Merjenje majhnih premikov

Uporovni lističi

Upor žice znamo izračunati kot:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Žico raztegnemo:

$$dR = \frac{\rho}{S}\,dl + d\rho\,\frac{d}{l} - \frac{\rho l}{S^2}\,dS$$

$$\frac{dR}{R} = \frac{dl}{l} + \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dS}{S} = \frac{dl}{l}(1 + +2\mu) \approx$$

$$\approx 3\frac{dl}{l}$$

Tu smo upoštevali da je $\frac{dS}{S} = -2\mu\frac{dl}{l}$ **Poissonovo število** in $\frac{d\rho/\rho}{dl/l}$ **specifična piezoelektričnost**. Merimo diferencialno tako, da primerjamo R_1 in R_2, ki sta različna le zaradi premikov. Pišimo:

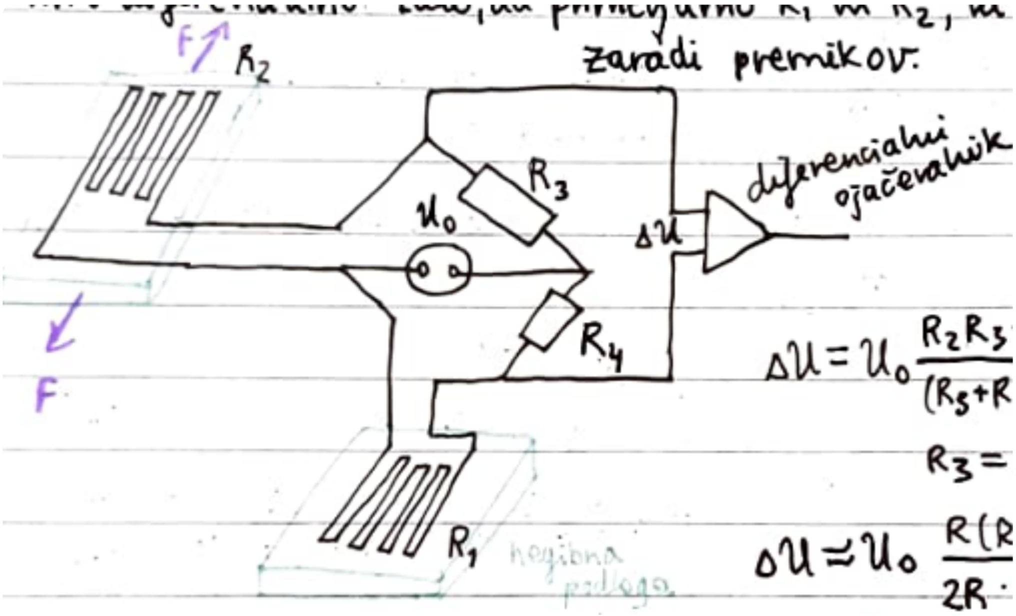
$$\Delta U = U_0 \frac{R_2R_3 - R_1R_4}{(R_3+R_4)(R_1+R_2)}$$

Sedaj pa upoštevamo $R_3 = R_4$, $R_2 = R_1 + \Delta R$ in $\Delta R \ll R_2$:

$$\Delta U = U_0 \frac{R(R_2 - R_1)}{2R \cdot 2R_1} = U_0 \frac{\Delta R}{4R_1} =$$

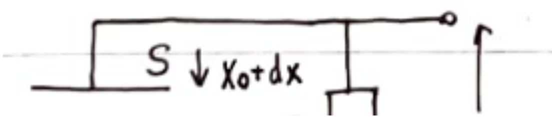
$$= \frac{1}{4}U_0 \cdot 3\frac{dl}{l}N = \frac{3}{4}NU_0\frac{\Delta l}{l} \propto \frac{\Delta l}{l}$$

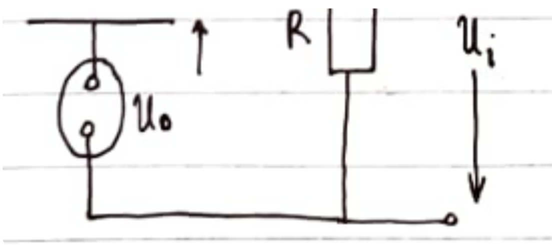
kjer je N število žičk. Senzor si predstavljamo takole (img. credit: Ana Štuhec):



Kondenzatorski senzor

Shematično zgleda takole:





