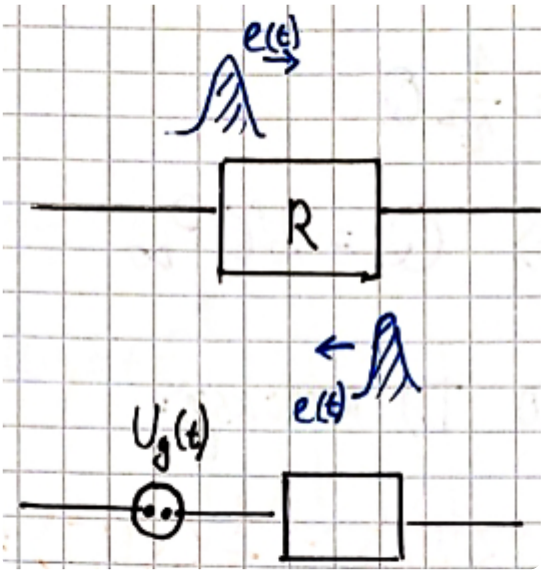
Termični šum na uporniku

Po prevodniku proti uporu se premika nek naboj (to je tok).

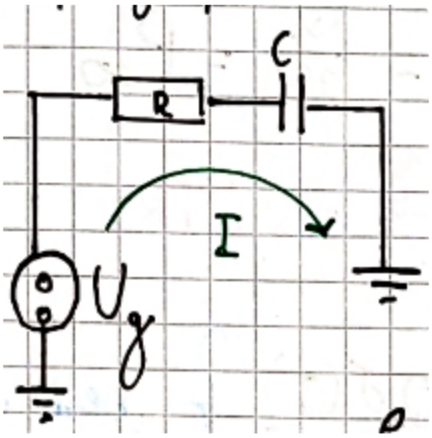


Poglejmo, kaj se zgodi. Napišimo:

$$\frac{de}{dt} = I(t) \qquad U_g(t) = IR$$

$$\langle U_g(t) \rangle = 0 \qquad \langle U_g^2(t) \rangle \neq 0$$

Huh? Zanimivo. Kaj pa je potem? Predstavljajmo si takšno vezje:



In kot je navada zapišimo:

$$U_g - IR - \frac{e}{C} = 0$$

$$e = CU_C \qquad \frac{de}{dt} = C\dot{U}_C \qquad \tau = RC$$

Radi bi prišli do Kalmanove dinamike! Poskusimo:

$$U_g - U_C = RC\dot{U}_C$$

$$\Rightarrow \dot{U}_C = -\frac{1}{\tau}U_C + \frac{U_g}{\tau}$$

Uspelo je! To je Kalmanova dinamika za U_C kjer je U_g dinamični šum. Veljalo bo potem, da je $\langle \hat{U}_C \rangle = 0$ in da je kovariančna matrika $\langle \hat{U}_C^2 \rangle = P$. Poglejmo si razvoj kovariance:

$$\dot{P} = 2AP + \Gamma Q \Gamma^\intercal = -\frac{2}{\tau}P + \frac{1}{\tau^2}Q$$

Sedaj pa zahtevamo, da je $\dot{P} = 0$ ko gre $t \to \infty$:

$$\frac{2}{\tau}P = \frac{1}{\tau^2}Q \quad \Rightarrow \quad Q = 2\tau P_\infty$$

Poglejmo si še termodinamično ravnovesje. Imamo samo eno prostostno stopnjo (to je normalna smer na plošče kondenzatorja), torej je:

$$\langle W_C \rangle = \frac{1}{2}C\langle U_C^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

$$\Rightarrow \langle U_C^2 \rangle = \frac{kT}{c} = \frac{Q}{2\tau} = P_\infty \quad Q = \frac{2kT\tau}{C} = 2kTR$$

Dinamičen šum

Privzamemo, da je šum beli šum (torej popolnoma nekoreliran):

$$\langle U_g(t) U_g(t+\tau) \rangle = Q\delta(T)$$

Dejmo za občutek oceniti ta šum. Vzemimo upor $R = 1\mathrm{M\Omega}$, značilni čas $\tau = 1\mu$s in temperaturo $T = 300\mathrm{K}$:

$$\sqrt{P} = \sqrt{\langle U_C^2 \rangle} = \sqrt{2 \cdot 1.38 \cdot^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} 300\,\mathrm{K} \frac{1}{10^{-6}\,\mathrm{s}} 10^6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}} =$$

