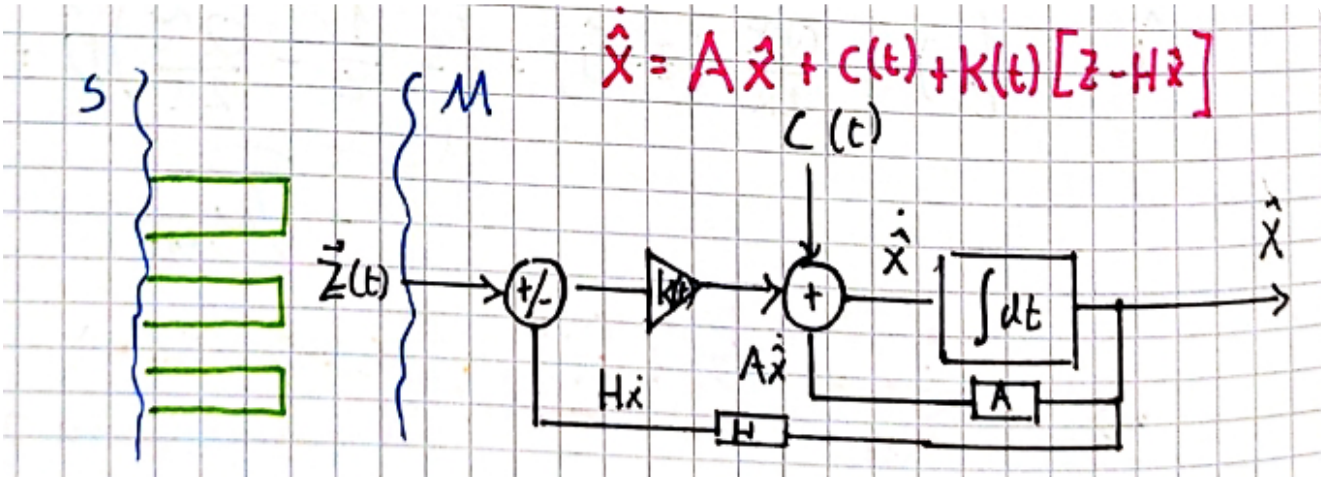
Senzorji

Poenostavitve Kalmanove sheme in povratna zanka

Imamo Kalmanovo shemo, shematično prikazano takole:



$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + C(t) + K(t)[z - X\hat{x}]$$

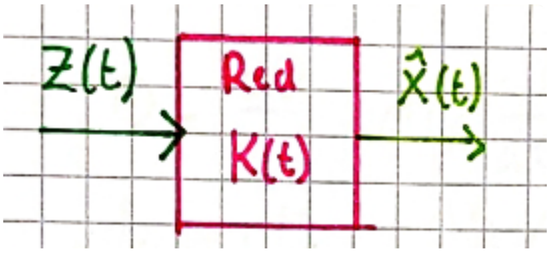
Zadnji člen nam meri stopnjo sinhronizacije med sistemoma S in M. Kadar sta S in M usklajena je lahko K **karkoli**. To pomeni, da bo tudi K_∞ čisto dober.

Senzor kot univerzalni merilni sistem

Poglejmo si senzor. Kaj si želimo od njega?

1. Na izhodu senzorja naj bo napetost $\hat{x} = U(t)$
2. Naj bo odvisen samo od ene količine x
3. Senzor naj sam odpravi lim več merilnega šuma
4. Senzor naj čim manj vpliva nazaj na opazovani sistem
5. Naj velja $\hat{x}(t) = U(t)$, torej naj bo berljiva količina

Senzor povezuje $z(t)$ in $\hat{x}(t)$ preko diferencialne enačbe. Shematično to ponazorimo z:



Red senzorja

Red senzorja definiramo kot **red diferencialne enačbe**, ki povezuje $z(t)$ in $\hat{x}(t)$

Ekvivalentna definicija bi bila, da senzor u-tega reda $(u > 0)$ obravnavamo kot optimalen sledilni sistem za spremenljivke $\vec{x}(t)$ v sistemu S katerih dinamika se spreminja kvečjemu kot:

$$\frac{d^{(u)}}{dt^{(u)}} x(t) = 0 + W(t)$$

Pomožen komentar: Spomni se termometra, ki se greje pod pazduho. Ta ima vedno nekololikšen zamik. Če bi bila temperatura ne-linearno odvisna (ampak recimo kvadratno, ali pa kubično) bi lahko temperatura čisto "pobegnila" termometru.

Senzor 1. reda

V realnem sistemu S imamo:

$$\dot{x} = W(t) \qquad \langle W^2 \rangle = Q$$

$$z = x + r(t) \qquad \langle r^2 \rangle = R$$

Kalman za optimalno filtriranje pravi, da mora biti:

$$\dot{x} = 0 - W$$

$$A = 0 \quad C = 0 \quad \Gamma = 1 \quad H = 1$$

V našem modelskem sistemu M pa imamo:

$$\dot{\hat{x}} = K(z - \hat{x})$$

$$\dot{P} = -\frac{P^2}{R} + Q$$

$$K = \frac{P}{R}$$

kjer je $\hat{x}$ **ocena na izhodu senzorja**. Če je ojačevalni faktor konstanten potem gre:

$$K(t) \to K_\infty = \frac{P_\infty}{R}$$

Spet kot nekoč prej, to dobimo tako, da zahtevamo, da je odvod P ničelen:

$$\frac{P_\infty^2}{R} = Q$$

$$\Rightarrow P_\infty = \sqrt{QR} \quad K_\infty \sqrt{\frac{Q}{R}}$$

Sedaj vpeljemo še oznako:

$$\tau = \frac{1}{K_\infty} = \sqrt{\frac{R}{Q}}$$

$$\frac{1}{K_\infty}\dot{\hat{x}} + \hat{x} = z(t)$$

in tako dobimo **diferencialno enačbo 1. reda za senzor 1. reda**:

$$\tau \dot{\hat{x}} + \hat{x} = z$$

To je optimalni indikator za sledenje konstante.

