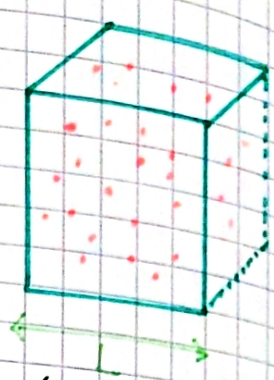
Mehanika zveznih teles

- Delamo se, da je telo zvezno (neskončno fino)
- Vemo, da to ni res
- Ni problem dokler ne gledamo detajlov!
- Ključen je: Mezoskopski volumen (hidrostatski volumen)!

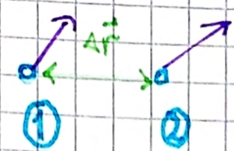


  - Mora biti dovolj velik (dovolj veliko št. delcev/stanj) da so važna samo povprečja (Termodinamska limita).
  - Hkrati dovolj majhen, da lahko opišemo krajevne spremembe
  - Na skali L morajo biti spremembe majhne zato da imamo majhne razlike med volumni. "Žargonsko $L \ll \frac{1}{\nabla}$:)"
- Koliko majhen sme biti?
  - → Deluje tudi do ~nm.
  - → Okay je tudi 1 polimerno molekulo (Stat. opis) (Reši nas časovno povprečje - če ne gledamo hitrih stvari)

Elastomehanika

- Osnovni pojem je deformacija.

Namesto $\vec{u}^2 - \vec{u}^1$



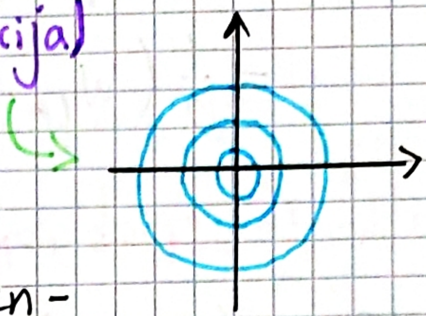
$$\downarrow$$

$$\nabla\vec{u}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}$$

Kako torej opišemo deformacijo?
V igri sta dva vektorja ($\vec{u}$ in ∇) nekako bomo to opisali s tenzorjem (Deformacijski Tenzor)! ← Seveda je to spet polje

Očitno je ta tenzor v zvezi z gradientom premika.

Problem: nekatere deformacije so "trivialne" in jih nočemo zajeti. (Togi premik, Toga rotacija)



$\Rightarrow$ Torej: $\nabla\vec{u}$ je v resnici malo presplošen – preveč pove!

Dekompozicija $\nabla\vec{u}$ [Cauchy-Stokes]

Razbijemo tenzor 2. ranga (2 indeksa) na "ireducibilne dele"!

$$(\nabla\vec{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Ne zgubljajmo splošnosti, dajmo najprej na splošnem A_{ij}

$$A_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})}_{\text{simetričen}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ji})}_{\text{anti-simetričen}} =$$

Ta je že ireducibilen ... se izkaže

$$= S_{ij} \qquad W_{ij}$$

W_{ij} se da predstavi z aksialnim vektorjem.

$$W_{ij} = \varepsilon_{ijk} w_k \;;\; w_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{ij}$$

- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$
- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$
- $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$

Namreč:

$$\varepsilon_{ijl} W_{ij} = \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{ijk} w_k =$$

$$= 2\delta_{kl} w_k = 2w_l$$

Še v drugo smer:

$$\varepsilon_{lmk} w_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{lmk} \varepsilon_{ijk} W_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{il}\delta_{mj} - \delta_{im}\delta_{lj}) W_{ij}$$
$$= \frac{1}{2}(W_{lm} - W_{ml}) = W_{lm}$$

S_{ij} lahko razcepimo naprej

$$S_{ij} = \underbrace{\left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij}\right)}_{\text{Brezsledni (deviatorni) del}} + \underbrace{\frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij}}_{\text{Izotropni del}}$$

$$\Rightarrow \quad A_{ij} = \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij}\right) + \frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij} + W_{ij} \; !$$

Digresija (stranski tok): Kako se transformirajo komponente tenzorja?

Pokažimo, da kot produkti komponent vektorja. To velja splošno (za vsak rang).