Spreminjamo razdaljo med ploščama in imamo s tem spremenljivo kapaciteto:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x}$$

$$dC = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x_0^2}\, dx = -C_0 \frac{dx}{x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} = -\frac{C_0}{x_0}\frac{dx}{dt}$$

V stacionarnem stanju je $I = 0$. Naboj se pretaka s kondenzatorja ali na njega samo ko se spreminja C. Ker so premiki majhni predpostavimo $U_i \approx 0$ torej:

$$U_0 = -U_C$$

Zdaj iščemo prenosno funkcijo, ki nam bo povezala x in U_i:

$$I = \dot{e} = \frac{d}{dt}(CU_C) = C\frac{dU_C}{dt} + \frac{dC}{dt}U_C =$$

$$= -C\dot{U}_i - \frac{dC}{dt}U_0$$

Tu bi se lahko vprašali še je bil zadnji enačaj res utemeljen, bomo popravili kasneje. Za enkrat od tod dobimo:

$$U_i = IR = \left(-C\dot{U}_i - \frac{dC}{dt}U_0\right)R$$

$$U_i + RC\dot{U}_i + \frac{dC}{dt}U_0 R = 0$$

$$U_i + RC\dot{U}_i - \frac{C_0}{x_0}\frac{x_0}{dt}U_0 R = 0$$

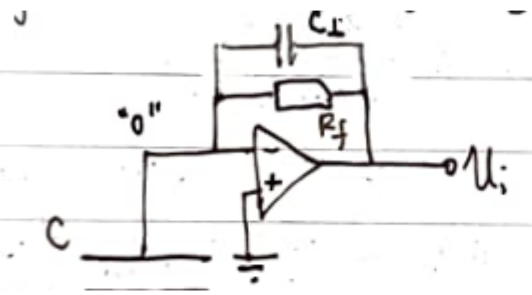
Tu zdaj uvedemo $\tau = RC \approx RC_0$ in delujemo z Laplaceovo transformacijo:

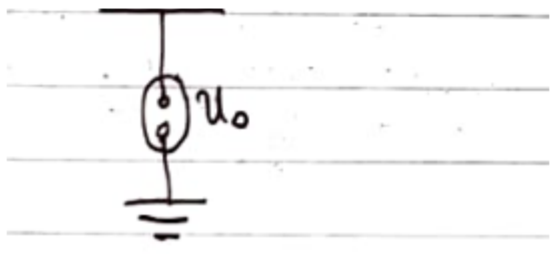
$$U_i + \tau s U_i = \frac{U_0}{x_0}\tau s x$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{U_i}{x} = \frac{U_0}{x_0}\frac{\tau s}{1 + \tau s}$$

Za nizke frekvence deluje kot diferenciator. Da se znebimo premislekov glede utemeljenosti prejšnjega približka raje popravimo vezje in res dosežimo:

$$U_0 = U_c$$





Pišimo kot prej:

$$I = \dot{e} = \dot{C} U_0 = -\frac{C_0}{x_0}\frac{dx}{dt} U_0 = \frac{U_i}{R_f}$$

tu smo že uporabili dejstvo, da je $C_\perp = 0$. In naprej:

$$U_i(t) = -\frac{U_0}{x_0} C_0 R_f \dot{x}$$

Na to delujemo z Laplaceovo transformacijo. Dobimo:

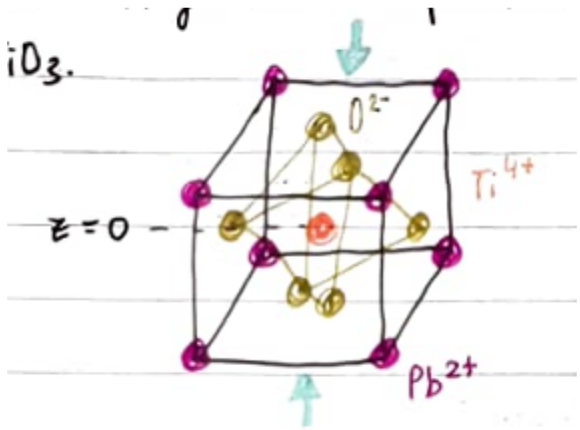
$$U_i(s) = -\frac{U_0}{x_0}\tau s x(s)$$

$$\Rightarrow H(s) = -\frac{U_0}{x_0}\tau s$$

Ta se pa vede kot čisti diferenciator. Podobno se lahko meri tudi zasuke polkrožnih kondenzatorskih plošč.

