Stabilnost povratne zanke

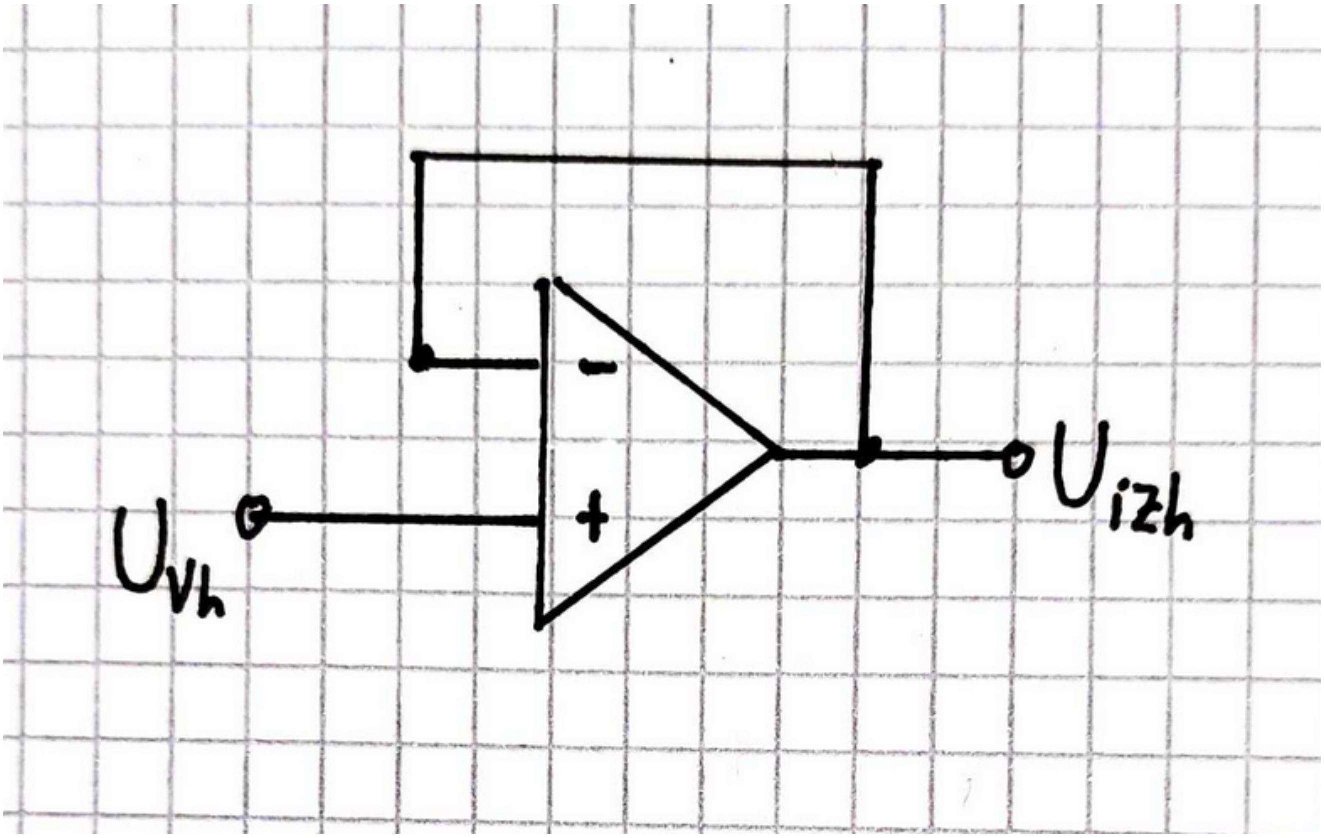
Optimalen merilni sistem sestaja iz partikularne zgradbe, ki je prilagojena dinamiki opazovanega sistema. Ima spremenljiv ojačevalni faktor inovacije $K(t)$. To je recimo povratna zanka. Spomni se inovacije:

$$K(z - Hx)$$

Realen merilni sistem pa je senzor določenega reda, ki ima konstanten ojačevalni faktor K in je univerzalen, a neoptimalen (tranzienti, napake, offset oz. sistematična napaka). Ohranjamo princip povratne zanke s primernim dušenjem.