- Vektor:

$$\vec{a} = a_i \hat{e}_i$$

$$a_i = \vec{a}\,\hat{e}_i \quad \text{ONB}$$

Transformacija med bazama:

$$\hat{e}_i = M_{ij}\hat{e}_j'$$

M so ortogonalne matrike

$M_{ki}M_{kj} = \delta_{ij}$ (ort. stolpci)

$M_{ik}M_{jk} = \delta_{ij}$ (ort. vrstic)

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = a_i M_{ij}\hat{e}_j' \equiv a_j'\hat{e}_j'$$

$$\Rightarrow \quad a_j' = M_{ij} a_i$$

- Tenzor:

$$T = T_{ij}\,\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$$

$$T_{ij} = \hat{e}_i \cdot T\hat{e}_j$$ (tako dobimo komponento)

Transformacija med bazama:

$$T = T_{ij}(M_{ik}\hat{e}_k') \otimes (M_{jl}\hat{e}_l')$$
$$= T_{ij} M_{ik} M_{jl}\,\hat{e}_k' \otimes \hat{e}_l' \equiv T_{kl}'\,\hat{e}_k' \otimes \hat{e}_l'$$

$$\Rightarrow \quad T'_{kl} = T_{ij} M_{ik} M_{jl}$$

To je isto kot produkt:

$$a'_k a'_l = (M_{ik} a_i)(M_{jl} a_j) = a_i a_j M_{ik} M_{jl}$$

(Transformira se vsak indeks, indeks pomeni vektor)

Kako se transformira izotropni del?

$$T_{ij} = A\delta_{ij}$$

res enako!

$$T'_{kl} = A\delta_{ij} M_{ik} M_{jl} = A M_{ik} M_{il} = A\delta_{kl}$$

Brezsledni ~~simetrični~~ del se transformira matrično

Kaj pa antisimetrični del?

$$w_{ij} = \varepsilon_{ijk} w_k \; ; \; w_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_{ij}$$

Vemo:

$$w'_{kl} = w_{ij} M_{ik} M_{jl} = \varepsilon_{ijp} w_p M_{ik} M_{jl} =$$

$$= \varepsilon_{kls} \underbrace{M_{ps} w_p}_{\text{Transform}} = \varepsilon_{kls} w'_s$$

Vektorski produkt k-tega in l-tega

$$\varepsilon_{ijp} M_{ik} M_{jl} = \varepsilon_{kls} M_{ps}$$

Torej:

$$w_{kl} = \varepsilon_{kls} w_s$$

$$w'_{kl} = \varepsilon_{kls} w'_s$$

$\Rightarrow$ Se transformira kot aksialni vektor

Zdaj pa konkretno za $A_{ij} = (\nabla \vec{u})_{ij}$:

$$(\nabla \vec{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}_{\text{simetričen del}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)}_{\text{antisim. del}} \equiv u_{ij} + w_{ij}$$

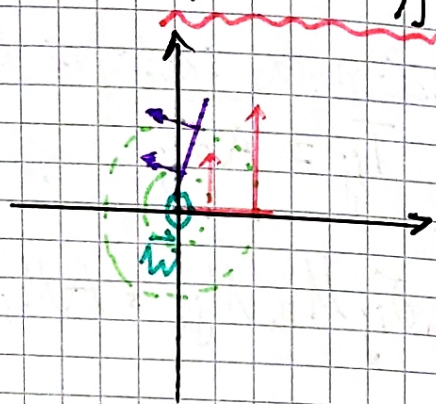
Kaj predstavlja/pomeni antisimetrični del? (Kakšno deformacijsko polje)

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{ij} + w_{ij} \Rightarrow du_j = u_{ij}\,dx_i + w_{ij}\,dx_i$$

$$w_{ij}\,dx_i = \varepsilon_{ijk} w_k\,dx_i = \varepsilon_{jki} w_k\,dx_i = \underbrace{(\vec{w} \times d\vec{r})_j}$$!

To je infinitezimalna rotacija.

$\vec{w}$ je inf. kot zasuka $\delta\vec{\varphi}$



Če smo natančni: Imamo dve majhnosti

- Majhen kot zasuka $\delta\vec{\varphi}$.
- Majhna razlika med dvema $d\vec{r}$ med bližnjimi točkama

$$\delta d\vec{u} = \delta\vec{\varphi} \times d\vec{r}$$

Če gledamo na časovno enoto: $/\frac{\delta}{\delta t}$

$$\frac{\delta}{\delta t} d\vec{u} = \frac{\delta\vec{\varphi}}{\delta t} \times d\vec{r} \Rightarrow d\vec{u} = \vec{\omega} \times d\vec{r}$$

Za $\vec{\omega} \neq \vec{\omega}(\vec{r}) \Rightarrow$ Toga rotacija $\rightarrow \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Sicer $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{r}) \Rightarrow$ Lokalna deformacija

Zaradi kompletnosti zapišimo še $\vec{w}$ z $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

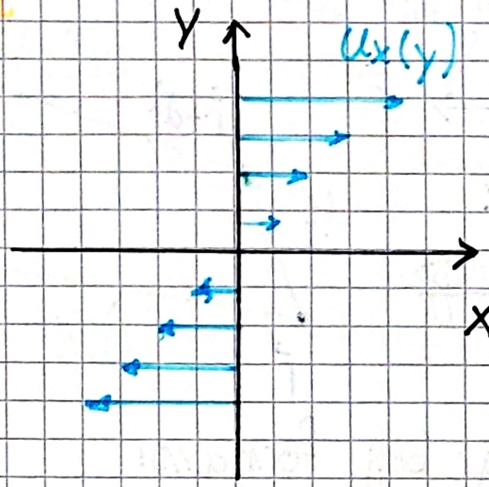
$$w_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad w_k = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk} w_{ij}$$

$$w_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} w_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{u})_k \Rightarrow \nabla \times \vec{u} = 2\vec{w}$$