Piezoelektrični senzor

Zgrajen je kot kondenzatorski, le da je kondenzator napolnjen s piezoelektrikom. To je kristal s strukturo $\mathrm{ABX_3}$ na primer $\mathrm{PbTiO_3}$ ali pa $\mathrm{SrTiO_3}$. Izgled kristala je takšen (img. credit: Ana Štuhec):



V ravnovesju nima dipolnega momenta zaradi simetrije, ampak ko kristal stisnemo recimo v z smeri se spremeni ravnovesna lega Ti^{4+}. Navzven se to izrazi kot polarizacija $\vec{P}$ na koncih kondenzatorja se potem inducira:

$$q = \int \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Polarizacijo dobimo takole:

$$\vec{P} = \verb|\underbar\underbar|d\verb|\underbar|T$$

oz. v lepši notaciji:

$$P_i = d_{ijk} T_{jk}$$

kjer je d_{ijk} piezoelektrični tenzor in T_{ij} napetostni tenzor. Ker je napetostni tenzor simetričen ima le 6 neodvisnih komponent, piezoelektrični tenzor jih pa ima 18. Lahko napišemo:

$$P_i = d_{im} T_m \qquad m = 1, \dots, 6$$

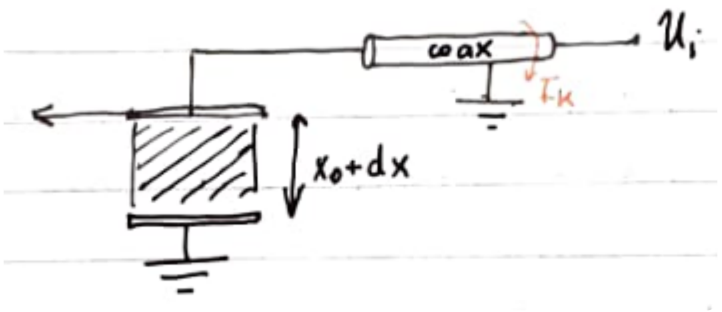
Večja kot je simetrija kristala manj je različnih komponent d_{ijk}. Kristal deformiramo vzdolž osi j plošči sta pa $\perp$ na os i:

$$e_i = P_i S = d_{ij}\sigma_j S = d_{ij}F_j$$

Recimo, da ker je d_{33} običajno največji postavimo:

$$e = d_{33}F$$

Senzor deluje v obe smeri drugače. Piezo kristal je senzor premikov in aktuator (izvajalec) premikov. Ta meritev bi se izvedla ponavadi preko koaksialnega kabla (img. credit: Ana Štuhec):



Torej poglejmo kaj bi se zgodilo:

$$e = d_{33}F$$

$$\dot{e} = I_p + I_K + I_R$$

$$\frac{F}{S} = E\frac{dx}{l_0}$$

$$\dot{F} = ES\frac{\dot{x}}{l_0}$$

kjer sta I_K **kapacitivnost kabla** in I_R upornost kabla. Torej:

$$d_{33}\dot{F} = C_p\dot{U}_i + C_K\dot{U}_i + \frac{U_i}{R}$$

$$d_{33}\frac{RES}{l_0}\dot{x} = R(C_P + C_K)\dot{U}_i + U_i$$

Na dobljeno zdaj delujemo z Laplaceovo trasformacijo:

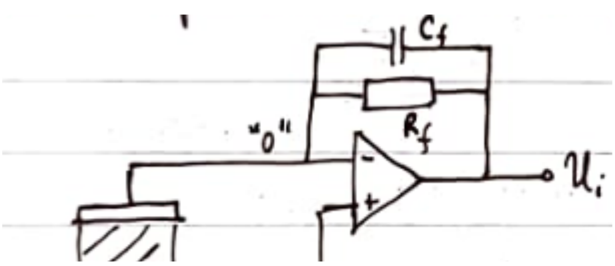
$$d_{33}\frac{RES}{l_0}sx(s) = (\tau s + 1)U_i(s)$$

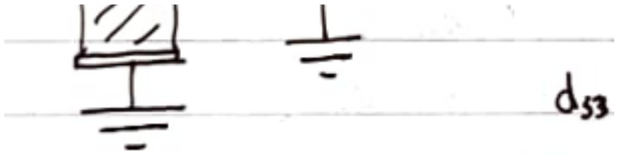
kjer smo vpeljali $\tau = R(C_P + C_K)$. Tako je prenosna funkcija:

$$H(s) = \frac{U_i}{x} = \frac{d_{33}RES}{l_0}\frac{s}{\tau s + 1} =$$

$$= \frac{d_{33}ES}{l_0(C_0 + C_K)}\frac{\tau s}{\tau s + 1} = K\frac{\tau s}{\tau s + 1}$$

