Elektromagnetno ppolje v snovi

7.1 Električno polje v snovi

Zanima nas, kako se spremenijo Maxwellove enačbe, če polje ustvarimo v snovi.

7.1.1 Vezan naboj

Celotna gostota naboja v snovi je sestavljena iz dveh prispevkov:

- **Zunanji naboj**: ki ga lahko poljubno spreminjamo
- **Vezan naboj**: ki ga ne moremo spreminjati; je določen z zapleteno mikroskopsko porazdelitvijo.

Vezan naboj definiramo kot:

$$\rho_v = \overline{\sum_i e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)}$$

kjer *overline* pomeni povprečje preko **hidrodinamskega volumna**. Zadari mikroskopske variacije dovoljuje zvezno spreminjanje vezanega naboja po snovi. Prva Maxwellova enačba se prepiše v:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_v(\vec{r}, t)}{\varepsilon_0}$$

Snov obravnavamo makroskopsko na nivoju polja.

7.1.2 Polarizacija

Vezan naboj v snovi se izrazi kot **polarizacija** $\vec{P}$. Uvede se:

$$\rho_v = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Dobimo zvezo:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

kjer uvedemo **gostoto električnega polja** $\vec{D}$ kot:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Izvori $\vec{D}$ so izključno zunanji naboji.

Slika snovi:
Odziv snovi na električno polje je, da v snovi pride do prerazporeditve naboja in ustvari se polarizacija, ki tunanje polje ojači ali olabi.

7.1.3 Konstitutivna relacija za električno polje v snovi

Porazdelitev vezanih nabojev ρ_v jw odvisna seveda od snovi in od zunanjega polja. Torej mora veljati:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{D})$$

kjer je ta funkcija v princupu poljubna. To je konstitutivna relacija. Za majhna zunanja polja in homogene ter izotropne snovi razviojemo $\vec{P}(\vec{D})$ do prvega člena:

$$\vec{P}(\vec{D}) = \chi_E \vec{D} + O(\vec{D}^2)$$

kjer je χ_E **električna susceptibilnost** in jo običajno zapišemo z **dielektrično funkcijo** ε kot:

$$\chi_E = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$$

Torej:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_E \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \vec{D}$$

Iz tega dobimo osnovni zvezi, ki opisujeta polarizacijo in polje v homogeni in izotropni snovi:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 0\vec{E} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$$

7.1.4 Polarizacija in gostota električnega dipolnega momenta [Glej sliko]

Zanima nas, kaj točno je vektorsko polje polarizacije. Vzamemo Poissonovo enačbo in naboje v snovi in dobimo:

$$-\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Rešitev:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, d^3\vec{r'} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, d^3\vec{r'} =$$

Zadnji člen dopolnemo do polne divergence (polni odvod) in dobimo:

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, d^3\vec{r'} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right) \, d^3\vec{r'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right) \, d^3\vec{r'}$$

Drugi člen tu odpade (??). V tretjem pa prepoznamo, da lahko zamenjamo gradient:

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \right)$$

Tako dobimo končno rešitev, ko ni zunanjega naboja $\rho(\vec{r'}) = 0$:

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla \int_V \left(\frac{\vec{P}(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)\, d^3\vec{r'}$$

Primerjajmo dobljeno z električnim potencialom za dipol, ki je oblike:

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{P}\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\right)$$

Da dobimo našo rešitev moramo tako vzeti:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{p}\delta^3(\vec{r}-\vec{r'})$$

Sledi: **Polarizacija ustreza volumski gostoti električnega momenta**.
Slika snovi v el. polju: Zunanje električno polje v snovi razmakne težišča pozitivnih in negativnih nabojev (v atomih, molekulah, ...). Zato se pojavijo električni dipoli. Njihova volumska gostota ustreza polarizaciji.

