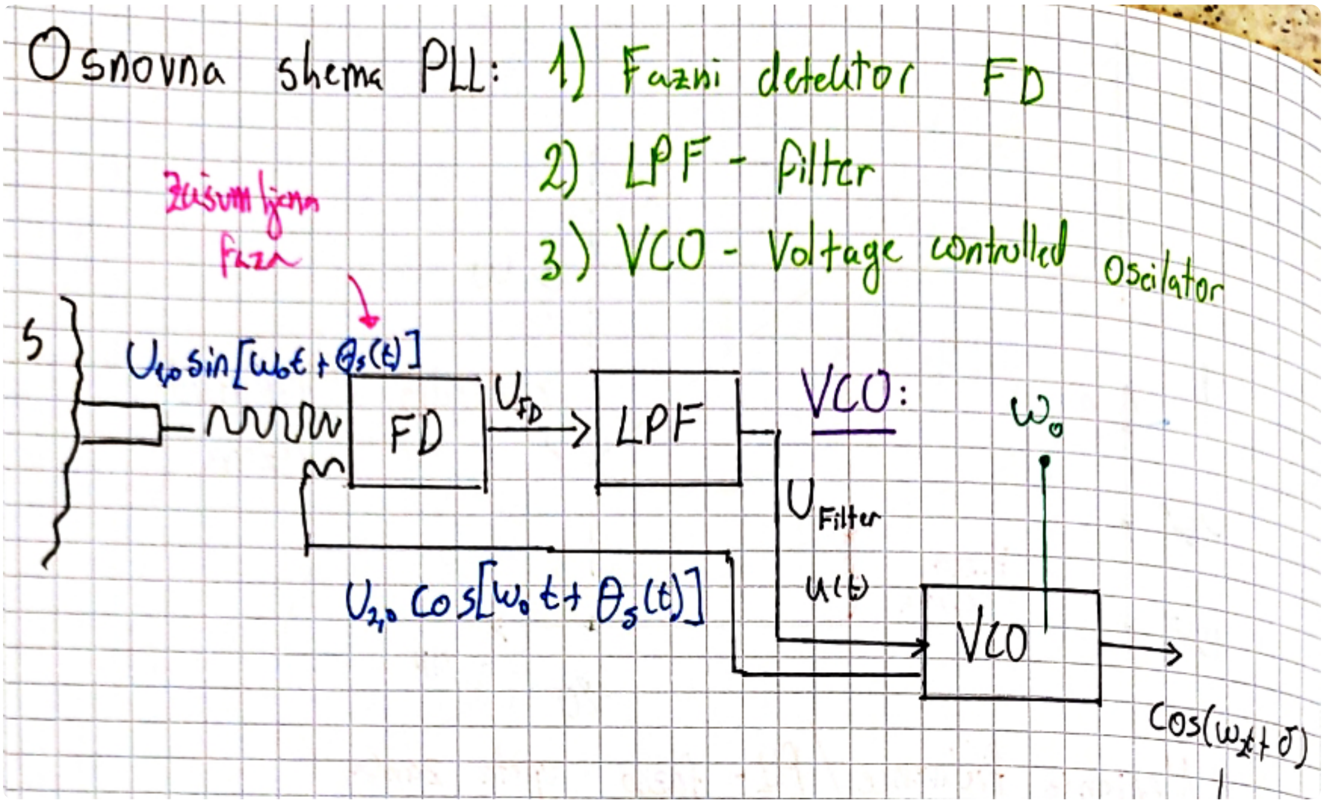
Merjenje frekvence in časa

Frekvenco merimo preko štetja nihajnih časov. Ker znamo čas meriti zelo natančno znamo natančno meriti tudi frekvence. Vedno je ugodno, če lahko merjenje neke količine prevedemo na meritev frekvence.

Fazno vpeta zanka (PLL)

Fazno vpeta zanka oz. angl. Phase locked loop nam pomaga sinhronizirati oscilator v opazovanem sistemu S z modelskim napetostno občutljivim oscilatorjem v sistemu M preko povratne zanke, kjer primerjamo θ_M in θ_S tere glede na razliko requliramo frekvenco oscilatorja v M.