Moti nas to, da je vsak kabel drugačen kar pomeni, da bo vsak laboratorji imel drugačen K. Rešitev je, da uporabimo operacijski ojačevalec in prilagodimo vezje (img. credit: Ana Štuhec):





Če spet napišemo kot smo prej:

$$\dot{e} = I = -C_f \dot{U}_i + \frac{0 - U_i}{R_f}$$

$$\dot{e} = d_{33}\dot{F} = d_{33}\frac{ES}{l_0}\dot{x}$$

Uvedli bomo $\tau = R_f C_f$ in delujemo na dobljeno enačbo z Laplaceovo transformacijo:

$$d_{33}\frac{R_f ES}{l_0 C_f}\tau s x(s) = -U_i(\tau s + 1)$$

in pridemo do popravljenega rezultata, ki ni odvisen od lastnosti koaksialnega kabla:

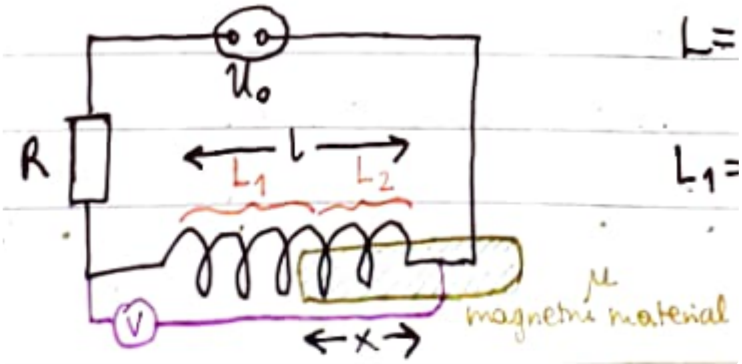
$$H(s) = \frac{U_i}{x} = -\frac{d_{33}ES}{l_0 C_f}\frac{\tau s}{\tau s + 1}$$

Induktivni senzor

Merimo premik tako, da merjenec prekrijemo z magnetnim materialom μ, ki bo več v tuljavi, če bo odmik večji. To bo spremenilo induktivnost tuljave saj velja:

$$L = \mu\mu_0\frac{N^2 S}{l}$$

Shematično zgleda takole (img. credit: Ana Štuhec):



Razdelimo zdaj tuljavo na dva dela, na del, ki kjer je tuljava prazna in na del kjer je prisoten magnetni material in izračunajmo njune induktivnosti:

$$L_1 = \mu_0\frac{S}{l-x}\left(N\frac{l-x}{l}\right)^2 = \mu_0\frac{N^2 S}{l^2}(l-x)$$

$$L_2 = \mu_0\mu\frac{S}{x}\left(N\frac{x}{l}\right)^2 = \mu_0\mu\frac{SN^2}{l^2}x$$

Napetost na tuljavi dobimo kot:

$$U_L = -\dot{\phi} = -\frac{d}{dt}[(L_1 + L_2)I] \approx -\frac{d}{dt}(L_1 + L_2)I$$

Sedaj pa poračunajmo napetosti, za zgornje vezje:

$$U_0 + U_R + U_L = 0$$

$$U_0 - IR - \frac{d}{dt}(L_1 + L_2)I = 0$$

$$U_0 = (R + \dot{L}_1 + \dot{L}_2)I$$

Za vsote in vsoto odvodov pa je:

$$L_1 + L_2 = \mu_0 \frac{N^2 S}{l^2}(l - x + \mu x)$$

$$\frac{d}{dt}(L_1 + L_2) = \mu_0 \frac{N^2 S}{l^2} \dot{x}(\mu - 1)$$

Vstavimo zdaj odvod:

$$U_0 = (R + \mu_0 \frac{SN^2}{l^2}(\mu - 1)\dot{x})I$$

Vidimo, da je člen za U_L zdaj takšen (ja, tudi jaz ne vem zakaj je bilo kar not puščeno):

$$U_L \approx -\mu_0 \frac{N^2 S}{l^2}(\mu - 1)\dot{x}I$$

Na to pa lahko delujemo z Laplaceovo transformacijo in dobimo prenosno funkcijo:

$$H(s) = \frac{U_L(s)}{x(s)} \approx -\mu_0 \frac{N^2 S}{l^2}(\mu - 1)Is \propto s$$