7.1.5 Klasifikacija snovi po odzivu na električno polje

Glede na vrednosti dielektrične funkcije ločimo:

- **Dielektriki:**
  - Imajo končno vrednost ε
  - V njih lahko skladiščimo energijo
  - Neidealni dielektriki imajo frekvenčno odvisen $\varepsilon(\omega)$
- **Prevodniki**
  - Imajo neskončno vrednost ε
  - Idealno senčijo električno polje v notranjosti
- **in drugi ..**

7.2 Magnetno polje v snovi

V snovi obstajajo vezani tokovi, ki so kvantnomehanskega izvora (npr. pomisli na gibanje elektronov v atomih oz. po orbitalah). Če ni zunanjega polja je hidrodinamsko povprečje magnetnih polj od vezanih tokov enako 0. Če pa imamo zunanje magnetno polje, pa se lahko lokalne fluktuacije vezanih tokov odzovejo nanj. Dobimo neto vezano električno gostoto toka.

7.2.1 Vezan tok

V snovi imamo torej:

- **Zunanjo gostoto električnega toka**: $\vec{j}$
- **Vezano gostoto električnega toka**: $\vec{j}_v$

Vezan tok definiramo kot:

$$\vec{j}_v = \overline{\sum_i \vec{j}_i\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_i)}$$

Prepišimo četrto Maxwellovo enačbo:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_v + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

7.2.2 Magnetizacija

Uvedemo novo vektorsko polje **magnetizacija** kot:

$$\vec{j}_v = \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Vezani tokovi so torej povezani z magnetizacijo in časovnim spreminjanjem polarizacije. S tako definicijo $\vec{j}_v$ in ρ_v zadoščata kontinuitetni enačbi:

$$\nabla \cdot \vec{j}_v + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{M}) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{P} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{P} = 0$$

Sedaj lahko zapišemo:

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Vpeljemo **jakost magnetnega polja** $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

Torej se Maxwellova enačba prepiše v:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Opazimo, da je jakost magnetnega polja **odvisna le od zunanjih tokov**.

7.2.3 Konstitutivna relacija za magnetizacijo

Magnetizacija je odvisna od zunanjega magnetnega polja $\vec{H}$. V splošnem je lahko poljubna funkcije. V linearni aproksimaciji za homogeno in izotropno snov pa lahko zapišemo:

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} + O(\vec{H}^2)$$

Uvedemo **magnetno permeabilnost** μ kot:

$$\mu = 1 + \chi_M$$

Torej v **linearni aproksimaciji**:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_M \vec{H} \qquad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

7.2.4 Magnetizacija in gostota magnetnega dipolnega momenta

Zanima nas kaj je vektor magnetizacije. Obravnavamo:

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \nabla \times \vec{M}$$

Postopek: Zapišemo enačbo za $\vec{A}$ in poiščemo rešitev zanj po Kirchoffovi enačbi. To primerjamo z rešitvijo za $\vec{A}$ od magnetnega dipla. Dobimo:

Magnetizacija je volumska gostota magnetnih dipolov.

7.2.5 Klasifikacija snovi po odzivu na magnetno polje

Glede na vrednost permeabilnosti oz. magnetni susceptibilnosti ločimo:

- **Paramegneti ($\chi_M > 0$)**: magnetno polje v snovi ojači. V magnetnem polju se snov obnaša kot magnet, ko je pa izven polja se snov razmagneti.
- **Diamagneti ($\chi_M < 0$)**: magneto polje v snovi oslabi. Magnetizacija je priostna samo, ko je snov v zunanjem polju, drugače izgine. Superprevodniki so idealni diamagneti, ki imajo $\chi_M = -1$.
- **Feromagneti**: imajo trajno magnetizacijo, ki je neodvisna od velikosti zunanjega polja. Magnetizacija je močno temperaturno odvisna (nad Curiejevo temperaturo recimo izgine).

7.3 Maxwellove enačbe v snovi

Kompleten sistem enačb je torej:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

in še 2 konstitutivni relaciji in njuni linearni aproksimaciji:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{D}) \rightarrow \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}) \rightarrow \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

V anizotropni snovi postaneta dielektričnost in permeabilnost tenzorja. V nelinearni snoveh, pa moramo vzeti še višje člene razvoja konstitutivne relacije (recimo v nelinearni optiki).

