija ustreza volumski gostoti električnega momenta.

Slika snovi v el. polju:

Zunanje el. polje v snovi razmakne težišča pozitivnih in negativnih naboje (v atomih, molekulah, ...). ~~Pojavijo~~ Zato se pojavijo električni dipoli. Njihova volumska gostota ustreza polarizaciji.

7.1.5 Klasifikacija snovi po odzivu na el. polje

Glede na vrednosti dielektrične funkcije ločimo:

- dielektriki:
  - imajo končno vrednost ε
  - v njih lahko skladiščimo energijo
  - neidealni dielektriki imajo frekvenčno odvisen $\varepsilon(\omega)$.

- prevodniki:
  - imajo neskončno vrednost ε
  - idealno senčijo električno polje v notranjosti

+ in drugi...

7.2 Magnetno polje v snovi

V snovi obstajajo vezani tokovi, ki so kvantnomehanskega izvora (npr. pomisli na gibanje elektronov v atomih oz. po orbitalah).

-> Če ni zunanjega polja je hidrodinamsko povprečje magnetnih polj od vezanih tokov enako 0.

→ če je zunanjem magnetnem polju, pa se lahko lokalne fluktuacije vezanih tokov odzovejo nanj. Dobimo neto vezano električno gostoto toka.

7.2.1 Vezan tok

V snovi imamo torej:

- Zunanja gostota električnega toka: $\vec{j}$
- Vezana gostota električnega toka: $\vec{j}_v$

Vezan tok definiramo kot:

← hidrodinamsko povprečje

$$\vec{j}_v = \overline{\sum_i \vec{j}_i \, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)}$$

↳ Npr. koordinate atomov, molekul, ...

Prepišemo IV. Maxwellovo enačbo:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}_v$$

7.2.2 Magnetizacija

Uvedemo novo vektorsko polje Magnetizacija kot:

$$\vec{j}_v = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Vezani tokovi so torej povezani z magnetizacijo in časovnim spreminjanjem polarizacije.

S tako definicijo $\vec{j}_v$ in ρ_v zadoščata kontinuitetni enačbi

$$\nabla \cdot \vec{j}_v + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \cancelto{0}{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{M})} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{P} + \frac{\partial}{\partial t}(-\nabla \cdot \vec{P}) = 0$$

Sedaj lahko zapišemo:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Vpeljemo jakost magnetnega polja:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

Torej se Maxwellova enačba prepiše v:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Opazi, da je $\vec{H}$ odvisna le od zunanjih tokov (v resnici izvirov).

7.2.4 Magnetizacija in gostota magnetnega dipolnega momenta

Zanima nas, kaj je vektor magnetizacije?

Obravnavamo:

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\underset{\nabla \times \vec{A}}{\underset{\uparrow}{\nabla \times \vec{B}}} = \mu_0 \vec{j} + \nabla \times \vec{M}$$

Zapišemo enačbo za $\vec{A}$, poiščemo rešitev za $\vec{A}$ (po Litkotovi en.), in primerjamo z rešitvijo od $\vec{A}$ za magnetni dipol.

=> Magnetizacija je volumska gostota magnetnih dipolov.

7.2.5 Klasifikacija snovi po odzivu na magnetno polje //

Glede na vrednost magnetne permeabilnosti ločimo:

7.2.3 Konstitutivna relacija za magnetizacijo (bi moralo bit prej)

Magnetizacija je odvisna od zunanjega magnetnega polja $\vec{H}$.

Konstitutivna relacija: $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$ ← Poljubna funkcija $\vec{H}$

V linearni aproksimaciji za homogeno in izotropno snov:

$$\vec{M} = \underbrace{\chi_M}_{\text{Magnetna susceptibilnost}} \vec{H} + \mathcal{O}(\vec{H}^2)$$

Uvedemo tudi:

$$\mu = 1 + \chi_M$$

↳ Magnetna permeabilnost

Torej:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_M \vec{H} \quad \text{oz.} \quad \boxed{\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}}$$

To velja v linearni aproksimaciji

7.2.5 Klasifikacija snovi po odzivu na mag. polje

Glede na vrednost ~~perm~~ permeabilnosti (oz. mag. suscept.) ločimo:

- Paramagneti: $\mu > 1$ (oz $\chi_\mu > 0$)

  Magnetno polje v snovi ojači; v magnet. polju se snov obnaša kot magnet, ko pa je izven polja se snov razmagneti

- diamagneti: $\chi_\mu < 0$

  Magnetno polje snov oslabi; magnetizacija je prisotna samo, ko snov v zunanjem polju, drugače izgine; Superprevodniki so idealni diamagneti.
  - imajo $\chi_M = -1$

Za njih lin. aproks. konstitutivne ne velja

- feromagneti:

  imajo trajno magnetizacijo, ki je neodvisna od velikosti zun. polja; M je močno temp. odvisen (nad Curie-jevo temp. M izgine)

+ in drugih

7.3 Maxwellove enačbe v snovi

Kompleten sistem je torej:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

+ 2 konstitutivni relaciji

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}) \xrightarrow{\text{lin. aprok.}} \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{D}) \longrightarrow \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