Shematično ga prikažemo takole:



Na vhodu imamo neko zašumljeno fazo:

$$U_1 = U_{1,0} \sin\left[\omega_0 t + \theta_1(t)\right] \qquad \theta_1(t) = \theta_S(t) + r(t)$$

na izhodu pa upamo na prečiščen signal:

$$U_2 = U_{2,0} \cos\left[\omega_0 t + \theta_2(t)\right] \qquad \theta_2(t) = \theta_M(t)$$

Fazni detektor

Poglejmo si prvo fazni detektor. Nekaj o njemu smo že govorili. Na izhodu, da napetost, ki je sorazmerna razliki faz:

$$\theta_e = \theta_1 - \theta_2$$

Torej takole matematično zapisano:

$$U_{FD} = k\langle U_{1,0} U_{2,0} \sin(\omega_0 t + \theta_1) \cos(\omega_0 t + \omega_2)\rangle =$$

$$\frac{kU_{1,0}U_{2,0}}{2}\left(\langle \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\rangle + \langle \sin\left(2\omega_0 t + \theta_1 + \theta_2\right)\rangle\right) =$$

Tu drugi člen odpade, ker je njegovo povprečje po času enako 0. Ostane nam le še:

$$U_{FD} = K_{FD} \sin\theta_e \qquad K_{FD} = \frac{kU_{1,0}U_{2,0}}{2}$$

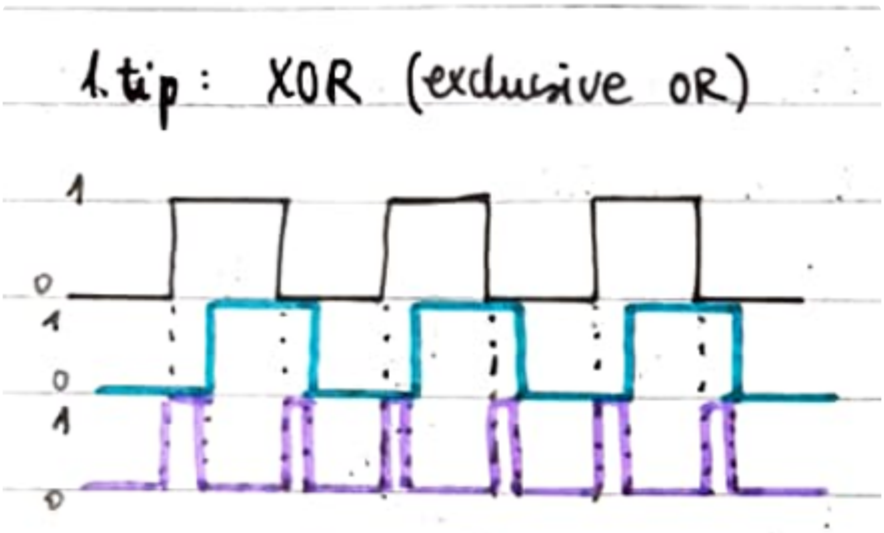
Oz. če sta fazi dovolj blizu, lahko naredimo kar približek in rečemo, da je:

$$U_{FD} \approx K_{FD}\theta_e$$

Poznamo več tipov faznih detektorjev. Poglejmo to zelo površinsko. Spomni se, pri obeh je velikost output signala sorazmeren s ploščino pod signalom.

Tip I. XOR-gate

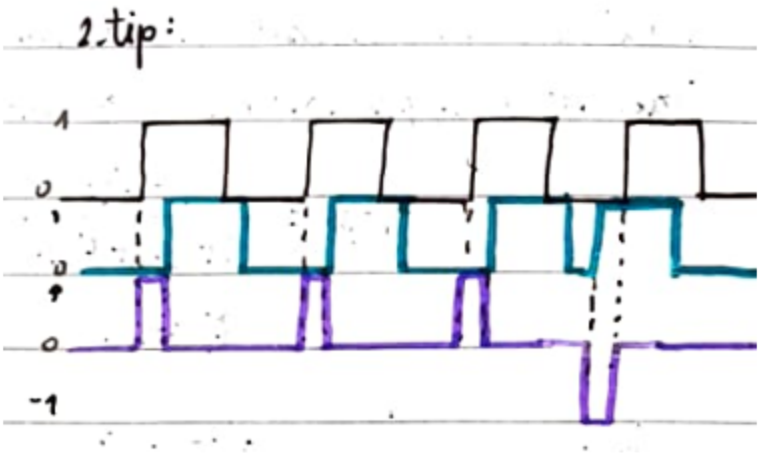
Glede na vhodna signala zgleda izhod takšen (img. credit: Ana Štuhec):