7.4 Ohranitveni zakoni v snovi

7.4.1 Ohranjevanje energije

Kontinuitetna enačba za energijo ohrani strukturo:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{P}} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

kjer pa je zdaj **gostota energije**:

$$w = \int_0^{\vec{D}} \vec{E}(\vec{D})\, d\vec{D} + \int_0^{\vec{B}} \vec{H}(\vec{B})\, d\vec{B}$$

in **Poyntingov vektor**:

$$\mathcal{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

7.4.2 Energija elektromagnetnega polja v snovi

Zanima nas, kolikšna je razlika EM energij, če v del prostora vstavimo EM aktivno snov. Torej tako, ki ima $\mu \neq 1, \varepsilon \neq 1$.

Označili smo W kot energijo z snovjo in W_0 kot energijo brez nje.
a) **Električno polje**

$$W - W_0 = \int\limits_V \int \vec{E}\, d\vec{D}\, d^3\vec{r} - \int\limits_V \int \vec{E}_0\, d\vec{D}_0\, d^3\vec{r} =$$

Notranja integrala izvrednotimo z uvedbo nove spremeljivke npr.:

$$\int \vec{E}\, d\vec{D} = C \int \vec{D}\, d\vec{D} = C\frac{\vec{D}\vec{D}}{2} = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}$$

Če velja, da je snov linearna dobimo tako:

$$= \frac{1}{2}\int\limits_V \vec{E} \cdot \vec{D}\, d^3\vec{r} - \frac{1}{2}\int\limits_V \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0\, d^3\vec{r}$$

Prepišemo:

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\int\limits_V (\vec{E}\vec{D}_0 - \vec{E}_0\vec{D})\, d^3\vec{r} + \frac{1}{2}\int\limits_V (\vec{E} + \vec{E}_0)(\vec{D} - \vec{D}_0)\, d^3\vec{r}$$

Predpostavimo, da je $\nabla \cdot (\vec{D} - \vec{D}_0) = 0$ torej gostota naboja je enaka za $\vec{D}$ in $\vec{D}_0$. Če pogledamo drugi člen v prejšnji enačbi:

$$\frac{1}{2}\int\limits_V (\vec{E} + \vec{E}_0)(\vec{D} - \vec{D}_0)\, d^3\vec{r} = -\frac{1}{2}\int\limits_V \nabla\varphi(\vec{D} - \vec{D}_0)\, d^3\vec{r} = 0$$

Torej (če je prostor zunaj snovi vakuum):

$$W - W_0 = -\frac{1}{2}\int \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}\vec{E}_0\, d^3\vec{r} = -\frac{1}{2}\int \vec{P}\vec{E}_0\, d^3\vec{r}$$

b) **Magnetno polje**
Slično kot pri magnetnem polju predpostavimo linearno konstitutivno relacijo:

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\int\limits_V \vec{H} \cdot \vec{B}\, d^3\vec{r} - \frac{1}{2}\int\limits_V \vec{H}_0 \cdot \vec{B}_0\, d^3\vec{r} =$$

$$= \frac{1}{1}\int (\vec{B}\vec{H}_0 - \vec{B}_0\vec{H})\; d^3\vec{r} + \frac{1}{2}\int (\vec{B}+\vec{B}_0)(\vec{H}-\vec{H}_0)\; d^3\vec{r}$$

kjer v zadnjem členu prepoznamo vsoto polj kot $\nabla \times \vec{A}$ in predpostavimo, da se gostota toka ne spremeni $\nabla \times (\vec{H} - \vec{H}_0) = 0$ kar pomeni, da je zadnji člen enak 0. Po enakem postopku kot za električno polje pridemo do rezultata če je okoliškij medij vakuum:

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\int_V \mu_0(\mu - 1)\vec{H}\vec{H}_0\; d^3\vec{r}$$

oz.

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\int_V \vec{M}\vec{H}_0\; d^3\vec{r}$$

7.4.3 Ohranjevanje gibalne količine

Vzemimo Cauchjevo kontinuitetno enačbo za gibalno količino in linearne konstitutivne relacije:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} - \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} + f_i = 0$$

kjer je zdaj **gostota gibalne količine**:

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B}$$

in **napetostni tenzor za lin. konst. relacije:**

$$T_{ik} = E_i D_k - \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D})\delta_{ik} + B_i H_k - \frac{1}{2}(\vec{B}\cdot\vec{H})\delta_{ik}$$

Vendar: Za splošne konstitutivne relacije ni nujno, da lahko uvedeš napetostni tenzor. Zato obstajajo v literaturi različni približki takih zapisov.