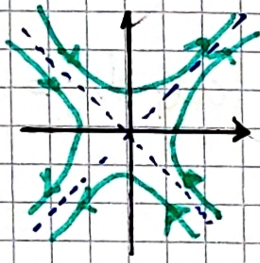
Tipični primer: Strižno deformacijsko polje

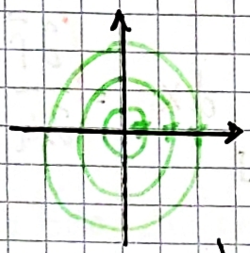
$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = a$$



$$\nabla\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$





$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{1}{2}a, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2}a$$

$$u_y = \frac{1}{2}ax \qquad u_x = \frac{1}{2}ay$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = C}_{\text{Hiperbole}} \Leftarrow \int dy\, y = \int dx\, x$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{1}{2}a, \quad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2}a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C}_{\text{Krožnice}}$$

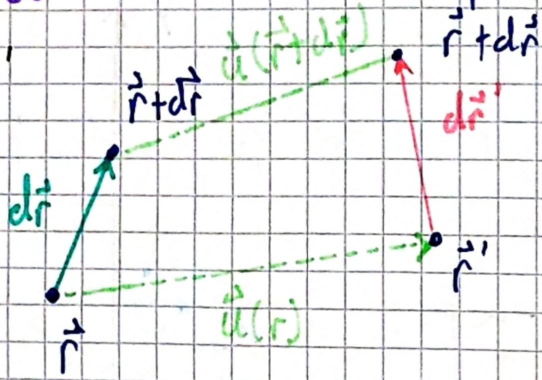
Torej, antisimetrični del $\nabla\vec{u}$ je deformacijsko polje infin. toge rotacije
Tega v Def. tenzorju nočemo.
Udarimo z zahtevo:

Energija je odvisna samo od razdalj med bližnjimi delci.
Zato Def. tenzor opiše natanko spremembe razdalj med bližnjimi točkami.

Izpeljimo to:

$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}'$

Pred:
deformacijo



Po deformaciji:

Najprej bolj formalno:

Metrični tenzor

Pred:

$$dr^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} dx_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} dx_i dx_j =$$

$$= g_{ij}\, dx_i dx_j$$

Po:

$$dr'^2 = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x_j} dx_i dx_j = g'_{ij}\, dx_i dx_j$$

$$\Rightarrow dr'^2 - dr^2 = \left(g'_{ij} - g_{ij}\right) dx_i dx_j$$

Spremembo razdalj smo opisali s spremembo metričnega tenzorja

Sedaj pa normalno:

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + \vec{u} \qquad d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u}'$$

Primerjamo dr^2 in $dr'^2 = (d\vec{r} + d\vec{u})^2$

$$dr'^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j\right)^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j\right)\left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k\right) =$$

$$= dx_i^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k =$$

Simetriziramo

$$= dr^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dx_i dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k =$$

$$= dr^2 + \underbrace{\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k \, \partial u_k}{\partial x_i \, \partial x_j}\right]}_{\equiv 2u_{ij}} dx_i dx_j$$

$\equiv 2u_{ij}$ Deformacijski tenzor

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right]$$

Ponovitev: Dobili smo u_{ij} ko smo zahtevali $dr'^2 - dr^2 \equiv 2u_{ij} dx_i dx_j$

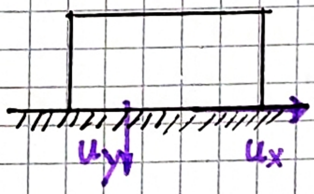
$$= (g'_{ij} - g_{ij}) dx_i dx_j$$

Kot zanimivost: $2u_{ij} = g'_{ij} - g_{ij}$

//

- Simetričnost u_{ij} ne pomeni, da bo def. simetrična $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \neq \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.
- Pomeni samo, da bo tisto, kar bomo izrazili z u_{ij} (Deformacijska energija) odvisno le od sim. dela deformacije.

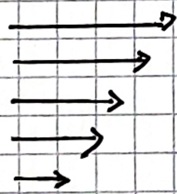
Primer 1.



r.p. u_x dovoljen

$u_y = 0$

Primer 2.



u_x

$u_y = 0$

Interpretacija deformacijskega tenzorja

- Simetrični tenzor => Lahko ga diagonaliziramo, v dani točki seveda (odvisen od kraja, v splošnem)

• Kaj pomeni, če je diagonalen? (Pomen diag. elementov)

- če pogledamo primer brez rotacije in majhno def.

