Posebna teorija relativnosti

14.7 Elektromagnetna polja in Lorentzova transformacija

Predpostavimo, da imamo sistema S in S', kjer se S' giblje z neko hitrostjo v in sicer v x smeri. Transformacija med sistemoma je **Lorentzova transformacija**

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

kjer sta:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

Zanima nas, kako se transofrimirajo polja. **Ključna predpostavka:** *Maxwellove enačbe so enake v sistemih S in S'* (to so izmerili, tako je). V sistemu S' velja (ob predpostavki, da ni izvorov in ni snovi):

$$\nabla' \cdot \vec{E}' = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B}' = 0$$

$$\nabla' \times \vec{E}' = \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \qquad \nabla' \times \vec{B}' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}$$

Najprej vzamemo 1. enačbo:

$$\frac{\partial E'_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E'_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E'_{z'}}{\partial z'} = 0$$

in 3. enačbo:

$$\frac{\partial E'_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E'_{y'}}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_{x'}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E'_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E'_{x'}}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_{y'}}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E'_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E'_{x'}}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_{z'}}{\partial t'}$$

Sedaj odvode zapišemo v drugem sistemu:

$$\frac{\partial}{\partial ct'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial ct} + \beta\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial ct}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

To uporabimo in vstavimo v prejšnje enačbe. To je dolg proces. Enako naredimo še za 2. in 4. enačbo in dobimo ob primerjavi z Maxwellovimi enačbami v sistemu S sistem enačb za komponente polja. Dobimo **transformacije EM polja:**

$$E_x = E'_{x'}$$

$$E_y = \gamma(E'_{y'} + vB'_{z'})$$

$$E_z = \gamma(E'_{z'} - vB'_{y'})$$

$$B_x = B'_{x'}$$

$$B_y = \gamma\left(B'_{y'} - \frac{v}{c^2}E'_{z'}\right)$$

$$B_z = \gamma\left(B'_{z'} + \frac{v}{c^2}E'_{y'}\right)$$

E in B nista manifestno Lorentzovo invariantna.

Posledica 1

Skalarni produkt je invarianten; **koti se ohranjajo.**

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \cdots = \vec{E}' \cdot \vec{B}'$$

Posledica 2

Vsota oz. členov ki opisujeta energijo v Lagrangianu je invariantna.

$$E^2 - c^2B^2 = \cdots = E'^{\,2} - c^2B'^{\,2}$$

Torej v posebni relativnosti se ohranjajo koti med polji, same velikosti polj pa so **odvisne** od sistema. *Ohranja se samo njihova skupna energija.*

?? Prostor Minkowskega

Ideja je, da se teorijo relativnosti formulira z **štirivektorji**. ki pri posebni teoriji relativnosti ohranjajo metriko Minkowskega, pri splošni teoriji relativnosti pa splošno metriko, ki je odvisna od porazdelitve mase. Dogovorimo se, da grški indeksi tečejo po vseh štirih koordinatah (kjer je ničta koordinata časovna), negrški pa samo po prostorskih koordinatakh. Dodatno:

- **Indeks spodaj: Kovariantni vektor**
- **Indeks zgoraj: Kontravariantni vektor**

Lorentzeva transformacija ohtanja kvadrat štirivektorja. Velja **sumacijski dogovor**:

$$x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu x^\mu = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x^\mu x_\mu$$

Z isto idejo invariantnosti količin se analogno uvede tudi druge štiri vektorje.

?? Štirivektor gostote toka

Gostota naboja in Lorentzova transformacija

Naboj mora biti invarianten na Lorentzovo transformaciji, drugače bi ga pridobivali ali izgubljali s tem ko bi gledali delce v različnih sistemih. Torej mora veljati:

$$e = \int \rho \, d^3\vec{r} = \int \rho' \, d^3\vec{r'}$$

oz.

$$e = \int\limits_V \rho \, dx \, dy \, dz = \int\limits_{V'} \rho' \, dx' \, dy' \, dz' = \int\limits_{V'} \rho' \, \gamma dx \, dy \, dz$$

Primerjamo in dobimo:

$$\rho' = \frac{\rho}{\gamma}$$

To je invariantno na LT.