[Zgled: Električni merilni sistem]

Želimo nekaj kar je dovolj hitro in stabilno. Sestavili bomo **napetostni sledilnik** (angl. tudi unity gain amplifier). Shematično ga predstavimo takole:



Prenosna funkcija je:

$$H(s) = \frac{\alpha(1 + \frac{2\xi s}{\omega_0})}{1 + \frac{2\xi s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega^2}}$$

Označimo z H_{OZ} prenosno funkcijo odprte zanke in z H_{ZZ} prenosno funkcijo zaključene zanke. Za povratne zanke:

$$H(s)(z - x) = x$$

$$Hz = (H + 1)x$$

$$\Rightarrow H_{ZZ} = \frac{x}{z} = \frac{H}{1 + H}$$

Vidimo, da je to nestabilno, ko gre $H \to -1$. Lahko zapišemo:

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{i\varphi(i\omega)}$$

Radi bi izračunali za kateri kot φ nam to da nestabilnost:

$$\backslash\text{tg}\varphi = \frac{\text{Im}\, H(i\omega)}{\text{Re}\, H(i\omega)} \quad \Rightarrow \quad \varphi \pm \pi$$

Pri našem zgledu, kjer želimo **unity gain**:

$$\left(\frac{x}{z}\right)_{OZ} \xrightarrow{\omega \to 0} A_{DC} = 10^6$$

$$\left(\frac{x}{z}\right)_{OZ} \xrightarrow{\omega \to \infty} A_{DC} = 0$$

$$\left(\frac{x}{z}\right)_{ZZ} \xrightarrow{\omega \to 0} A_{DC} = 1$$

$$\left(\frac{x}{z}\right)_{ZZ} \xrightarrow{\omega \to \infty} A_{DC} = 0$$

Stabilnost bomo preverili z delnimi valovi, ki potujejo skozi sistem z negativno povratno zanko. Gledamo pri frekvencah, kjer je faza $\pm\pi$ ker bo tam $H(i\omega) \to -1$. Potrebujemo še $f = |H(i\omega)|$. Za **0. prehod** velja:

$x = f \cdot z$ Poglejmo **1. prehod** oz. val, ki se vrne:

$$z - (fz) = z + fz = (1+f)z$$

potem to iterativno uporabimo za **2. prehod**:

$$z - (-(1+f)fz) = z + fz + f^2 z = z(1 + f + f^2)$$

Počasi vidimo vzorec:

$$x = (1 + f + f^2)fz \quad \Rightarrow \quad z(1 + f + f^2 + f^3)$$

Tako da lahko kar za n**-ti prehod** zapišemo:

$$x = z(f + f^2 + \ldots + f^n)$$

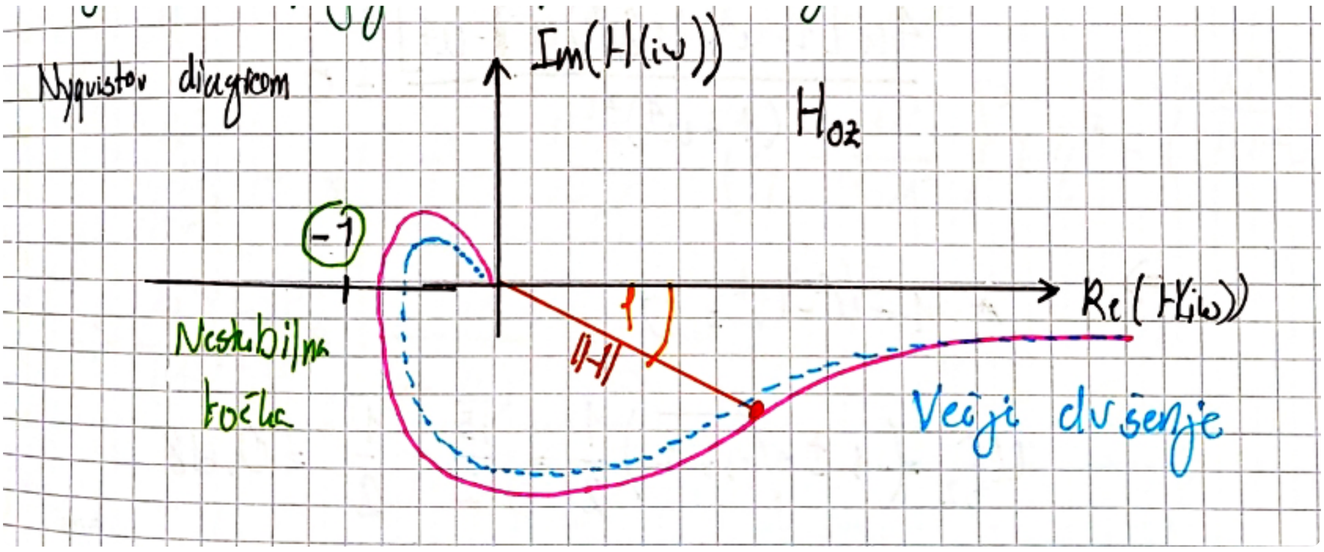
Ta vsota pa konvergira za $f < 1$ in sicer takole:

$$\sum_{k=1}^{n} f^k = \frac{1 - f^n}{1 - f}$$

In od tod smo dobili **stabilnostni kriterij!** $f < 1$ pri frekvencah kjer je zamik $\varphi = 180\degree$. Z drugimi besedami ojačevalni faktor odprte zanke pri frekvenci kjer je $\varphi(\omega_0) = \pi$ mora biti manjši od 1.

Pogoj za dušenje

Potrebujemo še pogoj za primerno dušenje. Lahko si pomagamo z **Nyquistovim diagramom**, ki izgleda takole:



Zanima nas kakšen je optimalen sistem 2. reda. Označimo $u = \omega/\omega_0$ in se spomnimo, da je optimalen $\xi = 1/\sqrt{2}$. Torej:

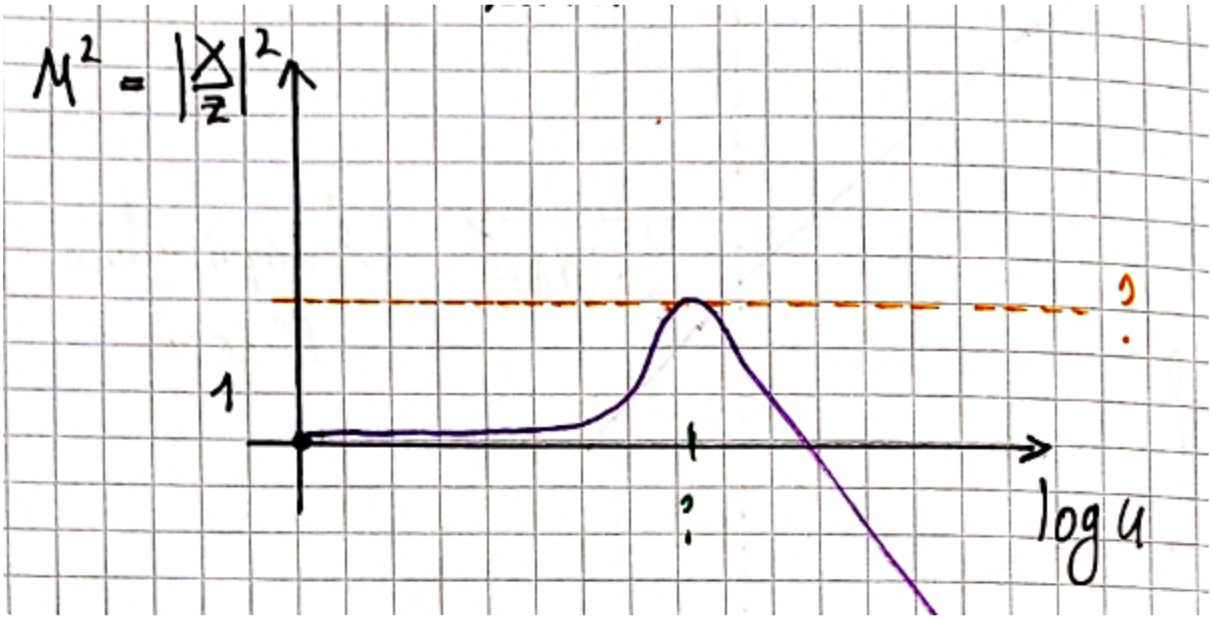
$$(\frac{x}{z}) = \frac{1+\frac{2\xi s}{\omega_0}}{1+\frac{2\xi s}{\omega_0}+\frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