7.5 Sila na nehomogeno snov v EM polju

Predstavljajmo si snov v EM polju, kjer je $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$ in $\mu = \mu(\vec{r})$. Če to snov premaknemo se spremenita oba ta parametra. Zanima nas sila na tak volumen (delec) V. Silo na delec zapišemo kot:

$$F_i = \int_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\; d^3\vec{r}$$

Poglejmo si naprej elektrostatski del tenzorja, recimo:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(E_i D_k - \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D})\delta_{ik}\right) =$$

Vstavimo sedaj konstitutivno relacijo $\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0\vec{E}$, da dobimo:

$$= E_i \frac{\partial D_k}{\partial x_k} + E_k \frac{\partial D_i}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon(\vec{r})}{\partial x_i}\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\varepsilon(\vec{r})\varepsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial x_i}$$

Za zadnji odvod uporabimo vektorsko identiteto:

$$\frac{1}{2}\nabla E^2 = \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{E}$$

Sledi, da je sila:

$$\vec{F} = \int_V \left[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{D}) + (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{D} - \vec{D} \times (\nabla \times \vec{E}) - (\vec{E} \cdot \nabla)\vec{D}\right] \, d^3\vec{r} - \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 \nabla\varepsilon(\vec{r}) E^2 \, d^3\vec{r}$$

Predpostavimo:
i) $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ (ni prostih nabojev)
ii) $\nabla \times \vec{E} = 0$ (ni indukcij)

Torej ob teh predpostavkah je **sila na nehomogen dielektrik**:

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\int \varepsilon_0 (\nabla\varepsilon(\vec{r})) E^2 \, d^3\vec{r}$$

Sila kaže v smeri največjega spreminjanja (torej smer gradienta) ε. Primer uporabe je optična pinceta, ki z gradientom dielektričnosti ustvari silo [Glej Sliko]. Postopek je **analogen za magnetno polje**:

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\int \mu_0 (\nabla\mu(\vec{r})) H^2 \, d^3\vec{r}$$

Ob predpostavkah lin. konst. relacije in tega, da nimamo prostih tokov $\nabla \times \vec{H} = 0$.

7.6 Robni pogoji za Maxwellove enačbe

Za normalni komponenti velja:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \qquad B_{1n} - B_{2n} = 0$$

za tangentni komponenti pa:

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \qquad H_{1t} - H_{2t} = \mathrm{K}$$

kjer je σ **površinska gostota naboja** in K **površinska gostota toka**.

7.6.1 Robni pogoj za $\vec{B}$ [Nujno glej sliko]

Velja:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad 0 = \int_V \nabla \cdot \vec{B} \, d^3\vec{r} = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Izvedemo integral po tankem valju na meji snoveh:

$$0 = \int\limits_{(1)} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \, dS + \int\limits_{(2)} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \, dS + \int\limits_{\text{plašč}} \vec{B}_{\text{plašč}} \cdot \vec{n}_{\text{plašč}} \, dS$$

Zadnji člen gre v limiti $dl \to 0$ proti nič. Tako nam ostane le:

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{1n} - B_{2n} = 0$$

7.6.2 Robni pogoji za $\vec{D}$

Velja:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \int\limits_V \nabla \cdot \vec{D} \, d^3\vec{r} = \int\limits_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int\limits_V \rho \, d^3\vec{r} = \int\limits_{\partial V} \sigma \, dS$$

Izvedemo integral po tankem valju na meji snoveh:

$$\int\limits_{(1)} \vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 \, dS + \int\limits_{(2)} \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 \, dS + \int\limits_{\text{plašč}} \vec{D}_{\text{plašč}} \cdot \vec{n}_{\text{plašč}} \, dS = \int\limits_{\partial V} \sigma \, dS$$

Podobno kot prej člen po plašču v limiti tankega valja odpade in ostane nam:

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_2 = \sigma \quad \Rightarrow \quad D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