Ima sicer slabosti, da ne loči med leading in lagging-om in da se lahko pojavi ujetost na višje harmonike.

Tip II.

Ta pa zna ločiti med lagging in leading-om in sicer tako, da da pozitiven sunek, ko je pri signal pred drugim in negativen sunek, ko je drugi signal pred prvim.



Regulacijski filter

Zaduši visokofrekvenčne signale (šum) in poskrbi za stabilnost zanke. Na izhodu je:

$$U_F = F(s)U_{FD}$$

kjer je $F(s)$ prenosna funkcija filtra, ki jo bomo določili kasneje.

VCO

Voltage controlled oscillator je naš generator drugega signala. Spremembe izhodnega signala je sorazmerna z U_F:

$$\omega_2 = \omega_0 + K_0 U_F(t)$$

Za prenosno funkcijo:

$$\omega_0 t + \omega_2(t) = \int_0^t \omega_2(t')\,dt' + \theta_2(0)$$

$$\dot{\theta}_2 = \omega_2(t) - \omega_0 = K_0 U_F(t)$$

Sedaj pa uporabimo Laplaceovo transformacijo:

$$s\omega_2(s) = K_0 U_F(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_2}{U_F} = \frac{1}{s} K_0$$

ω_0 grobo nastavimo na frekvenco blizu vhodnega signala $\omega_0 \approx \omega_1$

Prenosna funkcija PLL

Želimo zapisati prenosno funkcijo PLL $\frac{\theta_e}{\theta_1}$. Sestavimo jo iz prenosnih funkcij njenih posameznih elementov:

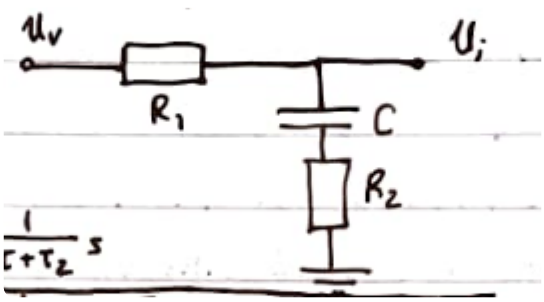
$$\theta_2(s) = \frac{1}{s} U_F(s) = \frac{1}{s} K_0 F(s) U_{FD}(s) = \frac{1}{s} K_0 F(s) K_{FD} \theta_e(s)$$

$$\theta_2(s) = \theta_1(s) - \theta_e(s)$$

Enačbi združimo skupaj in malo predelamo in dobimo:

$$\frac{\theta_e}{\theta_1} = \frac{1}{1 + \frac{K_0 K_{FD}}{s} F(s)}$$

Ključna je izbira filtra! Enostaven RC filter zaradi dolgega τ (kjer potem ni dušenja) ni dovolj. Potrebujemo dva parametra t.i. **modificiran RC filter**. Shematično zgleda takole (img. credit: Ana Štuhec):



Njegova prenosna funkcija je:

$$F(s) = \frac{1 + \tau_2 s}{1 + (\tau_1 + \tau_2) s} \qquad \tau_i = R_i C$$

Ko to vstavimo:

$$\frac{\theta_e}{\theta_1} = \frac{1}{1 + \frac{K_0 K_{FD}}{s} \frac{1 + \tau_2 s}{1 + (\tau_1 + \tau_2) s}} =$$

$$= \frac{s^2 + \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} s}{s^2 + s\left(\frac{1}{\tau_1 + \tau_2} + \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} K_0 K_{FD}\right) + \frac{K_0 K_{FD}}{\tau_1 + \tau_2}}$$

in od tod lahko preberemo (zaradi oblike):

$$\omega_n^2 = \frac{K_0 K_{FD}}{\tau_1 + \tau_2} \qquad 2\xi\omega_n = \frac{1 + K_0 K_{FD} \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$$