Torej $u_{ij} = (\nabla \vec{u})_{ij}$

- Točki, razmaknjeni v lastni smeri ($d\vec{r}$) se tudi pri def. razmakneta ($d\vec{u}$) samo v tej smeri!

$\Rightarrow$ • V lastnih smereh je deformacija torej raztezanje/krčenje

Torej, v lastni smeri v 1. redu:

$$u_{11} \approx \frac{du_1}{dx_1}$$

Enako za u_{22} in u_{33}.

- Vedno lahko najdemo tak sistem, kjer je defo. tako preprosta.

- S celotnim U_{ij} je stvar manj pregledna

- V lastnem sistemu: $dr'^2 - dr^2 = 2u_{11}\,dx_1^2 + 2u_{22}\,dx_2^2 + 2u_{33}\,dx_3^2$ je vsota neodvisnih členov.

$\Rightarrow$ Deformacijo lahko sestavimo iz neodv. deformacij v pravokotnih smereh (l. s. U_{ij}), ki so enostavna raztezanja v teh smereh.

Raztezek:

$$\frac{dx_1'^2 - dx_1^2}{dx_1^2} = 2u_{11}$$

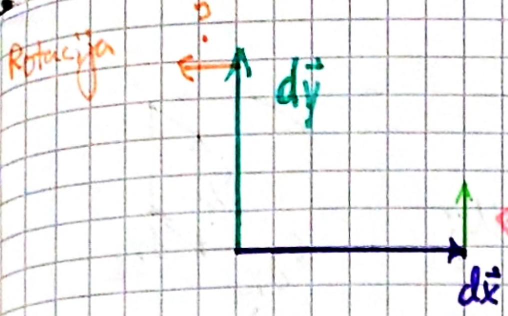
V 1. redu:

$$u_{11} = \frac{1}{2}\frac{\overbrace{(dx_1' + dx_1)}^{\approx 2dx_1}(dx_1' + dx_1)}{dx_1^2} \approx \frac{dx_1' - dx_1}{dx_1}$$

- Pomen izvendiagonalnih elementov

Premiki so pravokotni na razmik točk, torej se v 1. redu ne spremeni razdalja med točkama (pitagora je kvadraten), ampak kot vektorja med njima ($d\vec{r}$).

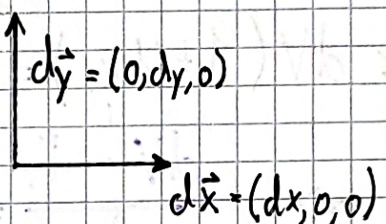
Vendar pozor: kot vektorja se spremeni tudi pri rotaciji, ki je pa U_{ij} ne vsebuje več.



Tega nam pove $\frac{\partial u_y}{\partial x}$

Če je $\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}$ je to rotacija. Če pa $\frac{\partial u_x}{\partial y} \neq -\frac{\partial u_y}{\partial x}$ imamo pa (tudi) deformacijo.

1. možnost: Pogledamo, kako se spremeni kot med pravokotnima vektorjema (na tega rotacija ne vpliva)



$$d\vec{x}' = d\vec{x} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx$$

$$d\vec{x}' = dx\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$d\vec{y}' = dy\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}, 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow d\vec{x} \cdot d\vec{y} \approx dx\,dy\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = 2u_{xy}\,dx\,dy$$

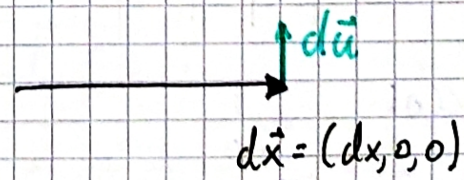
v 1. redu

$$\rightsquigarrow \cos\theta = \frac{d\vec{x}' \cdot d\vec{y}'}{dx'dy'} = \frac{2u_{xy}\,dx\,dy}{dx\,dy} \approx 2u_{xy}$$

$$\cos\theta \approx 2u_{xy}$$

2. možnost: Pogledamo, kako se zasuče en vektor pri pravokotnem premiku z odšteto rotacijo!

$$d\vec{u} = \underbrace{(\nabla\vec{u})_s}_{\text{Linearen del } U_{ij}} d\vec{r}$$