7.6.3 Robni pogoj za $\vec{E}$

Velja:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \int\limits_S \nabla \times \vec{E} \, dS = \int\limits_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Izvedemo integral po zanki v pozitivni smeri dimenzij dl in dh, ki jo prebada tangentna smer:

$$\vec{E}_1 \cdot t_1 \, dh + \vec{E}_2 \cdot t_2 \, dh + \vec{E}_{\text{rob}} \cdot t_3 \, dl + \vec{E}_{\text{rob}} \cdot t_4 \, dl = -\frac{\partial}{\partial t} B_{\text{rob}} \, dl \, dh$$

Pošljemo $dl \to 0$ in nam ostane če še:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{t}_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{t}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{1t} - E_{2t} = 0$$

7.6.4 Robni pogoji za $\vec{H}$

Velja:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \int\limits_S \nabla \times \vec{H} \, d\vec{S} = \int\limits_{\partial S} \vec{H} \cdot \, d\vec{r}$$

Izvedemo integral po zanki v pozitivni smeri dimenzij dl in dh, ki jo prebada tangentna smer:

$$\vec{H}_1 \cdot t_1\ dh + \vec{H}_2 \cdot t_2\ dh + \vec{H}_{\text{rob}} \cdot t_3\ dl + \vec{H}_{\text{rob}} \cdot t_4\ dl = \text{K}\ dh - \frac{\partial}{\partial t} D_{\text{rob}}\ dl\ dh$$

Pošljemo $dl \to 0$ in nam ostane če še:

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{t}_1 + \vec{H}_2 \cdot \vec{t}_2 = \text{K} \quad \Rightarrow \quad H_{1t} - H_{2t} = \text{K}$$

8. Frekvenčna odvisnost dielektrične funkcije

Dielektrična funkcija oz. lomni količnik je odvisen od frekvence:

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega) \quad \text{oz.} \quad \varepsilon = n^2(\omega)$$

8.3 Frekvenčno odvisna dielektrična funkcija

Uporabimo Fourierevo transformacijo, da prevedemo sistem v frekvenčno domeno. Dobimo, ob predpostavki lin. konst. relacij:

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_r(\omega) + i\varepsilon_i(\omega)$$

Realna komponenta: določa npr. lom svetlove, uklon, ...
Imaginarna komponenta: določa absorpcijo (preko faznih zamikov)

8.5 Kramers-Kronigove relacije

Realni in imagniarni del dielektrične funkcije sta sklopljena. Če poznamo enega, lahko določimo drugega. In sicer veljajo **Kramers-Kronigove relacije**:

$$\text{Re}(\varepsilon(\omega)) = 1 + \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\text{Im}(\varepsilon(\omega'))}{\omega'^{\ 2} - \omega^2}\ d\omega'$$

$$\text{Im}(\varepsilon(\omega)) = -\frac{2\omega}{\pi}\mathcal{P}\int \frac{\text{Re}(\varepsilon(\omega')) - 1}{\omega'^{\ 2} - \omega^2}\ d\omega'$$

kjer $\mathcal{P}$ pomeni **glavno/Cauchzjevo vrednost integrala**:

$$\mathcal{P}\int \frac{g(\omega')}{\omega' - \omega}\ d\omega' = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\omega-\epsilon} \frac{g(\omega')}{\omega' - \omega}\ d\omega' + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty} \frac{g(\omega')}{\omega' - \omega}\ d\omega'$$

K-K relacije sledijo iz definicije integrala glavne vrednosti, Hilbertove transformacije in Plemljeve enačbe. Pomembne so v različnih spektroskopskih tehnikah, kjer z meritivijo ene komponente lahko dobiš še drugo.