Hkrati imamo lahko nizko lastno frekvenco in zadovoljivo dušenje. Na primer če je $K_0 K_{FD} \tau_2 \gg 1$ potem:

$$2\xi\omega_n = \tau_2\omega_n^2 \qquad \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \tau_2\omega_n = \sqrt{2}$$

Iz $\frac{\theta_e}{\theta_1}$ preberemo kako, da θ_e in θ_1 povezuje enačba:

$$\ddot{\theta}_e + \frac{1K_0K_{FD}\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\dot{\theta}_e + \frac{K_0K_{FD}}{\tau_1+\tau_2}\theta_e = \ddot{\theta}_1 + \frac{\dot{\theta}_1}{\tau_1+\tau_2}$$

O stabilnosti PLL

Prej smo predpostavili, da je $\theta_e \ll 1$, da smo lahko razvili $\sin\theta_e \approx \theta_e$. To ne velja če sta fazi razklenjeni. Potem dinamiko opisuje nelinearna enačba:

$$\ddot{(}\theta_e) + \frac{1+K_0K_{FD}\tau_2\cos\theta_e}{\tau_1+\tau_2}\dot{\theta}_e + \frac{K_0K_{FD}}{\tau_1+\tau_2}\sin\theta_e = \ddot{\theta}_1 + \frac{\dot{\theta}_1}{\tau_1+\tau_2}$$

Zanima nas pod katerimi pogoji se bo zanka uspešno vpela na vhodno frekvenco. Poglejmo si:

Skok

Pri skoku pride do nenadne spremembe frekvence:

$$\dot{\theta}_1 = \Delta\omega \qquad \ddot{\theta}_1 = 0$$

Želimo stacionarno rešitev za:

$$\dot{\theta}_e = 0 \qquad \ddot{\theta}_e = 0$$

$$\frac{K_0K_{FD}}{\tau_1+\tau_2}\sin\theta_e = \frac{\Delta\omega}{\tau_1+\tau_2}$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = \frac{K_0K_{FD}}{\tau_1+\tau_2} \geq \frac{\Delta\omega}{\tau_1+\tau_2}$$

Torej skok $\Delta\omega$ mora biti manjši od $\Delta\omega_{max}$:

$$\Delta\omega \leq \Delta\omega_{max} = K_0K_{FD}$$

Driftanje

Frekvenca se približuje pravilni frekvenci. Naklon premice je:

$$\frac{d}{dt}\Delta\omega = \ddot{\theta}_1 \qquad \dot{\theta}_1 = 0$$

Spet velja, da hočemo stacionarno rešitev:

$$\dot{\theta}_e = 0 \qquad \ddot{\theta}_e = 0$$

$$\frac{K_0K_{FD}}{\tau_1+\tau_2}\sin\theta_e = \frac{d}{dt}\Delta\omega$$

$$\frac{K_0F_{FD}}{\tau_1+\tau_2} \geq \frac{d}{dt}\Delta\omega$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Delta\omega \leq \frac{d}{dt}\Delta\omega\bigg|_{max} = \omega_n^2$$

Kako hitro se PLL vklene?

Pri večji razklenitvi je $U_{FD}\sin(\Delta\omega t)$, $\Delta U_0 = |F(i\Delta\omega)|K_{FD}$ in:

$$(\Delta\omega)_0 = K_0K_{FD}|F(i\Delta\omega)|$$

Če je $(\Delta\omega)_0 \leq \Delta\omega$ se **se zanka vklene v**:

$$\frac{2\pi}{(\Delta\omega)_0}$$

Majhna razlika $\Delta\omega_L$, ki še omogoča hitro vklapljanje:

$$\Delta\omega_L = K_0 K_{FD} |F(i\Delta\omega_L)| \qquad F(i\Delta\omega_L) \approx \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}$$