[Zgled: Termometer]

Imejmo termometer v skodelici kave s temperaturo T_z. S termometrom merimo $\hat{T}(t)$. Če si pogledamo en delček stene in zapišemo toplotni tok skozi ploščino S debeline d dobimo:

$$P - S\vec{j} = \frac{\lambda S(T_z - T)}{d}$$

$$P = \frac{dQ}{dt} = mc_p \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dmc_p}{\lambda S}\frac{dT}{dt} = -\frac{\lambda S}{d}(T_z - T)$$

in od tod dobimo **diferencialno enačbo senzorja prvega reda**:

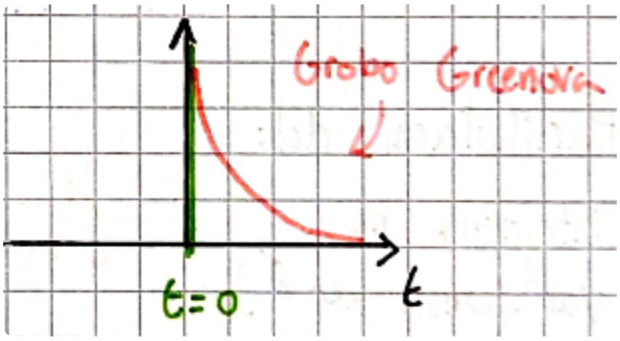
$$K\dot{T} + T = T_z = T_z(t)$$

Zanima nas obnašanje senzorja 1.reda, ko $z(t) \neq \mathrm{konst.}$ Seveda bomo pa zraven pogledali še sistemske napake in prehodna obdobja. Poglejmo si tipične vhode za $z(t)$.

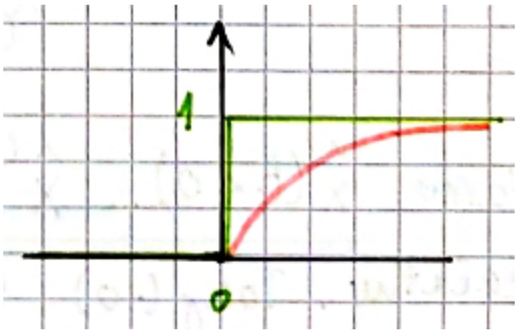
Tipični vhodi za $z(t)$

Greenova funkcija nam pove vse od odziva senzorja in tipa itd.

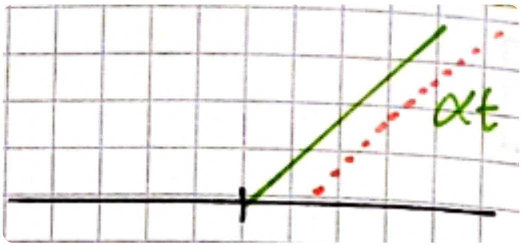
1. $z(t) = \delta(t)$



2. $z(t) = H_0(t)$



3. $z(t) = \alpha t$



4. $z(t) = \cos \omega t$
   Pričakujemo isto frekvenco in fazni zamik, a drugo amplitudo

Poglejmo si podrobneje najprej delta funkcijo. Rešimo diferencialno enačbo. Najprej homogeni del:

$$\tau\dot{\hat{x}} + \hat{x} = 0 \qquad \tau \cdot \frac{d\hat{x}}{dt} = -x$$

$$\hat{x} = Ce^{-\lambda t}$$

$$\tau(-\lambda)Ce^{-\lambda t} + Ce^{-\lambda t} = (-\lambda\tau + 1)e^{-\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\tau} \qquad \hat{x}_H = Ce^{-t/\tau}$$

in še partikularni del. Kar je posebnost tu je, da kar integriramo zaradi delte. Ne delamo variacije konstante.

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \tau \frac{d\hat{x}}{dt}\, dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \hat{x}\, dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt \right]$ Od tega dobimo v prvem členu:

$$\tau[\hat{x}(\varepsilon) - \hat{x}(-\varepsilon)] = 1$$

Drugi člen gre $\to 0$ in zadnji je enak 1. Zahtevamo, da velja:

$$\hat{x}(t<0)\ldots\hat{x}^{(n)}(t<0)=0$$

torej, da je “števec” pri miru na začetku. Torej drugi člen zanemarimo in ostane partikularna rešitev:

$$\Rightarrow \hat{x}_P(0)=\frac{1}{\tau}$$

Poglejmo si še linearen vhod $z(t)=\alpha t$. Homogeni del je seveda isti, torej:

$$\hat{x}_H(t)=Ce^{-t/\tau}$$

Sedaj pa rešimo še partikularni del:

$$\tau\dot{\hat{x}}+\hat{x}=\alpha t$$

Tu si kar pomagamo z nastavkom $\hat{x}_P=At+B$

$$\tau A+At+B=\alpha t \quad\Rightarrow\quad A=\alpha$$

$$A\tau+B=0 \quad\Rightarrow\quad B=-\alpha\tau$$

$$\Rightarrow \hat{x}_P=\alpha t-\alpha\tau$$

Torej je cela rešitev:

$$\hat{x}(t)=\alpha t-\alpha\tau+Ce^{-t/\tau}$$

Tu zahtevamo, da je $x(0)=0$ iz česa sledi $C=\alpha\tau$

$$\hat{x}(t)=\alpha(t-\tau)+\alpha\tau e^{-t/\tau}$$

Torej kot smo videli na sliki imamo na začetku nek eksponentni tranzient in ves čas imamo sistematični zamik. Kaj če bi s tem senzorjem sledili kvadratnem vhodu $z(t)=\beta t^2$?

Potem bi bil sistematičen zamik funkcija časa in bi se večal, kar pomeni, da senzor ne bi sledil.

Senzor 2. reda

V sistemu S imamo slednje: Senzor je optimalen za:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0+W$$

To dinamiko moramo prepisati v sistem linearnih enačb:

$$\dot{x}=v$$

$$\dot{v}=0+W$$

To zapišemo zdaj matrično po enačbi:

$$\dot{x}=Ax+\Gamma x$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\v\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}W$$

Sedaj imamo pa meritev z samo prve komponente, torej je matrika senzorjev:

$$H=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$$

V sistemu M imamo potem:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{v}\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{v}\end{bmatrix} + PH^\intercal R^{-1}(z - H\hat{x})$$

$$P = \begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}$$

Rešiti moramo enačbo:

$$\dot{P} = AP + PA^\intercal + \Gamma Q \Gamma^\intercal - PH^\intercal R^{-1} HP$$

Torej če že kar zmnožimo vse glavne dele skupaj:

$$\dot{P} = \begin{bmatrix}2p_{12} & p_{22}\\ p_{22} & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix} - \frac{1}{R}\begin{bmatrix}p_{11}^2 & p_{11}p_{12}\\ p_{11}p_{12} & p_{22}^2\end{bmatrix}$$

Stacionarne rešitve

Kot prej zahtevamo $\dot{P} = 0$:

$$2p_{12} - \frac{1}{R}p_{11}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{11}^2 = 2R\sqrt{QR}$$

$$p_{22} - \frac{1}{R}p_{11}p_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{22} = \sqrt{2Q}\sqrt{\sqrt{QR}}$$

$$Q - \frac{1}{R}p_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{12} = \sqrt{QR}$$

Poglejmo si ojačevalne faktorje:

$$K_\infty = P_\infty H^\intercal R^{-1}$$

$$K_\infty = \frac{1}{R}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} - \frac{1}{R}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\end{bmatrix}$$