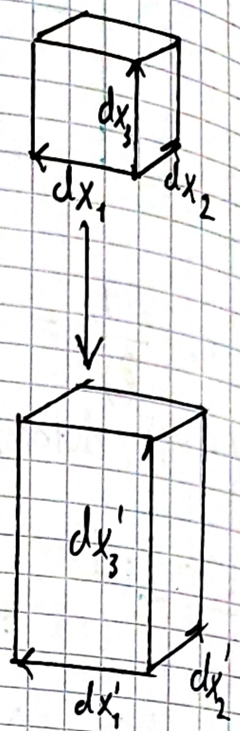
$$du_y = u_{xy}\,dx \Rightarrow \theta_{xy} \approx \frac{du_y}{dx} = u_{xy}$$

$$du_z = u_{xz}\,dx \Rightarrow \theta_{xz} \approx \frac{du_z}{dx} = u_{xz}$$

• Sprememba prostornine pri deformacije

1. Način:

Najlažje je to videt v lustnem sistemu u_{ij}



$$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$dV' = dx_1'\, dx_2'\, dx_3' =$$

$$= (1+u_{11})\,dx_1\,(1+u_{22})\,dx_2\,(1+u_{33})\,dx_3 =$$

$$= dx_1 dx_2 dx_3 (1 + \underbrace{u_{11} + u_{22} + u_{33}}_{\text{Sled}} + \ldots) \approx$$

$$\approx dV(1 + u_{kk}) = dV'$$

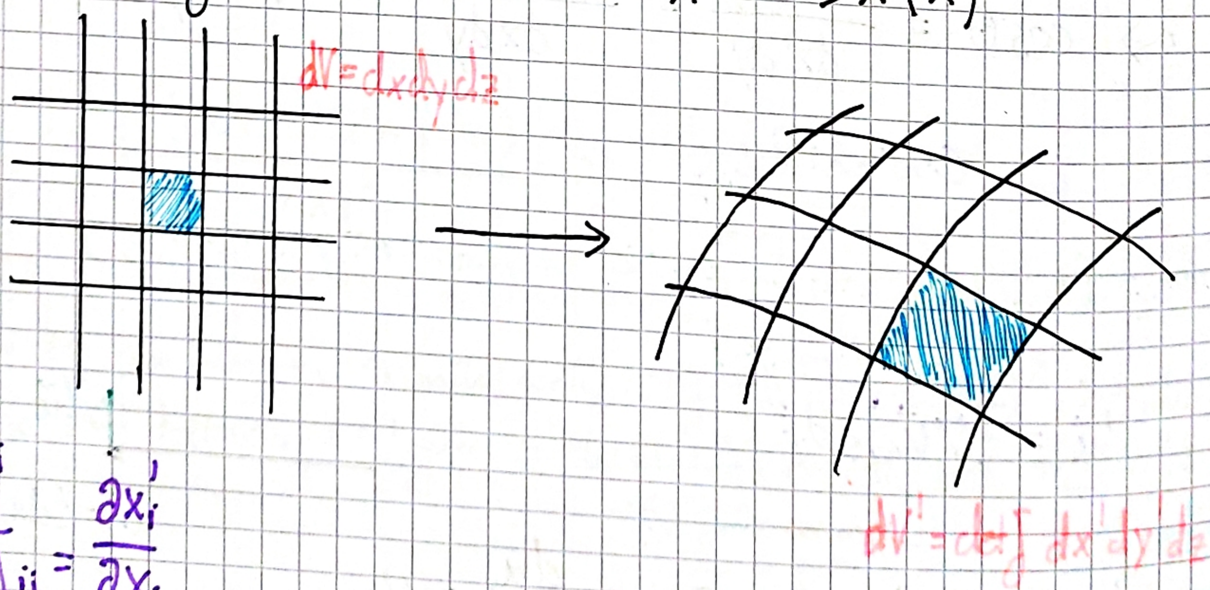
$$\Rightarrow \quad \frac{dV' - dV}{dV} = \underset{\uparrow\, tr(u)}{u_{kk}}$$

Relativna
! Lokalna !
Sprememba Volumna

2. način:

Lahko tudi bolj zapleteno v splošnem sistemu.

Deformacijo $\vec{r} \longrightarrow \vec{r}'(\vec{r})$ si predstavljamo kot transformacijo med koordinatami $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}'(\vec{x})$



Jacobi

$$J_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}) \qquad x_i' = x_i + u_i(x_j)$$

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad J = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1+\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & 1+\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\det J = \left(1+\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\left[\left(1+\frac{\partial u_y}{\partial u_y}\right)\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial u_x}{\partial y}\left[\mathcal{O}(1)\right] + \frac{\partial u_x}{\partial z}\left[\mathcal{O}(1)\right] =$$

$$= 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\frac{dV'}{dV} = \det J \approx 1 + u_{kk} \Rightarrow \frac{dV' - dV}{dV} = u_{kk}$$

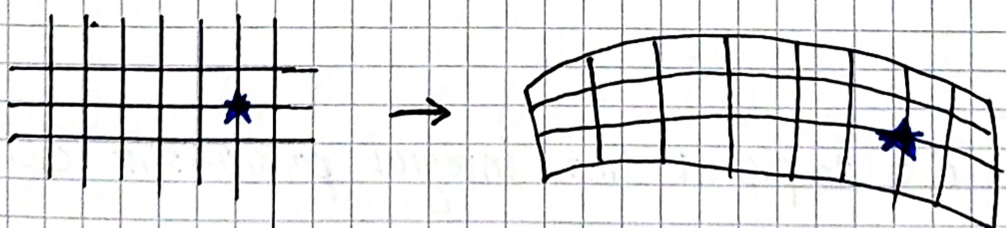
Lagrangev in Eulerjev def. tenzor

- "Lagrangev opis": "Premik izrazimo v koordinatnem sistemu nedeformiranega telesa", "s starimi koordinatami"
- "Eulerjev opis": "Premik izrazimo v koord. sist. deformiranega telesa", "z novimi koord."