Štirivektor gostote toka

Uvede se kot:

$$j_\mu = \frac{\rho}{\gamma} u_\mu = \frac{\rho}{\gamma}(\gamma\vec{v}, \gamma c)$$

kjer je u_μ štirivektor hitrosti. Iz tega sledi:

$$j_\mu = (\vec{j}, c\rho) \qquad j^\mu = (\vec{j}, -c\rho)$$

Opazimo, da v njem ne nastopa hitrost, kar kaže na splošnost in smiselnost uvedbe takega štirivektorja. Ker je uveden kot pravi štirivektor se tudi transformira kot štirivektor:

$$j'_x = \gamma(j_x - \beta c\rho)$$

$$j'_y = j_y$$

$$j'_z = j_z$$

$$c\rho' = \gamma(c\rho - \beta j_x)$$

Velja pa tudi:

$$j_\mu j^\mu = j'_\mu j'^\mu = \vec{j} \cdot \vec{j} - c^2\rho^2$$

ki je **ohranjena količina**. Torej razcep štirivektorja gostote toka na gostoto toka in gostoto naboja je odvisen od tega, v katerem koordinatnem sistemu ga merimo! **Je torej relativen!**

Štirivektor elektromagnetnega potenciala

Spomnimo se Riemann-Lorentzovih enačb za φ in $\vec{A}$. Zapišemu ju lahko z **d'Alembertovem operatorjem**:

$$\Box^2\varphi = \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Box^2\vec{A} = \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}$$

Skupaj potenciala tvorita **štirivektor elektromagnetnega potenciala**:

$$A_\mu = \left(\vec{A}, \frac{\varphi}{c}\right) \qquad A^\mu = \left(\vec{A}, -\frac{\varphi}{c}\right)$$

Tako lahko Riemann-Lorentzove enačbe zapišemo v Lorentzovo invariantni obliki:

$$\Box^2 A_\mu = -\mu_0 j_\mu \quad \text{oz.} \quad \Box^2 A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

Ker je uveden kot pravi štirivektor se tudi transformira kot štirivektor:

$$A'_x = \gamma\left(A_x - \beta\frac{\varphi}{c}\right)$$

$$A'_y = A_y$$

$$A'_z = A_z$$

$$\frac{\varphi'}{c} = \gamma\left(\frac{\varphi}{c} - \beta A_x\right)$$

Velja pa tudi:

$$A_\mu A^\mu = A'_\mu A'^\mu = \vec{A} \cdot \vec{A} - \frac{\varphi^2}{c^2}$$

Schwartzschildova invarianta v relativistični dinamiki

Sedaj lahko zapišemo Lagrangeev člen za nabite delce v EM polju v relativistični obliki:

$$l_{\mathcal{DP}} = \int j_\mu A^\mu d^4 x_\mu$$

Kovariantni tenzor EM polja

Zanima nas kaksen je kovarianten (manifestno invarianten na LT) zapis osnovnih fizikalnih polj $\vec{E}, \vec{B}$. Velja:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Po drugi strani pa imamo četverec potencialov in četverec odvodov. S pomočjo tega bi radi združili obe polji.
Poglejmo najprej E_x:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} =$$

To sedaj pomnožimo zgoraj in spodaj z c in dobimo komponente štirivektorja EM potenciala:

$$= -c\frac{\partial A_4}{\partial x^1} + c\frac{\partial A_1}{\partial x^4} = c \cdot \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^4} - \frac{\partial A_4}{\partial x^1}\right)$$

Poglejmo še B_x. Dobimo:

$$B_x = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3}$$

Obe komponenti izgledata kot nekakšen **4D rotor**:

$$(\nabla \times \vec{C})_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial c_j}{\partial x_k}$$

Na osnovi tega razmisleka uvedemo **tenzor elektromagnetnega polja** kot:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_n u A_\mu$$

To je antisimetričen tenzor, ki zgleda tako:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

Komponente tenzorja so vse komponente polj. Tako smo prvič lahko združili polji v eno količino. V 4D torej polji postaneta **ENO elektromagnetno polje**.

Kontravariantni tenzor EM Polja:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\gamma} g^{\nu\mu} F_{\gamma\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -B_z & B_y & \frac{E_x}{c} \\ B_z & 0 & -B_x & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & B_x & 0 & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

kjer je mentrični tenzor:

$$g^{\mu\gamma} = g_{\mu\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Iz kontravariantnega in kovariantnega tenzorja dobimo dve invarianti:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2B^2 - 2\frac{E^2}{c^2}$$

$$\det F_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (\vec{B} \cdot \vec{E})^2$$

Druga invarianta pomeni, da se koti med polji ne spreminjajo.

Kovariantna akcija elektromagnetnega polja

Ta združen zapis je osnova za kvantizacijo polja v kvantni elektrodinamiki:

$$S = \frac{1}{c} \int \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + A^\mu j_\mu \right] \, d^4 x_\lambda$$