V anizotropni snovi:

$$\varepsilon \longrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} \qquad \rightarrow \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{E}$$

$$\mu \longrightarrow \underline{\underline{\mu}} \qquad \rightarrow \qquad \vec{B} = \mu_0 \underline{\underline{\mu}} \vec{H}$$

V nelinearnih snoveh:

$$\vec{D} = \underbrace{\quad}\vec{E} + \overset{\text{3 rang}}{\underbrace{\varepsilon_{ijk}}}\vec{E}\vec{E} + \overset{\text{4 rang}}{\underbrace{\quad\quad}}\vec{E}\vec{E}\vec{E} + \dots$$

$$\vec{B} = \underbrace{\quad}\vec{H} + \underbrace{\quad\quad}\vec{H}\vec{H} + \underbrace{\quad\quad}\vec{H}\vec{H}\vec{H} + \dots$$

Uporabno recimo v nelinearni optiki

7.4. Ohranitveni zakoni v snovi

7.4.1 Ohranjevanje energije

Kontinuitetna enačba ohrani strukturo

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Lijer pa zdaj:

$$W = \int_0^{D} \underbrace{\vec{E}(\vec{D})}_{} d\vec{D} + \int_0^{\vec{B}} \underbrace{\vec{H}(\vec{B})}_{} d\vec{B}$$

gostota energije

Konstitutivne relacije

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$ Poyntingov vektor

Komentar: Če $\vec{E} \propto \vec{D}$ oz. $\vec{H} \propto \vec{B}$ dobimo kvadratne forme (kot smo navajeni)

7.4.2 Energija EM polja v snovi

Zanima nas, kolikšna je razlika EM energij, če v del prostora vstavimo EM aktivno snov ($\mu \neq 1$ in $\varepsilon \neq 1$)

$\int E d\vec{D}$

$\propto \; = C \int \vec{D} d\vec{D}$

$E \; = C \frac{\vec{D}^2}{2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2}$

a) Električno polje

$$W - W_0 = \int_V \Big(\int \underbrace{\vec{E}}_{\propto \vec{D}} d\vec{D} \Big) d^3\vec{r} - \int_V \Big(\int \underbrace{\vec{E}_0}_{\propto \vec{D}_0} d\vec{D}_0 \Big) d^3\vec{r} =$$

s snovjo — brez snovi

(*)

$$= \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} \, d^3\vec{r} - \frac{1}{2} \int_V \vec{E}_0 \vec{D}_0 \, d^3\vec{r}$$

če velja l.n.

Prepišemo:

$$W - W_0 = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}\vec{D}_0 - \vec{E}_0\vec{D}) d^3\vec{r} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V (\overbrace{\vec{E} + \vec{E}_0}^{-\nabla f})(\vec{D} - \vec{D}_0) d^3\vec{r}}_{\star}$$

Predpostavimo, da je $\nabla \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) = 0$ torej $\rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})$ gostota naboja je enaka za $\vec{D}$ in $\vec{D}_0$.

$$\star = -\frac{1}{2} \int_V \nabla f (\vec{D} - \vec{D}_0) d^3\vec{r} = \underbrace{-\frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot [f(\vec{D} - \vec{D}_0)] d^3\vec{r}}_{\text{Površinski člen, daleč stran } \vec{D} = \vec{D}_0} + \frac{1}{2} \int_V f \underbrace{\nabla \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0)}_{0} d^3\vec{r} =$$

$$= 0$$

Torej (če je prostor zunaj snovi vakuum):

$$W - W_0 = -\frac{1}{2}\int \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}\,\vec{E}_0\, d^3\vec{r}$$

Tako je razlika:

$$W - W_0 = -\frac{1}{2}\int_V \overbrace{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}}^{\vec{P}}\,\vec{E}_0\, d^3\vec{r}$$

↳ vakuum

$$W - W_0 = -\frac{1}{2}\int_V \vec{P}\,\vec{E}_0\, d^3\vec{r}$$

↳ električno polje brez snovi

polarizacija v snovi

po snovi

b) Magnetno polje

$$W - W_0 \overset{\text{lin. konsti. rel.}}{=} \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}\, d^3\vec{r} - \frac{1}{2}\int_V \vec{H}_0\cdot\vec{B}_0\, d^3\vec{r}$$

$$= \frac{1}{2}\int (\vec{B}\cdot\vec{H}_0 - \vec{B}_0\cdot\vec{H})\, d^3\vec{r} + \underbrace{\frac{1}{2}\int (\underbrace{\vec{B} + \vec{B}_0}_{\nabla\times\vec{A}})(\vec{H} - \vec{H}_0)\, d^3\vec{r}}_{=0}$$

Predpostavimo $\nabla\times(\vec{H} - \vec{H}_0) = 0$ gostota toka se ne spremeni. Isto kot prej postopek. Dobimo (če je okolišnji medij vakuum):

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\int_V \underbrace{\mu_0(\mu - 1)\vec{H}}_{\vec{M}}\,\vec{H}_0\, d^3\vec{r}$$

Vakuum

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\int_V \vec{M}\cdot\vec{H}_0\, d^3\vec{r}$$

↳ jakost magnetnega polja brez snovi

Magnetizacija v snovi

7.4.3 Ohranjevanje gibalne količine

Cauchyjeva kontinuitetna enačba za gibalno količino in linearne konstitutivne relacije:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0$$

kjer zdaj:

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} \rightsquigarrow \text{gostota gibalne količine}$$

$$\underbrace{T_{ik} = E_i D_k - \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D})\delta_{ik} + B_i H_k - \frac{1}{2}(\vec{B}\cdot\vec{H})\delta_{ik}}$$

Napetostni tenzor za lin. kons. relacije

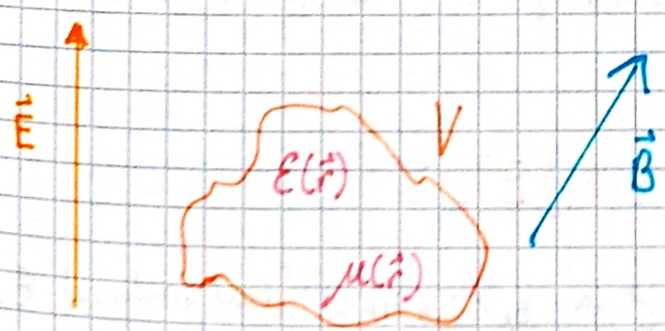
Vendar: Za splošne konstitutivne relacije ni nujno, da lahko uvedeš napetostni tenzor. Ne da se zapisati:

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = \nabla \cdot \underline{\quad}$$

Zato obstajajo (v literaturi) različni poskusi/približki takih zapisov.

7.5 Sila na nehomogeno snov v EM polju

Predstavljajmo si snov v EM polju, kjer je $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ in $\mu = \mu(\vec{r})$



Če to snov premaknemo se spremeni $\varepsilon(\vec{r})$ in $\mu(\vec{r})$. Zanima nas sila na nek tak volumen (delec) V.

Silo na delec zapišemo kot:

$$F_i = \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d^3\vec{r}$$

po volumnu telesa $\nearrow$

Najprej gledamo elektrostatski del:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(E_i D_k - \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D})\delta_{ik}\right) =$$

$\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0 \vec{E}$

$\frac{1}{2}\nabla E^2 = \vec{E}\times(\nabla\times\vec{E}) + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}$

$$= E_i \underbrace{\frac{\partial D_k}{\partial x_k}}_{\nabla\cdot\vec{D}} + E_k \frac{\partial D_i}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon(\vec{r})}{\partial x_i}\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon(\vec{r})\frac{\partial(E^2)}{\partial x_i} =$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_V \Big[\underbrace{\vec{E}(\nabla\cdot\vec{D}) + \cancel{(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{D}} - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{E}) - \cancel{(\vec{E}\cdot\nabla)\vec{D}}}_{=0}\Big] d^3\vec{r} - \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \nabla\varepsilon(\vec{r}) E^2 d^3\vec{r}$$

Predpostavimo:

i) $\nabla\cdot\vec{D} = 0$ (ni prostih nabojev)

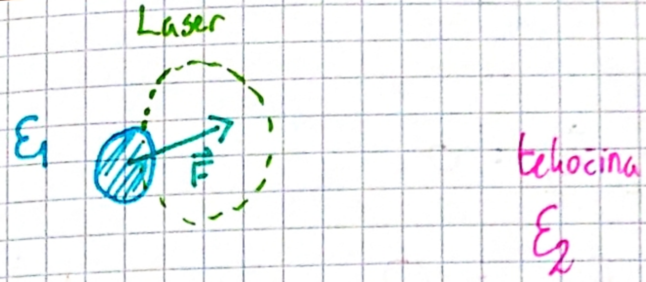
ii) $\nabla\times\vec{E} = 0$ (ni indukcij)

Torej ob teh predpostavkah je sila na nehomogen dielektrik:

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\int \varepsilon_0 (\nabla\varepsilon(\vec{r})) E^2 d^3\vec{r}$$

Sila kaže v smeri največjega spreminjanja (smer gradienta) ε.

Npr. Optična pinceta



Analogno za magnetno polje:

$$\vec F = -\frac{1}{2}\int \mu_0 \nabla \mu(\vec r)\, H^2\, d^3\vec r$$

Predpostavke:

- lin. konst. relacija
- ni prostih tokov ($\nabla \times \vec H = 0$)

7.6 Robni pogoji za Maxwellove enačbe

Velja:

Normalna komponenta

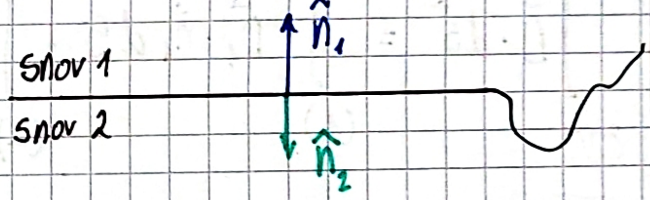
$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

$$B_{1n} - B_{2n} = 0$$

Tangentna komponenta

$$E_{1t} - E_{2t} = 0$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K$$



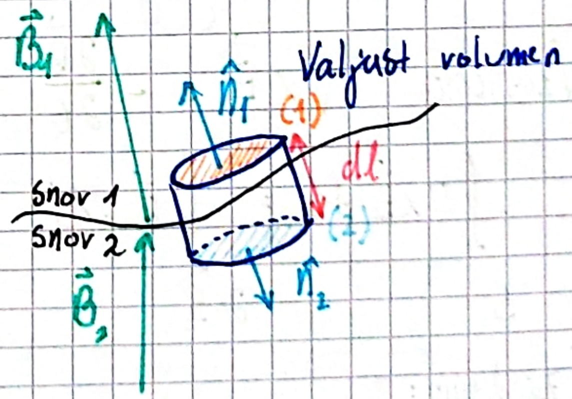
kjer je σ površinska gostota naboja in K površinska gostota toka.