To vodi v enačbi:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{v} + \frac{1}{R}p_{11}(z - \hat{x})$$

$$\dot{\hat{v}} = \frac{1}{R}p_{12}(z - \hat{x})$$

Spravimo to nazaj na enačbo samo ene spremenljivke:

$$\ddot{\hat{x}} = \frac{1}{R}p_{12}(z - \hat{x}) + \frac{1}{R}p_{11}(z - \dot{\hat{x}})$$

$$\Rightarrow \ddot{\hat{x}} + \frac{p_{11}}{R}\dot{\hat{x}} + \frac{p_{12}}{R}\hat{x} = \frac{p_{11}}{R}\dot{z} + \frac{p_{12}}{R}z$$

oz. v standardni obliki:

$$\ddot{\hat{x}} + 2\xi\omega\dot{\hat{x}} + \omega^2\hat{x} = 2\xi\omega\dot{z} + \omega^2 z$$

Dobili smo **diferencialno enačbo 2. reda za senzor 2. reda**, kjer so:

$$\omega^2 = \frac{p_{12}}{R} = \frac{\sqrt{QR}}{R} = \sqrt{\frac{Q}{R}}$$

$$2\xi\sqrt{\frac{p_{12}}{R}} = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{QR}} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Torej je dušilni koeficient $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ optimalen za Kalmanov filter 2. reda. Optimalen je za sledenje linearni dinamiki. Od tu naprej se zna kje pojaviti, da velja $\hat{x} = x$, ker je začel profesor izpuščati to oznako zaradi hitrejšega pisanja.

Greenova funkcija za senzor 2. reda

Naj bo vhod na senzor $z(t) = \delta(t)$. Zanima nas **Greenova funkcija** $G(t)$. Spet bomo integrirali po neki mali okolici ε:

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \ddot{x}\, dt + 2\xi\omega \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \dot{x}\, dt + \omega^2 \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} x\, dt = \omega^2 \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt = \omega^2$$

in sedaj to limitiramo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left([\dot{x}(\varepsilon) - \dot{x}(-\varepsilon)] + 2\xi\omega[x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)] + 0 \right) = \omega^2$$

Sedaj zahtevamo, da je "števec" pri miru na začetku torej, da sta:

$$x(-\varepsilon) = 0 \qquad \dot{x}(-\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(0) + 2\xi\omega x(0) = \omega^2$$

Od tega lahko zaključimo:

$$x(0) = 0 \qquad \dot{x}(0) = \omega^2$$

Rešimo zdaj **homogeni del**. Zapišimo $x = e^{\lambda t}$ da dobimo karakteristični polinom:

$$\lambda^2 + 2\xi\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega \pm \frac{\sqrt{4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\omega[\xi \mp \sqrt{\xi^2 - 1}]$$

Matematiki nam pravijo, da je splošna rešitev potem:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Določimo sedaj ti konstanti:

$$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1$$

$$\dot{x}(0) = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = \omega^2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{\omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Torej je rešitev homogenega dela:

$$x_H(t) = \frac{\omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right]$$

Želimo, da je filter optimalen, torej, da je $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Takrat je:

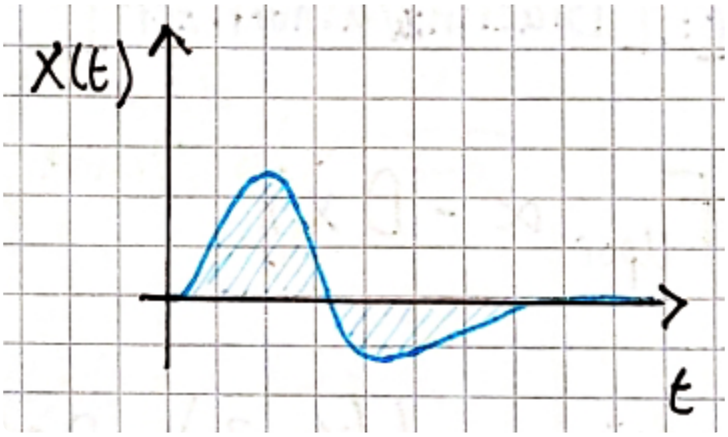
$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2\omega i\sqrt{1 - \xi^2} = 2\omega i \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x(t) = \frac{\omega^2\sqrt{2}}{2\omega i}\left[e^{i\frac{\omega}{\sqrt{2}}t} - e^{-i\frac{\omega}{\sqrt{2}}t}\right] e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}}t}$$

Oz. če to zapišemo s kotnimi funkcijami dobimo:

$$x(t) = \sqrt{2}\omega \sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}t\right) e^{-\frac{\omega}{\sqrt{2}}t}$$

To je **Greenova funkcija za senzor 2. reda!** Skicirano:



Kaj pa če ξ zavzame neoptimalne vrednosti?

Poglejmo si primer, ko ξ ni optimalen. Zapišimo najprej splošno rešitev in potem poglejmo limite:

$$\lambda_{1,2} = -\omega[\xi \mp i\sqrt{1-\xi^2}] \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2\omega\sqrt{\xi^2-1}$$

$$x(t) = \frac{\omega^2}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) =$$

$$= \frac{\omega^2}{2\omega\sqrt{1-\xi^2}}\left[e^{\omega\sqrt{\xi^2-1}\,t} - e^{-\omega\sqrt{\xi^2-1}\,t}\right]e^{-\xi\omega t}$$

Brez dušenja $\xi = 0$

V primeru, ko nimamo dušenja nam ostane:

$$x(t) = \frac{\omega^2}{2i\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\frac{\omega}{\sqrt{1-\xi^2}}t\right)e^{-\xi\omega t} =$$

$$= \omega\sin\omega t$$

Predušen sistem $\xi \gg 1$

V tem primeru pa ostane:

$$x(t) = \frac{\omega}{2\sqrt{\xi^2-1}}[2\omega\sqrt{\xi^2-1}\,t]e^{-\xi\omega t} =$$

$$= \omega^2 t e^{-\xi\omega t}$$

kjer smo razvili po formuli

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sh x$$

[Zgled: Blažilnik/Amortizer]

Imejmo potnika na kolesu, ki je amortizirano z vzmetjo in batom v tekočini. Funkcija $z(t)$ podaja, kakšna je višina terena ob nekem času. Funkcija $x(t)$ pa podaja koliko kot posledica razgibanega terena giblje potnik. Kolo se premika s konstantno hitrostjo v.