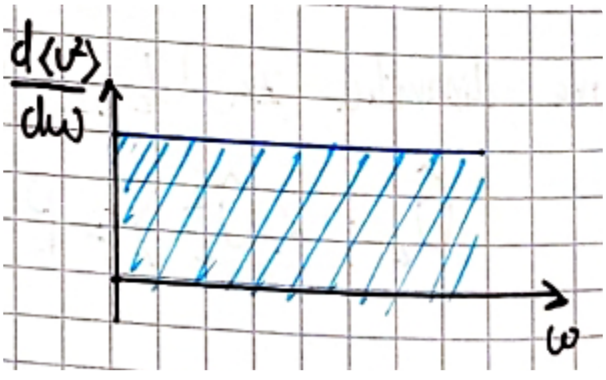
$$= \sqrt{8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{V}^2} \approx 10\,\mu\mathrm{V}$$

Spektralna gostota dinamičnega šuma

Kar smo mi napisali je, da pravzaprav velja:

$$\langle U_g(t) U_g(t+\tau) \rangle = \mathrm{konst.}\ \delta(t)$$

Če bi to res veljalo, bi bila moč šuma neskončna. Če narišemo spektralno gostot:



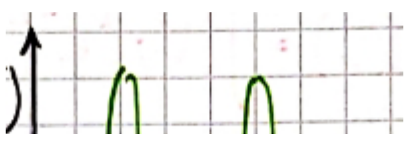
Že iz slike je jasno, da integral, ki integrira ploščino tega spektra divergira. Matematično povedano:

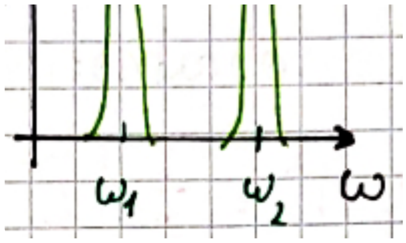
$$P = \int_0^\infty \frac{d\langle U^2 \rangle}{d\omega}\, d\omega \to \infty$$

Če je koga slučajno zanimalo, pridemo do tega kar z odvajanjem predpisa za moč. Takole:

$$P = \frac{\langle U^2 \rangle}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{d\omega} = \frac{1}{R}\frac{d\langle U^2 \rangle}{d\omega}$$

Tega problema se rešimo tako, da **posamezne frekvence obravnavamo neodvisno**. Grafično prikazano takole:





Matematično pa takole:

$$U = U_0(\omega_1)\cos(\omega_1 t) + U_0(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \delta)$$

Če naredimo potem povprečen kvadrat:

$$\langle U^2\rangle = U_0^2(\omega_1)\cdot\frac{1}{2} + U_0^2(\omega_2)\cdot\frac{1}{2} + \langle U_0(\omega_1)U_0(\omega_2)\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t+\delta)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}U_0^2(\omega_1) + \frac{1}{2}U_0^2(\omega_2)$$

Tu zadnji člen odpade ravno zato, ker frekvence obravnavamo **neodvisno**.

Wiener-Khinchinov izrek

Wiener-Khinchinov izrek pravi takole (na grobo):

Spektralna gostota šuma je enaka Fourierevi transformaciji njegove avtokorelacijske funkcije.

Dokaz:

Prvo napišimo avtokorelacijsko funkcijo:

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)U(t+\tau)\,dt$$

in spomnimo se Fouriereve transformacije:

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_\nu e^{-2\pi i\nu t}\,d\nu \qquad U^\star(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\nu'}^\star e^{+2\pi i\nu' t}\,d\nu'$$

Če to združimo vse skupaj:

$$\Rightarrow c(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_{\nu'}^\star U_\nu e^{2\pi i\nu' t}e^{-2\pi i\nu t}e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu'\,d\nu\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U_{\nu'}^\star U_\nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\nu'-\nu)}\,dt\; e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu'\,d\nu$$

Tu smo dobili vmes eno od integralskih definicij delta funkcije. Spomni se:

$$\delta(\nu-\nu') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\nu'-\nu)}\,dt$$

Ob upoštevanju te delta funkcije dobimo tale predpis:

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} |U_\nu^2| e^{-2\pi i\nu\tau}\,d\nu$$

Oz. obratno, kar bo nam prišlo takoj prav:

$$|U_\nu^2| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}c(\tau)\,d\tau$$

V našem primeru je potem to takole:

$$\frac{d\langle U^2\rangle}{d\omega} = \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\langle U(t)U(t+\tau)\rangle e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

in sedaj ob upoštevanju rezultata, ki ga še nimamo (aka Black Magic) ugotovimo, da je:

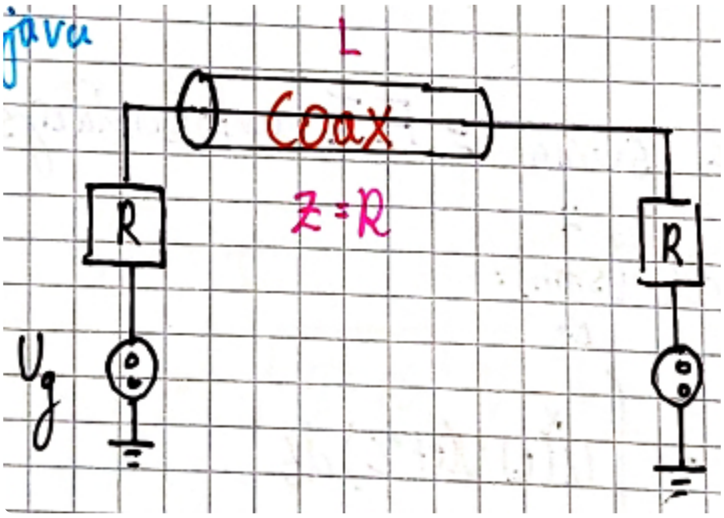
$$\langle U(t)U(t+\tau)\rangle = 2kTR\delta(\tau)$$

Ta rezultat nam bo dala **Nyquistova izpeljava** v naslednjem poglavju. Ampak ob privzetku, da to že imamo, smo dokazali Wiener-Khinchinov izrek:

$$\Rightarrow \frac{d\langle U^2\rangle}{d\omega} = \frac{2kTR}{\tau} = \text{konst.}$$

Nyquistova izpeljava

Nyquist je imel tak eksperimentalen setup:



Zanima nas **število rodov v koaksialnem kablu na enoto frekvence** $\frac{dn}{d\omega}$. Koaksialni kabel je dolg L in ima upornost $Z = R$. Kaj velja?

$$c = \lambda\nu \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}c$$

in potem dolžino lahko zapišemo kot:

$$L = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega}c = \frac{n\pi c}{\omega}$$

$$\Rightarrow n = \frac{\omega L}{\pi c}$$

in če to diferenciramo dobimo to kar smo želeli:

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{L}{\pi c}$$

Poglejmo zdaj energije na stanja. Zapišemo **Bose-Einsteinovo porazdelitev** za zasedenost stanj pri temperaturi T:

$$\varepsilon(\omega) = \hbar\omega\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}$$

Zapišimo potem povprečno energijo potujočega signala. Spomni se, da je **energija potujočega enaka pol energiji stoječega valovanja**. (Tu je zopet zvezek nekoliko pomanjkljiv..)

$$dP = Rd\langle I^2\rangle = \frac{1}{2}\frac{C}{L}\frac{C}{\pi c}\,d\omega\cdot\varepsilon(\omega)$$

Tu lahko zamenjamo tok za napetost takole:

$$I = \frac{U}{2R} \quad \rightarrow \quad \langle I^2\rangle = \frac{\langle U^2\rangle}{4R^2} \quad \rightarrow \quad d\langle I^2\rangle = d\langle U^2\rangle\frac{1}{4R^2}$$

Tako dobimo potem:

$$R\frac{d\langle U^2\rangle}{4R^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\,d\omega\,\hbar\omega\left(\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}\right)$$

To pa zdaj lahko pogledamo v dveh primerih. Za **visoke frekvence** je to enako 0. Za nizke frekvence $\hbar\omega \ll kT$ pa lahko razvijemo porazdelitev v:

$$\varepsilon(\omega) \approx \frac{1}{1+\frac{\hbar\omega}{kT}-1}$$

Od tod dobimo za **nizke frekvence**:

$$R\frac{d\langle U^2\rangle}{4R^2} = \frac{2}{\pi}\hbar\omega\frac{kT}{\hbar\omega}R = \frac{2kTR}{\pi}$$

Pri $\hbar\omega = kT$ je cutoff frekvenca nekje $10^{13}-10^{14}\mathrm{Hz}$, torej lahko precej dobro rečemo, da je konstanta zelo dober približek. Povzeto:

$$\frac{d\langle U^2\rangle}{d\omega} = \frac{2kTR}{\pi} \qquad \hbar\omega \ll kT$$

$$\frac{d\langle U^2\rangle}{d\omega} = 0 \qquad \hbar\omega \gg kT$$

Širjenje termičnega šuma skozi linearno vezje

Poglejmo sedaj kako se širi termični šum skozi vezje, ki je sestavljeno iz linearnih elementov. Zamislimo si vezje kjer izmenična vhodna napetost $U(i\omega)$ napaja RC člen. Za izhodno napetost velja:

$$U_{out}(s) = H(s)U(s) \quad \Rightarrow \quad U_{out}^2(i\omega) = |H(i\omega)|^2 U^2(i\omega)$$

in ker nas zanima širjenje si poglejmo časovni odvod povprečnega kvadrata izhodne napetosti:

$$\frac{d\langle U_{out}^2(i\omega)\rangle}{d\omega} = |H(i\omega)|^2\frac{d\langle U^2(i\omega)\rangle}{d\omega}$$

in kot smo si v prejšnjem poglavju izpeljali, **za upornik** velja:

$$\frac{d\langle U_{out}^2(i\omega)\rangle}{d\omega} = \frac{2kTR}{\pi}|H(i\omega)|^2$$