7.6.1 Robni pogoj za $\vec B$

Velja:

$$\nabla \cdot \vec B = 0$$

$$0 = \int_V \nabla \cdot \vec B\, d^3\vec r = \int_{\partial V} \vec B \cdot d\vec S$$



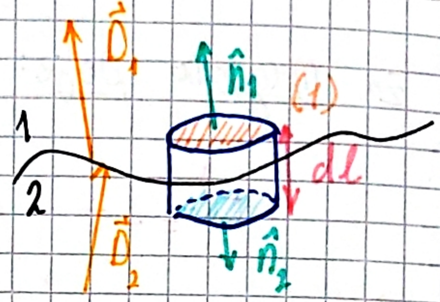
Izvedemo integral:

$$0 = \int_{\partial V} \vec B\, d\vec S = \int_{(1)} \vec B_1 \cdot \vec n_1\, dS + \int_{(2)} \vec B_2 \cdot \vec n_2\, dS + \underbrace{\int_{plašč} \vec B_{plašč} \cdot \vec n_{plašč}\, dS}_{\lim dl \to 0 \;\Rightarrow\; 0}$$

Torej:

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_{1n} - B_{2n} = 0$$



7.6.2 Robni pogoj za $\vec{D}$

Velja: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{D}\, d^3\vec{r} = \int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, d^3\vec{r} = \int_{\partial V} \sigma\, dS$$

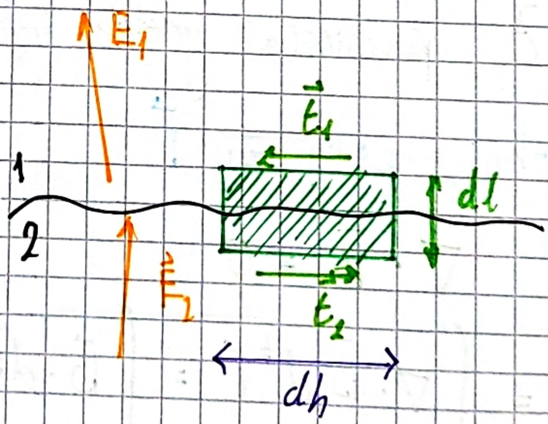
Izvedemo:

$$\int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{(1)} \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1\, dS + \int_{(2)} \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2\, dS + \underbrace{\int_{plašč} \vec{D}_{plašč} \cdot \vec{n}_{plašč}\, dS}_{\substack{\text{tanek valj limita} \\ dl \to 0 \;\Rightarrow 0}} = \int_{\partial V} \sigma\, dS$$

Torej:

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 = \sigma$$

$$\Rightarrow \quad D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$



7.6.3 Robni pogoj za $\vec{E}$

Vzamemo $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\int_S \nabla \times \vec{E}\, dS = \int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Izvedemo:

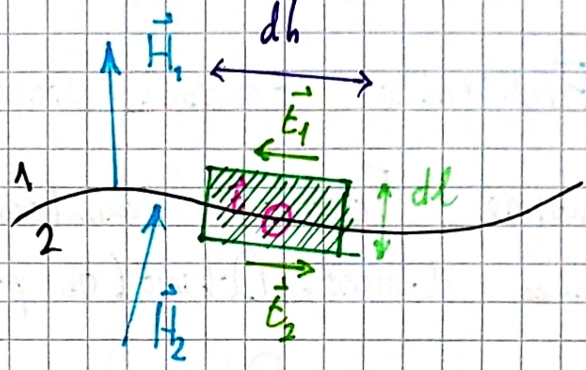
$$\int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \vec{E}_1 \cdot t_1\, dh + \vec{E}_2 t_2\, dh + \underbrace{E_{rob} t_3\, dl + E_{rob} t_4\, dl}_{dl \to 0 \;\Rightarrow 0} =$$

$$= -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}_{rob} \cdot d\vec{S} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t} B_{rob}\, dl\, dh}_{dl \to 0 \;\Rightarrow\; 0} = 0$$

Torej: $\vec{E}_{1t}\vec{t}_1 + \vec{E}_2\vec{t}_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad E_{1t} - E_{2t} = 0$$

7.6.4 Robni pogoj za $\vec{H}$



Vzamemo: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$$\int_S \nabla \times \vec{H}\, d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{K dh} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{D}\, d\vec{S}}_{dl \to 0 \;\Rightarrow\; 0}$$