"Koord sist" so naše preproste (Lepe) koord, npr. (kartezične)

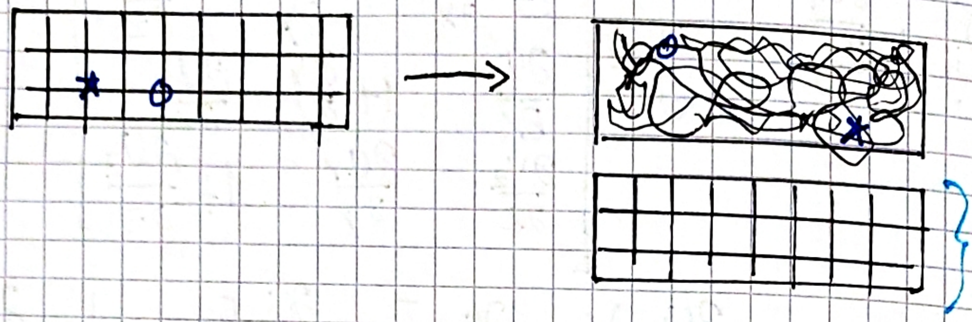
Lagrange:

Položimo jih na tla pred deformacijo. Koordinata označuje delce telesa.



Dokler je deformacija majhna in bližnje točke ostanejo bližnje je $\vec{u}(\vec{r})$ smiselno vprašanje. => Naravno za elastomehaniko

Euler: V primeru "premešanega sistema" Lagrang. koord., ki označuje delčke, ni smiselna!



V resnici položimo tale nove koord.

i) Lahko se vprašamo po hitrosti T, p, ...

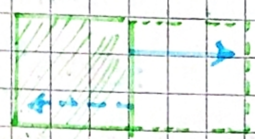
ii) Lag. slika ima smisel, kadar sledimo delčkom. V kontinuumu, ni delčkov, so samo polja v prostoru.

iii) Eulerjeve koordinate označujejo prostor, alias na sistem jih položimo po deformaciji (po vseh/na koncu).

Mehanska napetost, napetostni tenzor

Notranje sile: Sile okoliških delcev na izbranosti delček

Sile se izničijo, napetosti ostanejo



Predpostavka: Sile so kratkega dosega ("kontaktne" sile)

↳ Zato sile okolice delujejo le na površini delčka

Torej: Celotna sila (vemo, da je to sila okolice na delček) oz. elastična sila:

$$F_i = \int f_i \, dV$$

se mora dat zapisati kot integral po površini delčka.

$\Rightarrow$ $f_i(\vec{r})$ mora biti divergenca nečesa, torej divergenca tenzorja (ker je stvar sama vektor).

$$\boxed{f_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}} \Rightarrow \sigma_{ij} \text{ Napetostni tenzor}$$

Torej:

$$F_i = \int f_i \, dV = \int dV \, \partial_j \sigma_{ij} = \boxed{\oint dS_j \, \sigma_{ij}}$$

Prvi indeks sila
drugi indeks geometrija

Pomen komponent:

Pomen σ_{ij} je i-ta komponenta površinske gostote sile na j-to komponento ploskve.

alias: $\sigma_{ij} \, dS_j$ je i-ta komponenta sile na ploskev $d\vec{S}$

Navor in simetričnost σ_{ij}

Izračunajmo navor elastičnih sil na delček: M_i

$$M_i = \int dV \varepsilon_{ijk} x_j f_k = \int dV \, \varepsilon_{ijk} x_j \partial_l \sigma_{kl}$$

Kaj želimo? Tudi navor se mora dati zapisati kot integral po površini delčka!

M_{ij} namesto stalno pisanja ε_{ijk}: $M_{ij} = \int dV (x_i f_j - x_j f_i)$

$$M_{ij} = \int dV (x_i f_j - x_j f_i) = \int dV \left(x_i \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) =$$

$$= \int dV \frac{\partial}{\partial x_k} \left(x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik} \right) - \int dV \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} \sigma_{jk} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \sigma_{ik} \right) =$$

$$= \oint dS_k (x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik}) - \int dV (\sigma_{ji} - \sigma_{ij})$$

simetričen mora biti da je to 0

Če naj volumski del zgine, mora biti σ_{ij} simetričen!