Zapišimo viskozno silo:

$$F_{\text{upor}} \propto -D\dot{x}\eta$$

in še ob upoštevanju sile vzmeti zapišimo 2. Newtonov zakon za sistem:

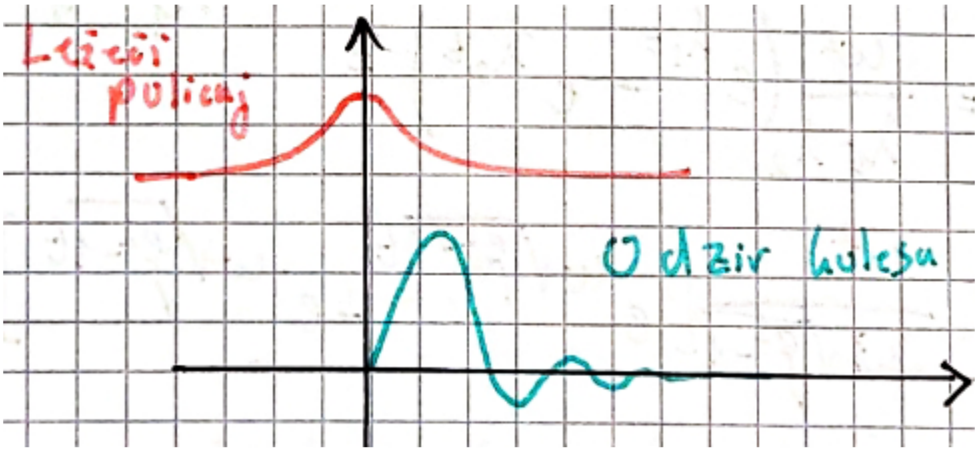
$$\sum F = m\ddot{x} = -k(x-z) - D\eta(\dot{x} - \dot{z})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{D\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} = \frac{D\eta}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z$$

Vidimo, da je amortizer filter 2. reda. Če analiziramo člene:

$$2\xi\omega = 2\xi\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{D\eta}{m} \qquad \Rightarrow \qquad D\eta = \sqrt{2km}$$

Če skiciramo njegov odziv na motnjo, dobimo nekaj takega:



Prenosna funkcija

Prenosna funkcija $H(t)$ je tista, ki "v senzorju" povezuje $z(t)$ in $x(t)$. Ampak prej, malce matematike.

Laplaceova transformacija

Definirajmo Laplaceovo transformacijo kot:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad s \in \backslash\text{Complex}$$

Poglejmo si sedaj nekaj lastnosti za računanje s to transformacijo.

1. $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

1. $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{1}{s-a}$$

1. $\mathcal{L}(f(t)e^{at}) = F(s-a)$

$$\mathcal{L}(f(t)e^{at}) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s-a)$$

1. $\mathcal{L}(\frac{d}{dt} f(t)) = sF(s)$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt} f(t)\right) = \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) e^{-st}\, dt = fe^{-st}\big|_0^\infty + \int_0^\infty se^{-st} f(t)\, dt =$$

$$= f(0) + sF(s) = sF(s)$$

Tu $f(0)$ odpade saj kazalec miruje natanko takrat ko je funkcija enaka 0 ob $t = 0$.

1. $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$
2. $\mathcal{L}(\delta) = 1$
3. $\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
4. $\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

$$\mathcal{L}(\cos\omega t) + i\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{1}{s - i\omega} = \frac{s+\omega}{s^2+\omega^2}$$

Splošna prenosna funkcija senzorja

Imejmo diferencialno enačbo n-tega reda v x in m-tega reda v z:

$$\frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}}x + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}x + \ldots + a_1\frac{d}{dt}x + a_0x = \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}}z + b_{m-1}\frac{d^{(m-1)}}{dt^{(m-1)}}z + \ldots + b_1\frac{d}{dt}z + b_0z$$

Dajmo to transformirati z Laplaceovo transformacijo. Dobimo:

$$\left(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0\right)x(s) = \left(s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0\right)z(s)$$

In tako pridemo do **splošne prenosne funkcije senzorja**:

$$H(s) = \frac{x(s)}{z(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Prenosna funkcija senzorja 1. reda

Vzemimo diferencialno enačbo, ki opisuje dinamiko senzorja 1. reda:

$$\tau\dot{x} + x = z(t)$$

in to transformirajmo s Laplaceovo transformacijo. Kar dobimo je:

$$(\tau s + 1)x(s) = z(s)$$

in tako smo dobili **prenosno funkcijo za senzor 1. reda**:

$$H(s) = \frac{1}{1+\tau s}$$

Prenosna funkcija senzorja 2. reda

Tako kot prej vzemimo diferencialno enačbo, ki opisuje dinamiko senzorja 2. reda:

$$\ddot{\hat{x}} + 2\xi\omega\dot{\hat{x}} + \omega^2\hat{x} = 2\xi\omega\dot{z} + \omega^2 z$$

To zdaj transformirajmo s Laplaceovo transformacijo. Dobimo:

$$\left(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2\right)x(s) = \omega^2 z(s)$$

in ravno tako smo dobili **prenosno funkcijo za senzor 2. reda**:

$$H(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2}$$

Komentar: Tu smo potem na predavanjih še preverili res ekspresno, če dobljeno res deluje in nam pretvori vhodni signal. Izkaže se da seveda ja in da velja kar kot pričakovano:

$$z(s)\cdot H(s) = x(s)$$

Če si kdo to res močno želi pogledati, je tu str 8.

Odziv senzorja na periodične signale [Bodejevi diagrami]

Dajmo na vhod senzorja nek periodičen signal: $z(t) = z_0e^{i\omega t}$

Na izhodu pričakujemo signal:

$$x(t) = x_0e^{i\omega t}e^{i\delta}$$

Prvo si poglejmo, kaj bi lahko bila spremenljivka s v tem primeru. Vzemimo odvod periodičnega signala:

$$\frac{d}{dt}(e^{i\omega t}) = i\omega e^{i\omega t}$$

in to sedaj transformiramo s Laplaceovo transformacijo:

$$s\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = i\omega\mathcal{L}(e^{i\omega t})$$

$$\Rightarrow s = i\omega \quad H(s) = H(i\omega)$$

za periodične signale. Poglejmo kaj še lahko takoj pokažemo

$$H(i\omega)z(i\omega) = x(i\omega)$$

$$H(i\omega)z_0\mathcal{L}(e^{i\omega t}) = x\mathcal{L}(e^{i\omega t})e^{i\delta}$$

$$\Rightarrow |H(i\omega)| = \frac{x_0}{z_0}$$

V splošnem je $H(i\omega) \in \color{red}{\backslash\text{Complex}}$ tako da lahko zapišemo:

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{i\alpha} \qquad \color{red}{\backslash\text{tg}}\alpha = \frac{\text{Im } H(i\omega)}{\text{Re } H(i\omega)}$$

ker velja:

$$|H(i\omega)|e^{i\alpha}z = x_0e^{i\delta} \quad \Rightarrow \quad e^{i\delta} = e^{i\alpha}$$

torej lahko pišemo tudi:

$$\color{red}{\backslash\text{tg}}\delta(i\omega) = \frac{\text{Im } H(i\omega)}{\text{Re } H(i\omega)}$$