Površinska gostota toka
(je v smeri normale zanke) $K dh = \vec{j} \cdot \vec{t}\, dl\, dh$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{t}_1\, dh + \vec{H}_2 \cdot \vec{t}_2\, dh + \underbrace{\vec{H}_{rob}\, t_3\, dl + \vec{H}_{rob}\, t_4\, dl}_{\lim\; dl \to 0 \;\Rightarrow\; 0} = \vec{j} \cdot \vec{t} \cdot dh\, dl$$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{t}_1 dh + \vec{H}_2 \vec{t}_2\, dh = K\, dh$$

Torej:

$$\vec{H}_1\vec{t}_1 + \vec{H}_2\vec{t}_2 = K$$

$$\Rightarrow \quad H_{1t} - H_{2t} = K \quad ; \qquad K = \vec{j} \cdot \vec{t}\, dl \qquad [K] = \frac{A}{m}$$

8. Frekvenčna odvisnost dielektrične funkcije

Dielektrična funkcija oz. lomni količnik so odvisni od frekvence.

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega) \quad \text{oz.} \quad \varepsilon(\omega) = n^2(\omega)$$

8.3 Frekvenčno odvisna dielektrična funkcija

Uporabimo Fourierovo transformacijo, da prevedemo sistem v frekvenčno domeno. Dobimo (ob predpostavki lin. konst. rel.):

$$D(\vec{r},\omega) = \varepsilon(\omega)\,\varepsilon_0\, E(\vec{r},\omega)$$

$$\varepsilon(\omega) = \underbrace{\varepsilon_r(\omega)}_{\text{Re komp}} + i\,\underbrace{\varepsilon_i(\omega)}_{\text{Im komp}}$$

Realna komponenta določa npr. lom svetlobe, uklonu,...
Imaginarna komponenta pa določa absorpcijo (preko faznih zamikov)

8.5 Kramers-Kronigove relacije

Realni in imaginarni del dielektrične funkcije sta sklopljena. Če poznaš enega, lahko določiš drugega.

In sicer velja:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}(\varepsilon(\omega)) &= 1 + \frac{2}{\pi}\,\mathcal{P}\int \frac{\mathrm{Im}(\varepsilon(\omega'))}{\omega'^2 - \omega^2}\,d\omega' \\ \mathrm{Im}(\varepsilon(\omega)) &= -\frac{2\omega}{\pi}\,\mathcal{P}\int \frac{\mathrm{Re}(\varepsilon(\omega')) - 1}{\omega'^2 - \omega^2} \end{aligned}}$$

Kramers-Kronigove relacije

Kjer $\mathcal{P}$ pomeni glavno/Cauchyjevo vrednost integrala:

$$\mathcal{P}\int \frac{g(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega' = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon} \frac{g(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega' + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty} \frac{g(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega'$$

K-K relacije sledijo iz definicije integrala glavne vrednosti, Hilbertove transformacije in Plemljeve enačbe.

K-K so pomembne v različnih spektroskopskih tehnikah, kjer z meritvijo ene komponente lahko dobiš še drugo.

8.6 Disipacija energije in Im $\varepsilon(\omega)$

Imaginarna komponenta $\varepsilon(\omega)$ nam ustvari fazni zamik med jakostjo in gostoto el. polja. Gledamo gostoto energije (magnetni del zanemarimo):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Iščemo spremembo energije med časoma T_1 in T_2:

$$w(2)-w(1) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial w}{\partial t}\,dt = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,dt = \star$$

Gremo v frekvenčni prostor:

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi}\int \vec{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega$$

$$\vec{D}(t) = \frac{1}{2\pi}\int \vec{D}(\omega')\,e^{-i\omega' t}\,d\omega'$$

$$\star = \int_{T_1}^{T_2} dt \left[\frac{1}{2\pi}\int \vec{E}(\omega)\,e^{-i\omega t}\,d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int (-i\omega')\,\vec{D}(\omega')\,e^{-i\omega' t}\,d\omega'\right] =$$

$$\vec{D}(\omega') = \varepsilon(\omega')\,\varepsilon_0\,\vec{E}(\omega')$$

$$= \varepsilon_0 \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} (-i\omega')\, \varepsilon(\omega')\, \vec{E}(\omega)\, \vec{E}(\omega') \int_{T_1}^{T_2} e^{-i(\omega+\omega')t}\, dt = \dots$$

Pošljemo $\left.\begin{array}{l} T_1 \to -\infty \\ T_2 \to +\infty \end{array}\right\} \; 2\pi\, \delta(\omega+\omega')$

Delta funkcija

Ločeno integriraj po ω in potem še po ω' in seštej. Izvedi integral po volumnu; Dobimo:

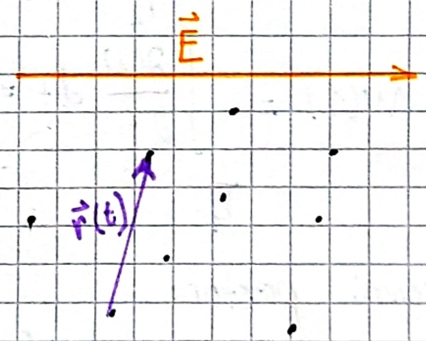
$$W(2) - W(1) = \varepsilon_0 \int \frac{d\omega}{2\pi}\, \omega\, \mathrm{Im}\, \varepsilon(\omega) \int |E(\vec{r},\omega)|^2\, d^3\vec{r}$$