Temu pravimo **Nyquistov izrek!**

Oz. kot bomo pokazali velja tudi slednje:

$$\mathrm{Re}\,(Z_{out}) = R\cdot|H(i\omega)|^2$$

tako da je ekvivalenten zapis tudi tale:

$$\frac{d\langle U^2\rangle}{d\omega} = \frac{2kT}{\pi}\mathrm{Re}\,(Z_{out})$$

Nekaj na hitro o vhodnih in izhodnih impedancah

Tu smo omenili nek neznan Z_{out} ampak koliko pa znaša ta? Predstavljajmo si, da imamo neko neznano vezje, ki ima vhod U_{in} in izhod U_{out}. Po Theveninovem izreku ga nadomestimo z generatorjem napetosti U_{out} in notranjim uporom Z_{out}.

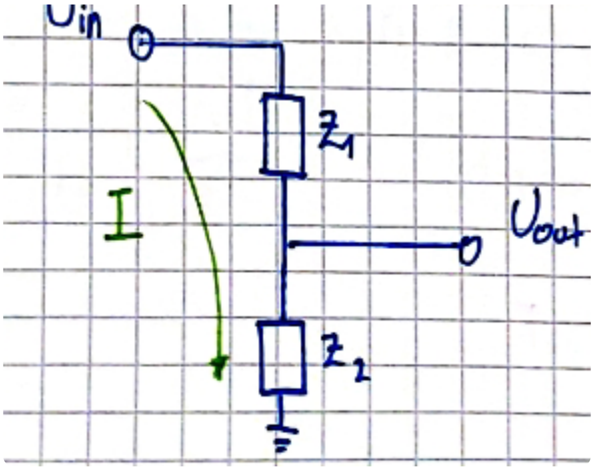
Preden si pogledamo napetostni delilnik bi rad izpostavil nekatere oznake tu.. Profesor je bil malenkostno inkonsistenten in nisem popolnoma prepričan, če so vse količine pravilno indeksirane. Načeloma:

$$\mathrm{OC} \quad \Rightarrow \quad \text{open circuit}$$

$$\mathrm{SC} \quad \Rightarrow \quad \text{short circuit}$$

Napetostni delilnik

Napetostni delilnik je vezje, ki ga sestavimo iz dveh uporov. Shematično ga prikažemo takole:



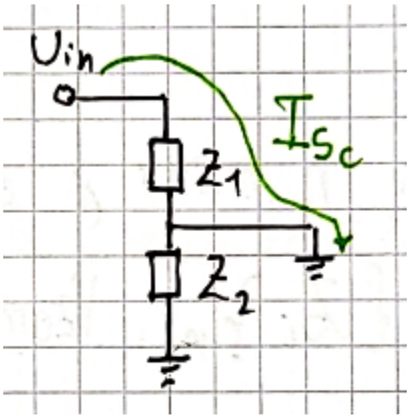
Zapišemo, kot je navada:

$$U_{in} = Z_{in} I_1 \qquad Z_{in} = \sum Z_i = Z_1 + Z_2$$

Skupaj dobimo prvo enačbo:

$$\Rightarrow U_{out} = I_1 Z_2 = \frac{U_{in} Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Poglejmo zdaj kaj se zgodi, če imamo kratek stik:



Takrat pa veljajo:

$$Z_{out} I_{SC} = U_{out}$$

in

$$I_{SC} = \frac{U_{in}}{Z_1}$$

Zdaj pa dajmo skupaj enačbe (1), (2) in (3):

$$U_{out} = Z_{out} I_{SC} = \left(\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) Z_1 I_{SC} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right)^{-1} I_{SC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z_{out}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \qquad Z_{in} = \sum_i Zi$$

In smo izračunali kako se dobi vhodno in izhodno impedanco vezja!

RC-člen

Imejmo preprosti RC člen kjer generator napetost priključimo na upor R, ki ga vežemo na kondenzator C, ki je vezan na zemljo. Če izračunamo izhodno impedanco:

$$Z_{out} = \left(\sum_i Z_i^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + i\omega C\right)^{-1} = \frac{R(1 - i\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(Z_{out}\right) = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = R|H(i\omega)|^2$$