Izkaže se da v splošnem lahko kakršenkoli $H(i\omega)$ zapišemo kot kombinacijo prenosnih funkcij 1. in 2. reda:

$$H(i\omega) = \frac{\prod_i (1 + i\omega\tau_i) \cdot \prod_j \left(\left(\frac{i\omega}{\omega_j}\right)^2 + \frac{2\xi_j i\omega}{\omega_j} + 1\right)}{\prod_k (1 + i\omega\tau_k) \cdot \prod_l \left(\left(\frac{i\omega}{\omega_l}\right)^2 + \frac{2\xi_l i\omega}{\omega_l} + 1\right)}$$

Lahko pišemo tudi:

$$H(i\omega) = \frac{\prod_i |1 + i\omega\tau_i| \cdot \prod_j \left|\left(\frac{i\omega}{\omega_j}\right)^2 + \frac{2\xi_j i\omega}{\omega_j} + 1\right| e^{i\delta_i}\, e^{i\delta_j}}{\prod_k |1 + i\omega\tau_k| \cdot \prod_l \left|\left(\frac{i\omega}{\omega_l}\right)^2 + \frac{2\xi_l i\omega}{\omega_l} + 1\right| e^{i\delta_k}\, e^{i\delta_l}}$$

**Fazni faktor **je torej:

$$\exp i\left[\sum_i \delta_i + \sum_j \delta_j + \sum_k \delta_k + \sum_l \delta_l\right]$$

Razmerje amplitud dobimo preko množenja in deljenja delnih amplitud. **Fazni premik** pa dobimo kot seštevanje in odštevanje faznih zamikov.

Bodejevi diagrami

Definirajmo **decibel** dB kot:

$$20\log|H(i\omega)| = 10\log|H(i\omega)|^2$$

Pazi: Decibel je definiran na enoto **moči**, ne amplitude!

Sedaj lahko definiramo še dva tipa Bodejevega diagrama. Pri obeh na x osi narišemo $\log(\omega)$. Potem pa:

1.

Pri **Amplitudnem Bodejevem diagramu** narišemo na y os moč v decibelih oz. $20\log{ H(i\omega) }$

2. Pri **Faznem Bodejevem diagramu** narišemo na y os fazni zamik δ

Za sistem 1. reda:

Spomnimo se, da imamo za prenosno funkcijo pri senzorjih 1. reda:

$$H(s) = H(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega\tau} \quad \Rightarrow \quad |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

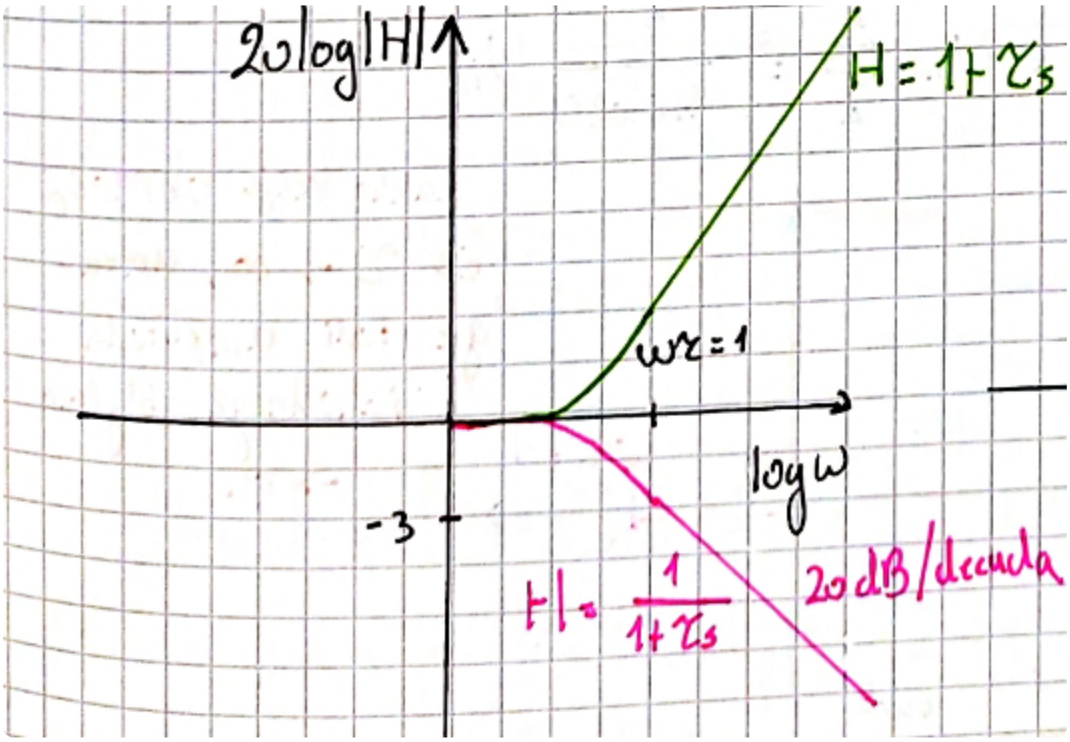
Sedaj si pa poglejmo par smiselnih vrednost:

$$\omega \to 0 \qquad 20\log|H(i\omega)| = 0$$

$$\omega \to \infty \qquad 20\log\left|\frac{1}{\omega\tau}\right| = -20\log\omega\tau$$

$$\omega\tau = 1 \quad \Rightarrow \quad 10\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3$$

Če narišemo, kar smo dobili, zgleda to nekako takole:



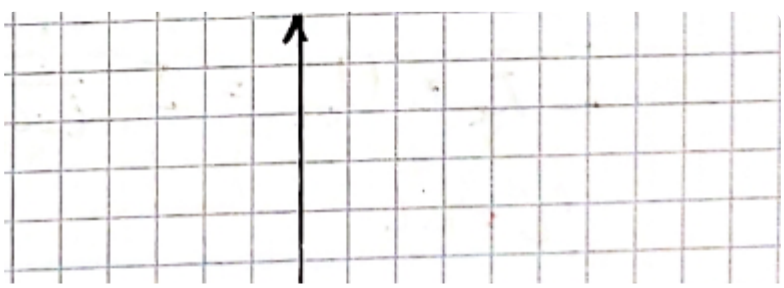
Poglejmo si še smiselne vrednosti za fazni zamik:

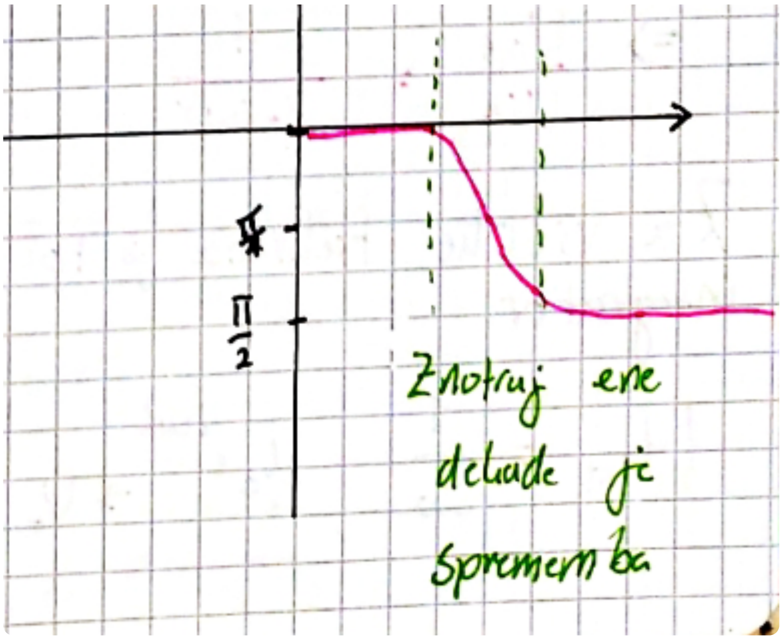
$$\omega \to 0 \qquad \delta = 0$$

$$\omega \to \infty \qquad \delta = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \to 1 \qquad \delta = -\frac{\pi}{4}$$

Dajmo tudi to narisati:



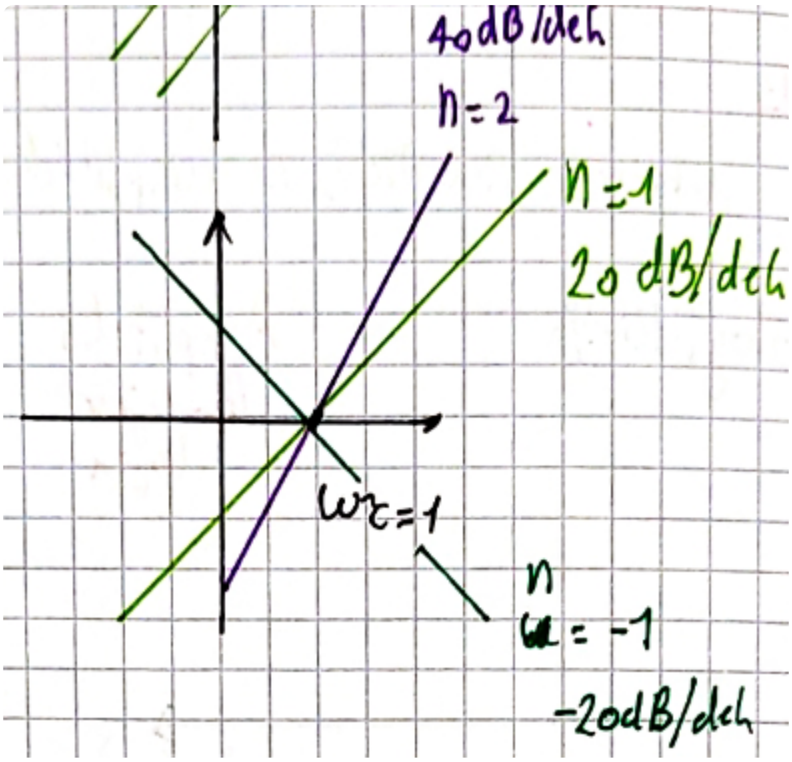


Opazimo, da je vsa sprememba znotraj ene dekade. Poglejmo si na hitro še eno drugo prenosno funkcijo. Recimo, da bi imeli za $n = 1, 2, 3, ..$:

$$H(i\omega) = (i\omega)^n = \omega^n e^{in\frac{\pi}{2}}$$

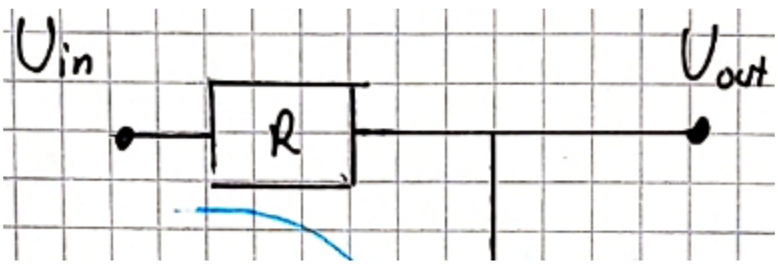
$$\Rightarrow 20 \log |H| = 20n \log \omega$$

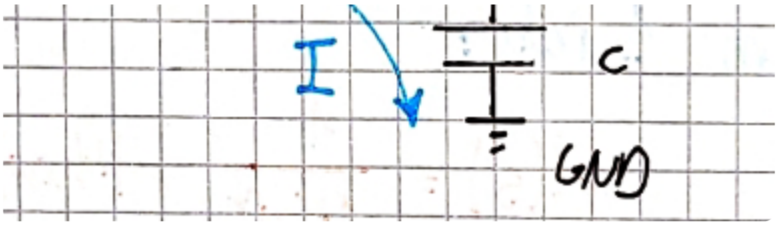
Če si to na hitro skiciramo za različne vrednosti n dobimo nekaj takega:



[Zgled: Low pass filter]

Sestavimo low pass filter iz upora in kondenzatorja. Shematično to zgleda nekaj takega:





Kot ime pravi, ta filter **spušča skozi nizke frekvence**. Dajmo to še poračunat in pokazat v Bodejevem diagramu. Spomnimo se **impedance** in da je to neko število $z \in$ \Complex. Za osnovne komponente velja takole:

$$z_R = R \qquad \text{Upor}$$

$$z_C = \frac{1}{i\omega C} \qquad \text{Kondenzator}$$

$$z_L = i\omega L \qquad \text{Tuljava}$$

Če zapišemo sedaj impedanco za naše RC vezje:

$$z = R + \frac{1}{i\omega C} = \frac{1 + i\omega RC}{i\omega C} \qquad \frac{U_{in}}{z} = I$$

$$Iz_c = U_{out} = I\frac{1}{i\omega C} = U_{in}\frac{z_c}{z} = \frac{1}{1 + i\omega RC}U_{in}$$

Tu uvedemo oznako za karakteristični čas $\tau = RC$ in sledi:

$$\frac{U_{out}}{U_{in}} = H(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau}$$