Razlika energij $\propto \mathrm{Im}\, \varepsilon(\omega)$

8.7. Modeli $\varepsilon(\omega)$

8.7.1 Gibalna enačba za vezan naboj

V dielektriku imamo vezane naboje, ki se ne morejo poljubno gibati po snovi. Obravnavamo klasično:



$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\gamma \dot{\vec{r}} - m\omega_0^2 \vec{r} + e\vec{E}$$

disperzija (sipanje, viskoznost) — vezan naboj v harmonskem potencialu — zunanje polje

Uporabimo Fourierovo transformacijo

$$-m\omega^2 \vec{r}(\omega) = -m\gamma(-i\omega)\vec{r}(\omega) - m\omega_0^2 \vec{r}(\omega) + e\vec{E}(\omega)$$

Rešitev:

$$\vec{r}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

Torej:

$$\vec{P}(\omega) = e\vec{r}(\omega)n \Rightarrow P(\omega) = \frac{e^2 n}{m}\frac{\vec{E}(\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)-i\gamma\omega}$$

Volumska številska gostota

Velja pa tudi:

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1)\vec{E}(\omega)$$

Dobimo:

$$\varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1) = \frac{e^2 n}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$

To je splošna frekvenčna odvisnost. Opisana odvisnost se večkrat uporablja v približkih:

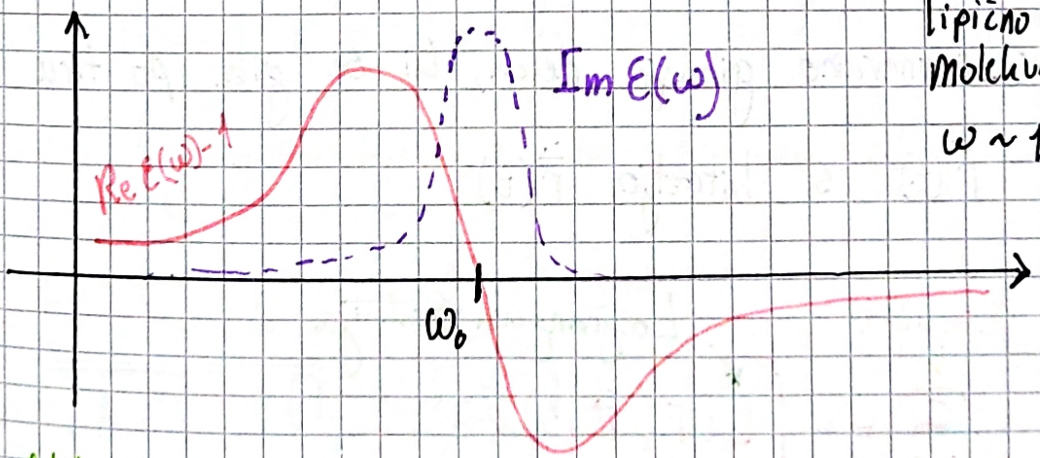
i) Debyeva relacija: (Zanemariš ω^2)

$$\vec{P}(\omega) = \frac{e^2 n}{m\omega_0^2}\frac{\vec{E}(\omega)}{1-i\omega\tau}; \quad \tau = \frac{\gamma}{\omega_0}$$ relaksacijski čas

Tipično ustreza relaksaciji dipolnih momentov v molekulah ($\omega \sim 10^7 - 10^9\ s^{-1}$)

ii) Lorentzova relaksacija: (Upošteva vse člene)

$$\varepsilon_0(\varepsilon(\omega)-1) = \frac{(\varepsilon(0)-1)\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega}$$



Tipično nihanje molekul $\omega \sim 10^{12} - 10^{16}\ s^{-1}$

iii) Plazemska relaksacija:
(Zanemarimo $\omega_0 \to 0$ (so prosti) in $\gamma \to 0$ (ni dušenja))

Elektroni v snovi, ki so prosti $\omega \gtrsim 10^{16}\ s^{-1}$

$$\vec{P}(\omega) = -\frac{e^2 n}{m}\frac{\vec{E}(\omega)}{\omega^2}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

Kjer je ω_p plazemska frekvenca: $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$

V realnih snoveh imaš lahko več virov vezave (več ω_0-ov) in tudi disipacije. Odziv snovi je tako superpozicija vseh teh efektov.

[Primer: Dielektrična funkcija vode]

Uporabi se Debyjevo relaksacijo pri nizkih frekvencah in Lorentzovo za višje. In sicer:

1 Debyjeva relaksacija

11 Lorentzovih relaksacij

$$\varepsilon(i\omega) = 1 + \sum_{i=1}^{1} \frac{d_i}{1+\omega\tau_i} + \sum_{i=1}^{11} \frac{f_i}{\omega_i^2 + g_i\omega + \omega^2}$$

kjer so $d_i, \tau_i, f_i, \omega_i, g_i$ ~> so fenomenološke (fitane) konstante.

13. Hamiltonske metode in teorija polja

Teorija EM polja se pogosto uporablja v okviru Hamiltonovega oz. Euler-Lagrangevega formalizma.