$$\left|\frac{x}{z}\right|^2 = \frac{1+4\xi^2(\omega/\omega_0)^2}{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2+4\xi^2(\omega/\omega_0^2)^2} =$$

$$= \frac{1+2u^2}{(1-u^2)^2+2u^2} = \frac{1+2u^2}{1-2u^2+u^4+2u^2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x}{z}\right|^2 = \frac{1+2u^2}{1+u^4} = M^2$$

Narišimo zdaj graf tega in pazi na logaritmično skalo u na x osi:



Zanima nas kje je maksimum in kolikšna je vrednost, torej kar po klasiki:

$$\frac{dM^2}{du} = 0$$

$$\frac{dM^2}{du} = \frac{-1(1+2u^2)4u^3}{(1+u^4)^2} + \frac{(1+u^4)4u}{(1+u^4)^2} =$$

$$= \frac{4u\left[1+u^4-(1+2u^2)u^2-u^4\right]}{(1+u^4)^2}$$

$$\Rightarrow 1-u^2-u^4=0$$

$$u_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{q+4}\right) = 0.618$$

Torej imamo maksimum pri $u = \sqrt{0.618} = 0.786$. Torej je potem:

$$M^2(u=0.786) = 1.62$$

in iz tega dobimo **pogoj!** Za primerno dušenje mora imeti:

$$M_{OZ} \leq 1.3$$

Z drugimi besedami, takrat se približamo optimalnemu sistemu 2. reda, je to velja za vsako frekvenco ω.

Nazaj k našem primeru

Poglejmo si zdaj kako je z našo zanko. Za zaključeno zanko je:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2_{ZZ} = M^2 = \left|\frac{H}{1+H}\right|^2 = \left|\frac{\mathrm{Re}\,H + i\,\mathrm{Im}\,H}{1+\mathrm{Re}\,H + i\,\mathrm{Im}\,H}\right|$$

Označimo $\xi = \mathrm{Re} H$ in $\eta = \mathrm{Im} H$:

$$M^2 = \frac{\xi^2+\eta^2}{(1+\xi)^2+\eta^2}$$

$$M^2(1+\xi)^2 + M^2\eta^2 = \xi^2+\eta^2$$

$$M^2(1+2\xi+\xi^2) + M^2\eta^2 = \xi^2+\eta^2$$

$$M^2 + 2M^2\xi + M^2\xi^2 + M^2\eta^2 = \xi^2+\eta^2$$

$$M^2 = \xi^2(1-M^2) + \eta^2(1-M^2) - 2M^2\xi$$

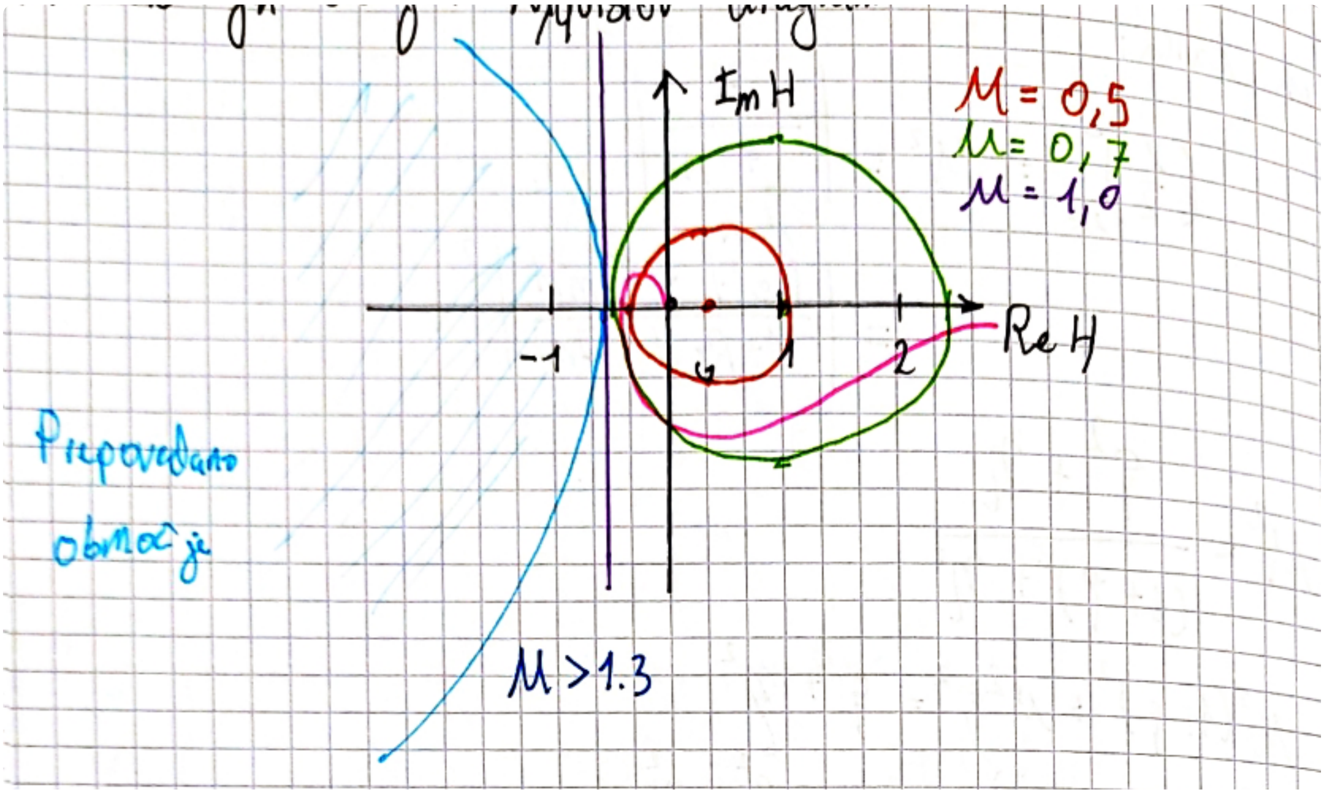
$$\frac{M^2}{1-M^2} = \xi^2 + \eta^2 - \frac{2\xi M^2}{1-M^2} = \left(\xi - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + \eta^2 - \left(\frac{M^2}{1+M^2}\right)^2$$

$$\frac{M^2(1-M^2)}{(1-M^2)^2} + \frac{M^4}{(1-M^2)^2} = \left(\xi - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + \eta^2$$

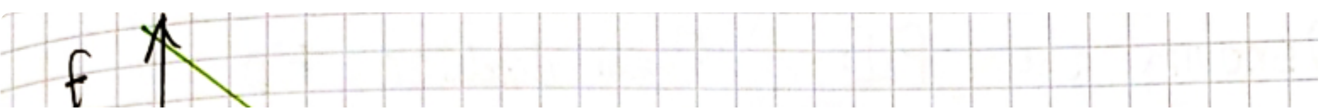
in tako pridemo do pogoja:

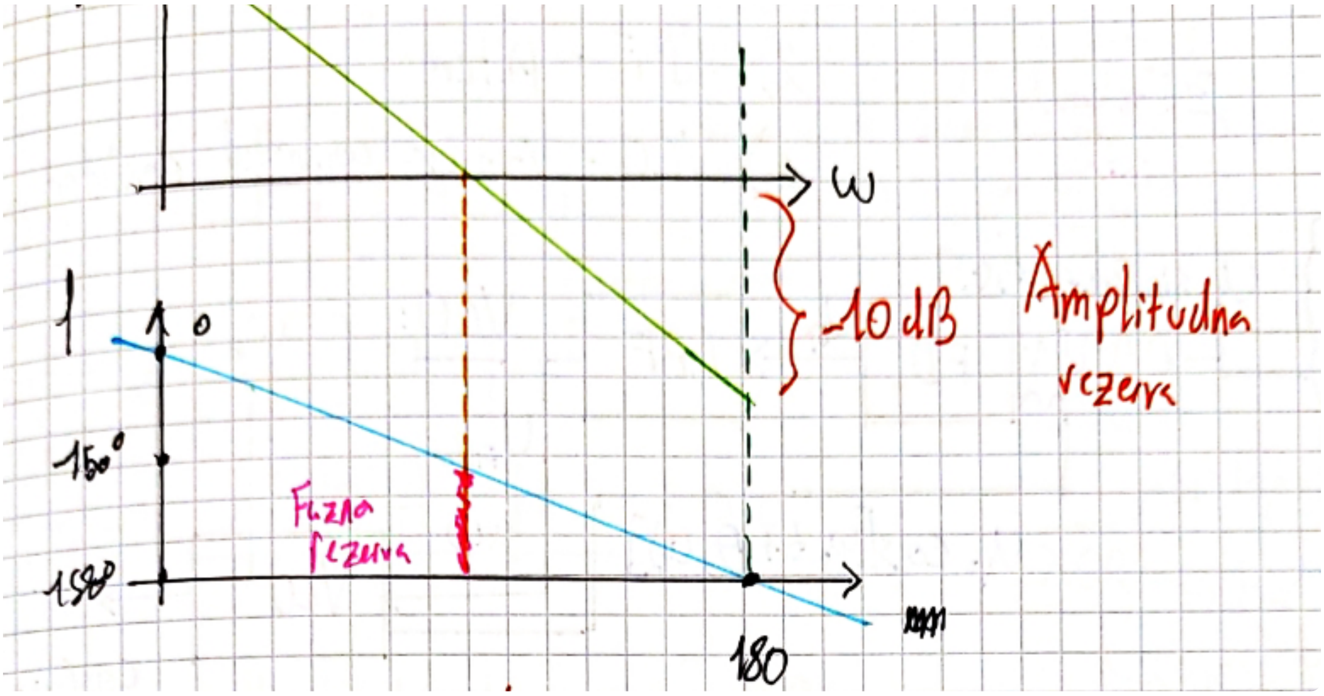
$$\left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2 = \left(\xi - \frac{M^2}{1-M^2}\right)^2 + \eta^2$$

Ker je $M = \mathrm{konst.}$ so enačbe krožnice s polmerom $\frac{M}{1-M^2}$ in premikom $\xi \to \frac{M}{1-M^2}$. To bi bilo dobro narisati v Nyquistov diagram:



Pri $|H| = 1$ imamo lahko fazni zamik tam $\sim 150\degree$. Ker smo toliko računali si zaslužimo še en graf in sicer takole.





Oh, ker se tam slabo vidi.. **piše**: Amplitudna rezerva. Od točke kjer pa zgornji graf seka x-os imamo pa na spodnjem nekaj fazne rezerve do $180\degree$, kake $\sim 30\degree$.