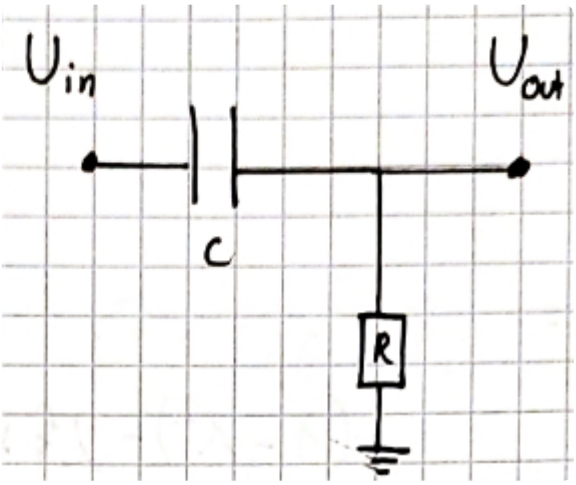
Bodejev diagram pride tak kot za senzor/filter 1. reda, ker točno to smo dobili. Za visoke frekvence **je LPF integrator**, takrat je:

$$H_{int} = \frac{1}{i\omega} \quad \Rightarrow \quad U_0 e^{i\omega t} \to U_0 \frac{1}{i\omega} e^{i\omega t}$$

To velja torej za $\omega\tau \gg 1$ (Fair warning, da je tu source material nekoliko zmeden.) Lahko bi ga uporabljali tudi pri nižjih frekvencah, če bi šel $\tau \to \infty$, ampak gre tudi amplituda izhodnega signala $\to 0$.

High pass filter

High pass filter sestavimo podobno kot low pass filter, le da zamenjamo mesti kondenzatorja in upora. Vseeno, da bo bulletproof je tu shema:



Spet kot ime namiguje, ta filter **spušča skozi visoke frekvence**. Pokažimo to na Bodejevem diagramu. Imamo malo manj dela, ker je impedanca z enaka kot za LPF:

$$z = \frac{1 + i\omega RC}{i\omega C}$$

Če izračunamo prenosno funkcijo zdaj:

$$U_{out} = RI = R\frac{U_{in}}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{out}}{U_{in}} = H(i\omega) = \frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau}$$

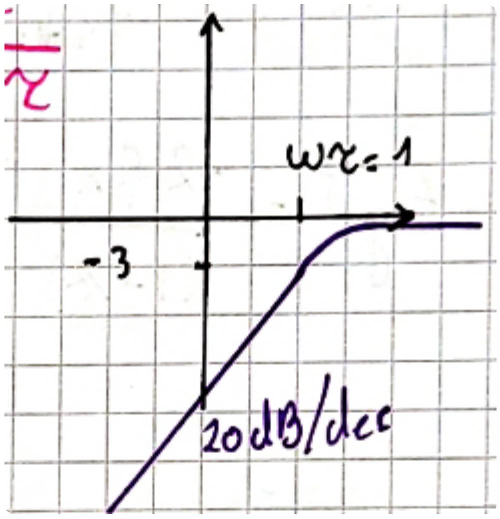
Da bomo lažje narisali poglejmo nekaj tipičnih vrednosti:

$$\omega\tau \to 0 \qquad 20\log|H| \to -\infty$$

$$\omega\tau \to \infty \qquad 20\log|H| \to 0$$

$$\omega\tau = 1 \quad \Rightarrow \quad 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3$$

Če si to zdaj narišemo, dobimo kot prezrcaljeno sliko LPF, kar je točno prav!



Ta pa služi kot **diferenciator** v delu kjer duši (torej za nizke frekvence). Takrat velja:

$$H_{dif} = i\omega \quad \Rightarrow \quad H = H_{dif}\tau$$

Lahko deluje tudi na večjem frekvenčnem območju če gre $\tau \to 0$, ampak gre amplituda izhodnega signala $\to 0$.

Za sistem 2. reda

Prenosna funkcija za filter 2. reda je:

$$H(s) = H(i\omega) = \frac{1}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi\omega}{\omega_0} + 1}$$

$$\Rightarrow |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Zaradi hitrejšega pisanja uvedimo oznako:

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Torej je:

$$|H(i\omega)| = [(1-x^2)^2 + (2\xi x)^2]^{-1/2} = [1 - 2x^2 + x^4 + 4\xi^2 x^2]^{-1/2}$$

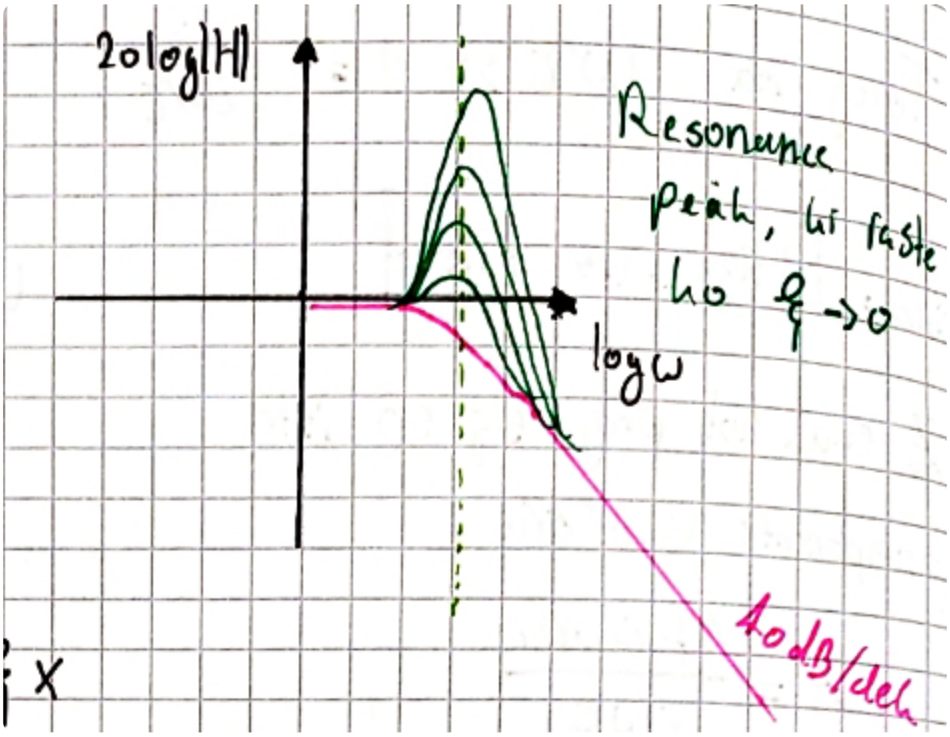
Poglejmo si sedaj nekaj smiselnih vrednosti, da bomo lahko narisali Bodejev diagram:

$$x \to 0 \qquad 20\log|H| = 20\log 1 = 0$$

$$x \gg 1 \qquad 20\log\frac{1}{x^2} = -40\log x$$

$$x = 1 \qquad 20\log\frac{1}{2\xi} = -3$$

kjer smo v zadnjem primeru upoštevali $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ampak kaj pa če to ne velja? Pravzaprav deluje filter 2. reda kot resonančen low pass filter (z bolj strmim cutoff-om $40 > \mathrm{dB}/\mathrm{dek}$). Kar to pomeni je, da imamo pri točki, kjer začne filter "rezati" spekter (znano kot **cutoff point**) lahko resonanco. Resonančni vrh raste, ko gre $\xi \to 0$. Če to zdaj narišemo:



Poglejmo si še fazni Bodejev diagram. Prenosno funkcijo lahko prepišemo v slednjo obliko:

$$H(i\omega) = \frac{(1-x^2) - 2\xi x}{(1-x^2) + 4\xi^2 x^2}$$

in sedaj:

$$\textcolor{red}{\backslash\mathrm{tg}}\delta = \frac{\mathrm{Im}\,H}{\mathrm{Re}\,H} = \frac{-2\xi x}{(1-x^2)}$$

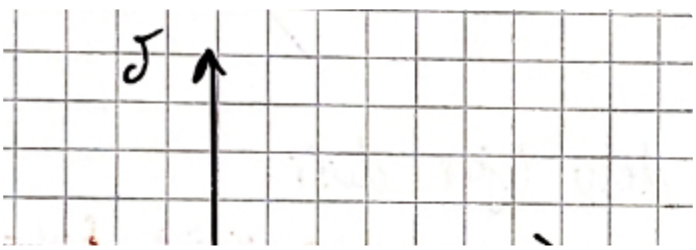
Kot je navada, si poglejmo nekaj značilnih vrednosti:

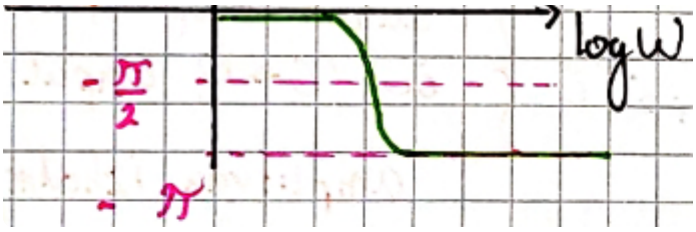
$$\omega \to 0 \qquad \delta \to 0$$

$$\omega \to \infty \qquad \delta \to 2\xi\frac{1}{x} = -\pi$$

$$\omega \to \omega_0 \qquad \delta \to -\frac{\pi}{2}$$

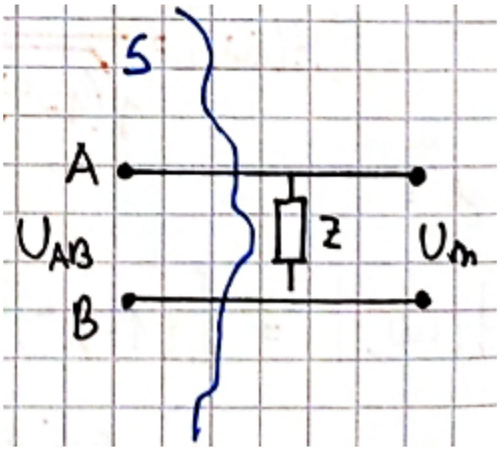
in če to zdaj narišemo dobimo takole:





Vpliv senzorja na opazovani sistem

Iščemo prvo merilo, ki bi nam povedalo, koliko senzor zmoti realni sistem S. Shematično si predstavljajmo nekaj takega:



$$?\,U_{AB} \neq U_M?$$

Recimo, da senzor črpa moč iz sistema S:

$$P_M = \frac{U_M^2}{Z}$$

Merilo je torej energija potrebna na enkratno meritev, ki jo črpamo iz sistema S za delovanje senzorja.

Theveninov izrek

Vsako električno vezje sestavljeno iz linearnih elementov (RCL) v poljubnih točkah A in B lahko nadomestimo z generatorjem napetosti U_{AB} in notranjo upornostjo Z_{AB}

Torej imamo v nadomestnem vezju dva upora Z_M in Z_{AB} in napetostni izvor U_{AB}. Če zapišemo impedanco in potem tok:

$$Z = Z_{AB} + Z_M$$

$$I = \frac{U_{AB}}{Z} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB} + Z_M}$$

Sedaj pa lahko izračunamo napetost v merilnem sistemu, torej napetost na uporu z uporom Z_M:

$$U_M = IZ_M = U_{AB}\left(\frac{Z_M}{Z_{AB} + Z_M}\right) = U_{AB}\left(\frac{1}{1 + \frac{Z_{AB}}{Z_M}}\right)$$

Torej za $U_M < U_{AB}$ gre $\frac{Z_{AB}}{Z_M} \to 0$. Od tod sledi, da mora biti $Z_M \gg Z_{AB}$ če se hočemo približati pravi vrednosti. Zdaj lahko zapišemo moč:

$$P_M = \frac{U_M^2}{Z_M} = U_{AB}^2 \frac{Z_M}{(Z_M + Z_{AB})}$$

Poglejmo si kje imamo maksimum P_{max}:

$$\frac{dP_M}{dZ_M} = 0 = U_{AB}^2\left[\frac{Z_M + Z_{AB}}{(Z_M + Z_{AB})^3} - \frac{2Z_M}{(Z_M + Z_{AB})^2}\right]$$

Največ moči potem porabimo, ko je $Z_{AB} = Z_A$. Vrednost takrat je:

$$P_{max} = U_{AB}^2 \frac{Z_{AB}}{4Z_{AB}^2} = \frac{U_{AB}^2}{4Z_{AB}}$$

Želimo si, da bi za nas veljalo $P \ll P_{max}$. V našem izrazu za moč P_M delimo in množimo ulomek s $4Z_{AB}$ in nadaljujemo:

$$P_M = \frac{U_{AB}^2 Z_M 4Z_{AB}}{4Z_{AB}(Z_M + Z_{AB})^2} = P_{max} \frac{4\frac{Z_{AB}}{Z_M}}{\left(\frac{Z_M}{Z_{AB}} + \frac{Z_{AB}}{Z_M}\right)^2} =$$

$$= 4P_{max} \frac{Z_{AB}}{Z_M} \frac{1}{\left(1 + \frac{Z_{AB}}{Z_M}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{P_{max}} \approx 4\frac{Z_{AB}}{Z_M}$$

Torej bo moč minimalna, ko bo Z_M velik:

$$P \ll P_{max} \quad \Leftrightarrow \quad Z_M \gg Z_{AB}$$

To lahko posplošimo v simple “takeaway message”:

1. **Vhodna impedanca** $Z_{in} \to \infty$
2. **Izhodna impedanca** $Z_{out} \to 0$