13.1 Osnove Hamiltonskih metod v klasični fiziki

- E-L enačbe:

Npr. Obravnavamo gibanje delca, ki se giba po tiru $\vec{r}(t)$ s hitrostjo $\dot{\vec{r}}(t)$

Vpeljemo akcija

Lagrangeva funkcija

$$S = \int L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, dt$$

Za 1 delec npr. $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$

Z variacijo akcije $\delta S = 0 \Rightarrow$ dobimo Euler-Lagrangeove enačbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$$ Euler-Lagrangeove enačbe

- Hamiltonove enačbe

Uvedemo impulz: $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}$

Uvedemo Hamiltonovo funkcijo:

$$H = \dot{\vec{r}}\vec{p} - L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Za 1 preprost delec recimo:

$$H = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}} + V(\vec{r})$$

Veljajo Hamiltonove enačbe:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad ; \quad \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}}$$ Hamiltonove enačbe

13.2 Lagrangeova funkcija nabitega delca v EM polju

Hočemo zapisati Lagrangeovo funkcijo za točkast gibajoč naboj.

Začnemo z Lorentzovo silo in 2. N. Z.

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \quad m\dot{\vec{v}} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

Koristno je napisati z potenciali

$$m\dot{\vec{v}} = -e\nabla\varphi - e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e\underbrace{\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})}_{\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}}$$

$$= -e\nabla\varphi - e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - e(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} =$$

Substancialni odvod

$$= -e\nabla\varphi - e\frac{d\vec{A}}{dt} + e\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$\Downarrow$$

$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v} + e\vec{A}) = \nabla(-e\varphi + e\vec{v}\cdot\vec{A})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\vec{r}}}\left(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\vec{A}\dot{\vec{r}}\right)\right) = \nabla(-e\varphi + e\dot{\vec{r}}\vec{A})$$

$+e\varphi$ (odvod pohrusti) $\qquad + \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}$ (odvod pohrusta)

Prepoznamo Lagrangeovo funkcijo za nabit delec v EM polju:

$$L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\varphi(\vec{r},t) + e\dot{\vec{r}}\vec{A}(\vec{r},t)$$

Opazi:

Lagrangeva funkcija se izraža z EM potenciali in ne polji.

Za tako definirano Lag. funkcijo je izpolnjen pogoj

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \xrightarrow[\text{KI DA}]{} m\ddot{\vec{r}} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

13.5 Hamiltonova funkcija nabitega delca v polju

Zanima nas Hamiltonova funkcija za nabit delec v polju

Velja: $H(\vec{p},\vec{r},t) = \dot{\vec{r}}\vec{p} - L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A} \rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}-e\vec{A}}{m}$$

$$H = \frac{(\vec{p}-e\vec{A})}{m}\vec{p} - \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + e\varphi - e\vec{A}\left(\frac{\vec{p}-e\vec{A}}{m}\right)$$

$$= \frac{(\vec{p}-e\vec{A})}{m}\vec{p} - \frac{1}{2}m\left(\frac{\vec{p}-e\vec{A}}{m}\right)^2 + e\varphi - e\vec{A}\left(\frac{\vec{p}-e\vec{A}}{m}\right)$$

Dobimo:

$$H = \frac{1}{2}\frac{(\vec{p}-e\vec{A})^2}{m} + e\varphi$$

$\vec{p}$ ... kanonični impulz

$\vec{p}-e\vec{A}$ ... kinetični impulz

V kvantni mehaniki funkcija postane operator.

13.6 Schwartzschildova invarianta

Zanima nas ~~Hamiltonova~~ Lagrangeova funkcija za zvezno porazdeljen naboj, ki se nahaja v zunanjem polju φ in $\vec{A}$.

Za en delec: $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \underbrace{- e\varphi + e\dot{\vec{r}}\vec{A}}_{L_{DP}}$

L_{DP} ta del Lag. f. opisuje sklopitev s polji

Za zvezno porazdeljen naboj:

volumska gostota Lag. f.

$$L_{DP} = -\int \rho(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t)\,d^3\vec{r} + \int \vec{j}(\vec{r},t)\vec{A}(\vec{r},t)\,d^3r = \int \mathcal{L}_{DP}\,d^3\vec{r}$$

Vpeljemo volumsko gostoto Lagrangeve funkcije - Schwartzschildov invarianta

$$\mathcal{L}_{DP} = -\rho(\vec{r},t)\,\phi(\vec{r},t) + \vec{j}(\vec{r},t)\,\vec{A}(\vec{r},t)$$

13.7 Lagrangeva funkcija elektromagnetnega polja

Zanima nas Lagrangeva funkcija, ki ustreza nabitim delcem kot izvorom polja, ki so dodatno lahko še v zunanjem polju.

Zapišemo L iz dveh prispevkov:

$$L = \int \mathcal{L}(\vec{r},t)\,d^3\vec{r} = \int \mathcal{L}_P(\vec{r},t)\,d^3\vec{r} + \int \mathcal{L}_{DP}(\vec{r},t)\,d^3\vec{r}$$

prispevek k L izvirov polja

sklopitev z zunanjimi polji

$\mathcal{L}_{DP} = \rho\phi + \vec{j}\cdot\vec{A}$

Uganemo:

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Ta oblika vodi do prave oblike Maxwellovih enačb, zapisanih za ϕ in $\vec{A}$.