Kaj to pomeni?

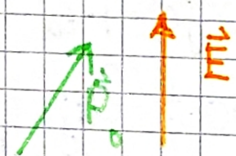
- če $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ imamo gostoto (volumsko) navora,
- Vsak infinitezimalen delček je obremenjen z navorom.
- To ni kar tako, saj tak navor pada kot r^3, vztrajnostni moment pa kot r^5 $\Rightarrow \alpha \to \infty$

↑ kotni pospešek

$\Rightarrow$ Zato volumske gostote navora ne sme biti!

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Čakaj, čakaj! Vol. g. navora imamo lahko na primer:



V tem primeru mora obstajati vol. g. elastičnega navora (= antisimetričen del σ_{ij}), ki vedno (tudi v nestatični situaciji) izravna, eksaktno izravna volumsko g. električnega navora.

Volumska g. elastičnega navora pa se mora dat še vedno zapisati kot integral po površini. To sledi iz neke mikroskopske teorije, je pa tudi rahlo logično saj sicer ne bi mogli doseči ravnovesja elast. telesa zgolj z vpetjem (kovač vpne železo in mu z navorom na površino prepričimo vrtenje).

Povzetek: Antisimetričen del σ_{ij} v splošnem lahko obstaja (ponavadi: ne). Vendar mora biti divergenca, torej divergenca tenzorja 3. ranga.

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 2\frac{\partial \Phi_{ijk}}{\partial x_k}, \text{ kjer je } \Phi_{ijk} = -\Phi_{jik}$$

→ Antisim. del σ_{ij} obstaja samo, če "mora" obstajati sicer ne!

Primeri napetostnega tenzorja

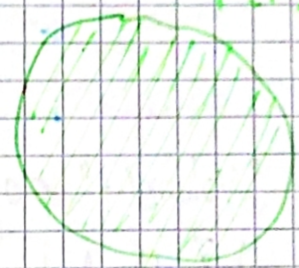
- Izotropni tlak (npr. v tekočini): $\sigma_{ij} = p\delta_{ij}$

• Sila na delček (Volumska gostota sile):

$$f_i = \partial_j \sigma_{ij} = -\delta_{ij}\partial_j p = -\partial_i p \Rightarrow \vec{f} = -\nabla p$$

• Sedaj pa sila na območje:

$p(\vec{r})$



$$F_i = \oint dS_j \sigma_{ij} = -\int dS_j\, p\delta_{ij} = -\oint dS_i\, p =$$
$$= \int dV \partial_j \sigma_{ij} = -\int dV \partial_i p$$

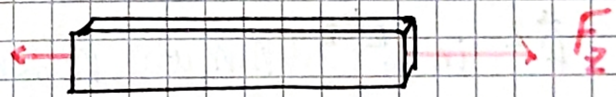
• Če je p hidrostatičen tlak $p(\vec{r}) = \rho \vec{g} \cdot \vec{r}$

$$\Rightarrow F_i = -\oint dS_i\, p = -\int dV\, \partial_i p = -\rho g_j \int dV \partial_i x_j = -\rho g_j \int dV \delta_{ij} =$$
$$= -\rho g_i V$$

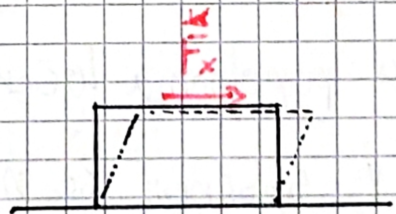
V_{zgon}

- Enoosna obremenitev; v primeru homogene deformacije

σ_{zz} je neničelen



- Strižna obremenitev:

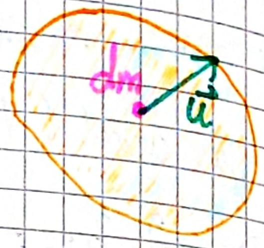


Edina neničelna $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$

Gibalna enačba (2. N.Z.)

Zdaj ko poznamo elastično silo na delček lahko zapišemo gibalno enačbo zanj. V zveznem sredstvu ga zapišemo na enoto prostornine.

$$dm\,\ddot{\vec{u}} = d\vec{F}_{el} + d\vec{F}_z \quad /:dV$$



Torej:

$$\rho\,\ddot{u}_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i^z$$

$$\boxed{\rho\,\ddot{u}_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i^z}$$

$$\boxed{\partial_j \sigma_{ij} + f_i^z = 0} \quad \text{(Cauchyjev pogoj)}$$

To je "volumski" pogoj za ravnovesje. Veljati mora v vsaki točki (volumna)! Dodatno imamo še robni pogoj - ravnovesje površinskih sil (na mejah):

$$\sigma_{ij}(-dS_j) + dF_i^z = 0$$

$$\sigma_{ij}\,dS_j = dF_i^z$$

Pozor: $\vec{F}^z$ in $\frac{\Delta \vec{F}^z}{\Delta S}$ nimata nobene zveze!