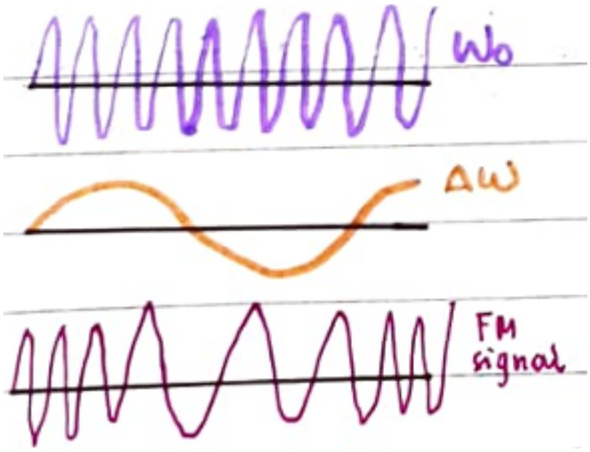
$$\Delta\omega_L = K_0 K_{FD} \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = (\Delta\omega)_{max} \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \qquad \Delta\omega \leq \Delta\omega_L$$

Frekvenčna modulacija in demodulacija signalov

Radijski prenos uporablja frekvenčno modulirane EM valove:

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega(t)$$

kjer je $\omega_0 \sim 100\mathrm{MHz}$ carrier frekvenca (aka. tisto kar si naštimaš v avtu), odmiki so pa $\Delta\omega \sim 20\mathrm{kHz}$. Simple but effective drawing (img. credit: Ana Štuhec):



Grobo delovanje radija lahko opišemo takole. Demoduliramo z PLL, kjer VCO v njem nastavimo na ω_0. PLL se tako v vsakem trenutku vklene na $\omega(t)$ iz tega pa dobimo $\Delta\omega(t)$, ki nas zanima.

Frekvenčni sintesizer

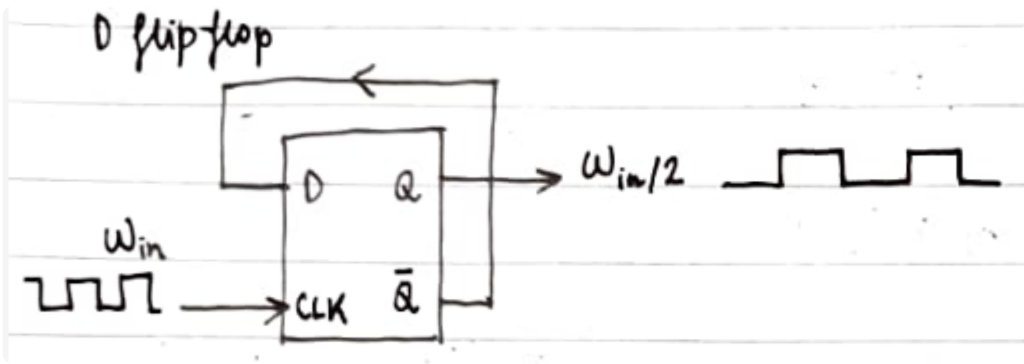
PLL frekvenčni sintesizer uporablja frekvenčne delilnike vstavljene med fazni detektor in VCO. S tem lahko kontroliramo izhodno frekvenco kot:

$$\omega_{out} = \frac{\omega_{in}}{m}$$

kjer je večinoma $m = 2$. Sicer je za več delilnikov formula:

$$\omega_{out} = \frac{\omega_{in}}{2^n}$$

Shematično nekaj takega (img. credit: Ana Štuhec):



Kvarčna ura

Za merjenje časa so najbolj primerna nihala. Njihova slabost je, da se nihanje zaduši. Ura ima majhne glasbene vilice iz Piezo kristala katerega deformacija vodi v pojav polarizacije in napetosti na njem. Ko vilice nihajo, napetostni signal niha z isto frekvenco. Z magnetom vzbujamo vilice, tako da efektivno ni dušenja.

$$\nu_0 = 32\,768\ \mathrm{Hz}$$

Frekvenca je ravno takšna zato da je izven območja, kjer bi jo mi lahko slišali in nas tako ne moti. Z 15 delilniki znižamo frekvenco na $1Hz$!