(spomni se tudi izračunov za gostoto energije polj).

Celotna gostota Lagrangeove funkcije EM polja je torej:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r},t) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(\vec{r},t) - \rho(\vec{r},t)\,\phi(\vec{r},t) + \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{A}(\vec{r},t)}$$

$-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ $\qquad$ $\nabla\times\vec{A}$

13.7.1 in 2 E-L in Riemann-Lorentzove enačbe

Celotno akcijo torej zapišemo kot:

$$S = \int \mathcal{L}\left(\varphi(\vec{r},t), A_i(\vec{r},t)\right) dt\, d^3\vec{r}$$

kar da E-L enačbe ($\delta S = 0$):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}\right) + \nabla\left(\frac{\partial L}{\partial(\nabla\varphi)}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}\right)}\right) + \nabla\left(\frac{\partial L}{\partial(\nabla A_i)}\right) - \frac{\partial L}{\partial A_i} = 0$$

Kar nam da Riemann-Lorentzove enačbe

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 A_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} &= -\mu_0 j_i \end{aligned}}\ ; \ i = 1,2,3$$

To so splošne enačbe za φ in $\vec{A}$, ki sledijo iz "polnih" (= časovno odvisnih) Maxwellovih enačb.

14. Posebna teorija relativnosti

14.7 Elektromagnetna polja in Lorentzova transformacija

Predpostavimo, da imamo dva sistema S in S', kjer se S' giblje z neko hitrostjo v in sicer v x smeri.

S $\qquad\qquad$ $S' \xrightarrow{v}$ (blizu svetlobne hitrosti)

(x, y, z, t) $\qquad\qquad$ (x', y', z', t')

$\vec{E}, \vec{B}$ $\qquad\qquad$ $\vec{E}', \vec{B}'$

Transformacija med sistemoma je Lorentzova transformacija

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

Zanima nas, kako se transformirajo polja

$$E, B \longleftrightarrow E', B'$$

=> Ključna predpostavka je da so Maxwellove enačbe enake v sistemih S in S' (tako je, tako so izmerili).

V sistemu S' velja (predpostavimo ni izvorov, ni snovi):

$$\nabla' \cdot E' = 0 \qquad \nabla' \cdot \vec{B}' = 0$$

$$\nabla' \times \vec{E}' = \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \qquad \nabla' \times \vec{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}$$

Najprej vzamemo 1. in 3. enačbo:

Pain in pa še kakšno boste uporabite.

111

rezervne črtice na zalogi

$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E'_{z'}}{\partial z'} = 0$$

$$\frac{\partial E'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_{x'}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E'_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E'_{x}}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_{y'}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E'_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E'_{x'}}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_{z'}}{\partial t'}$$

Zapisano v drugem veljajo:

$$\frac{\partial}{\partial ct'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial ct} + \beta\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial ct}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

To uporabimo in vstavimo v prejšnje enačbe (dolg proces):

npr.

$$-\frac{\partial B_z'}{\partial t} = -c\gamma\left(\frac{\partial B_{z'}'}{\partial ct}+\beta\frac{\partial B_{z'}'}{\partial x}\right)$$

Enako narediš še enačbe 2. in 4. in dobiš ob primerjavi z Maxwell. enačbami v sistemu S ($\underline{\underline{ne}}$ S') sistem enačb za komponente polj.

Razmisleh je kakšne kombinacije komponent $\vec{E}'$ in $\vec{B}'$ potrebuješ, da dobiš nazaj originalne Maxwel. enačbe v sistemu S.

Dobimo:

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= E_{x'}' \\ E_y &= \gamma(E_{y'}' + vB_{z'}') \\ E_z &= \gamma(E_{z'}' - vB_{y'}') \\ B_x &= B_{x'} \\ B_y &= \gamma\left(B_{y'}' - \frac{v}{c^2}E_{z'}'\right) \\ B_z &= \gamma\left(B_{z'}' + \frac{v}{c^2}E_{y'}'\right) \end{aligned}}$$

To so transformacije za EM polja.

E in B nista manifestno Lorentzovo invariantna

Posledica 1

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z =$$

$$= E'_{x'} B'_{x'} + \gamma^2 (E'_{y'} + v B'_{z'})(B'_{y'} - \frac{v}{c^2} E'_{z'}) +$$

$$+ \gamma^2 (E'_{z'} - v B'_{y'})(B'_{z'} + \frac{v}{c^2} E'_{y'}) =$$

$$= E'_{x'} B'_{x'} + E'_{y'} B'_{y'} \gamma^2 (1-\beta^2) + E'_{z'} B'_{z'} \gamma^2 (1-\beta^2) = \vec{E}' \cdot \vec{B}'$$

Skalarni produkt je invarianten; koti se ohranjajo.

Posledica 2

$$E^2 - c^2 B^2 = \ldots = E'^2 - c^2 B'^2$$

Ta dva člena vstopata v Lagrangeovo funkcijo (opisujeta energijo polj). Vsota (oz. razlika) je invariantna na Lorentzovo transformacijo.

Torej v posebni relativnosti se ohranjajo koti med polji, same velikosti polj pa so <u>odvisne</u> od sistema; ohranja se samo njihova "skupna" energija.