8.6 Dispacija energije in $\text{Im}(\varepsilon(\omega))$

Imaginarna komponenta dielektrične funkcije nam **ustvari fazni zamik med jakostjo in gostoto električnega polja**. Poglejmo gostoto energije (kjer magnetni del zanemarimo):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Iščemo spremembo energije med časoma T_1 in T_2:

$$W(2) - W(1) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial w}{\partial t}\, dt = \int_{T_1}^{T_2} \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, dt =$$

Sedaj gremo v frekvenčni prostor:

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\vec{D}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \vec{D}(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega'$$

Nadaljujemo:

$$= \int_{T_1}^{T_2} dt \left[\frac{1}{2\pi} \int \vec{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega\right] \left[\frac{1}{2\pi} \int (-i\omega') \vec{D}(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega'\right] =$$

Sedaj vstavimo relacijo $\vec{D}(\omega') = \varepsilon(\omega')\varepsilon_0 \vec{E}(\omega')$:

$$= \varepsilon_0 \iint \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} (-i\omega) \varepsilon(\omega') \vec{E}(\omega) \vec{E}(\omega') \int_{T_1}^{T_2} \exp\left(-i(\omega + \omega')t\right) dt$$

Zadnji integral je pravzaprav enak $2\pi\delta(\omega + \omega')$. Sedaj pošljemo $T_1 \to -\infty$ in $T_2 \to \infty$ in ločeno integriramo po ω in potem še po ω' in seštejemo. Izvedemo še integral po volumnu in dobimo:

$$W(2) - W(1) = \varepsilon_0 \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \mathrm{Im}(\varepsilon(\omega)) \int E(\vec{r}, \omega)^2\, d^3\vec{r}$$

Skratka:

$$\text{Razlika energij} \propto \ \mathrm{Im}(\varepsilon(\omega))$$

8.7 Modeli $\varepsilon(\omega)$

8.7.1 Gibalna enačba za vezan naboj

V dielektriku imamo vezane naboje, ki se ne morejo poljubno gibati po snovi. Problem bomo obravnavali klasično. Pišemo pravzaprav 2. Newtonovo enačbo. Prvi člen je za dispiacijo, naslednji je vezanost v harmonski potencial in zadnji je vpliv zunanjega polja:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -n\gamma\dot{\vec{r}} - m\omega_0^2 \vec{r} + e\vec{E}$$

Uporabimo Fourierevo transformacijo:

$$-m\omega^2 \vec{r}(\omega) = -m\gamma(-i\omega)\vec{r}(\omega) - m\omega_0^2 \vec{r}(\omega) + e\vec{E}(\omega)$$

Rešitev tega problema se glasi:

$$\vec{r}(\omega) = \frac{e}{m} \frac{\vec{E}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

Torej:

$$\vec{P}(\omega) = e\vec{r}(\omega)n \Rightarrow \vec{P}(\omega) = \frac{e^2 n}{m} \frac{\vec{E}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

kjer je n volumnska številska gostota. Velja pa tudi $\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0(\varepsilon(\omega) - 1)\vec{E}(\omega)$. Tako dobimo **splošno frekvenčno odvisnost**:

$$\varepsilon_0(\varepsilon(\omega) - 1) = \frac{e^2 n}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega}$$

Opisana odvisnose se večkrat uporablja v približkih
i) **Debyeva relaksacija (zanemariš ω^2)**
Tišično ustreza relaksaciji dipolnih momentov v molekulah ($\omega \sim 10^9\ \mathrm{s}^{-1}$).

$$\vec{P}(\omega) = \frac{e^2 n}{m\omega_0^2} \frac{\vec{E}(\omega)}{1 - i\omega\tau} \qquad \tau = \frac{\gamma}{\omega_0}$$

ii) **Lorentzova relaksacija (upošteva vse člene)**
Tipično nihanje molekul ($\omega \sim 10^{12}\ \mathrm{s}^{-1}$).

$$\varepsilon_0(\varepsilon(\omega) - 1) = \frac{(\varepsilon(0) - 1)\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

iii) **Plazemska relaksacija ($\omega_0 \to 0$ delci so prosti in $\gamma \to 0$ ni dušenja)** Elektroni v snovi, ki so prosi ($\omega \sim 10^{16}\ \mathrm{s}^{-1}$)

$$\vec{P}(\omega) = -\frac{e^2 n}{m} \frac{\vec{E}(\omega)}{\omega^2}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega} \qquad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$$

kjer je ω_p plazemska frekvenca.
V realnih snoveh imamo lahko več virov vezave in s tem tudi dispiacije. Odziv snovi je tako superpozicija vseh teh efektov. Recimo za vodo se uporabi Debyjevo relaksacijo pri nizkih frekvencah in Lorentzevo za višje.