To sta popolnoma ločeni zadevi!

Gibalne enačbe v splošnem še ne moremo rešiti:

- Robni pogoj je lahko tudi na $\vec{u}$
- Neglede na to, problem ima 3 prostostne stopnje (npr. 3D $\vec{u}$ vektor) ne pa 6 kot pri σ_{ij}!
- Rabimo zvezo med σ_{ij} in u_{ij} (Hookov zakon) in vse moramo izraziti z $\vec{u}$

Delo pri deformaciji (rabimo za Hookov zakon)
Elastična energija

Delo, ki smo ga opravili pri deformaciji, je šlo v elastično energijo. Deformacijo naj povzroča zunanja sila $\vec{f}^z$.
Če želimo, da je delo sile $\vec{f}^z$ enako spremembi elastične energije ne smemo večati kinetične energije.

Torej je ravnovesje sil: $\vec{f}^{el} + \vec{f}^z \Rightarrow \vec{f}^{el} = -\vec{f}^z$

$\Rightarrow$ Sprememba elastič. en. je enaka negativnemu delu elastične sile.

Deformirajmo za $\delta\vec{u}$ in izračunamo spremembo elast. en. δW pri tem:

preimenujemo $\vec{f}^{el} \to \vec{f}$

ubistvu perpartes

$$\delta W = \int dV \delta w = -\int dV f_i \delta u_i = -\int dV (\partial_j \sigma_{ij}) \delta u_i =$$

$$= -\int dV \left[\partial(\sigma_{ij} \delta u_i) - \sigma_{ij} \partial_j \delta u_i \right] =$$

$$= -\oint dS_j \sigma_{ij} \delta u_i + \int dV \sigma_{ij} \partial_j \delta u_i =$$

$$= -\oint dS_j \sigma_{ij} \delta u_i + \int dV \sigma_{ij} \frac{1}{2}(\partial_i \delta u_j + \partial_j \delta u_i) =$$

1

$$= -\oint dS_j \sigma_{ij} \delta u_i + \int dV \sigma_{ij} \delta u_{ij}$$

Pogoji

Za neskončno sredstvo ali pa za na mejah neobremenjeno ($\sigma = 0$) ali na mejah ne premaknjeno ($\delta u_i = 0$) površinski del 1 odpade. !

$$\delta W = \int dV \sigma_{ij} \delta u_{ij} = \int dV \delta w$$

$$\delta w = \sigma_{ij} \delta u_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial w}{\partial u_{ij}}\right)_S$$ če predpostavimo, da ni izmenjave toplote (nismo je upoštevali v bilanci $\delta W = \delta A + \delta Q$)

Ponavadi je relevantna prosta energija; $f = w - Ts$

Tako da je $df = -s\,dT + \sigma_{ij}\,du_{ij}$

in je pač: $$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_{ij}}\right)_T \Rightarrow$$ Poznati moramo $f(u_{ij})$

Elastična energija, Hookov zakon

Zapisati želimo gostoto elast. proste energije v odvisnosti od u_{ij}; $f(u_{ij})$ do najnižjega netrivialnega reda. To je 2. red u_{ij}. Členov 1. reda ne sme biti, drugače ne obstaja stabilno ravnovesje, (implozija ali eksplozija), saj mora biti $f(u_{ij})$ za $u_{ij}=0$ minimalna (stabilno ravnovesje).

Energija je skalar, torej je lahko odvisna le od skalarjev, ki jih tvorimo iz u_{ij}. To je enostavno in velja za poljubne range; Poiskati moramo vse različne načine, katere lahko kontraktiramo indekse vse do skalarja (= Brez indeksov)

Se znebimo indeksov po pravilnem načinu.

Za u_{ij} sta samo dve možnosti:

$$u_{kk} \quad , \quad u_{ij}^2 = u_{ij}u_{ij}$$

Torej:

$$f(u_{ij}) = f_0 + \frac{1}{2}\lambda u_{kk}^2 + \mu u_{ij}^2$$

λ, μ sta "Lamé-jeva" elastična koeficienta.

To je, če imamo za tvorjenje skalarja energije na voljo le u_{ij}.

Tako je v izotropnem sistemu, ki ima rotacijsko simetrijo in nima nobene posebne lastnosti, ki bi zmanjševala to simetrijo - nobenega z manjšo simetrijo.

Primer [Tak objekt, ki zlomi simetrijo]

Tak objekt bi lahko bil npr. nek vektor $\vec{a}$, ki obstaja, če je sistem polaren.
Tak sistem ima manjšo simetrijo:

Invarianten je le še na rotacije okrog osi $\vec{a}$

Pojavijo se nove invariante:

$$a_i a_j u_{ij} u_{kk},$$

$$\frac{1}{2}(a_i a_j u_{ik} u_{jk} + a_i a_j u_{ki} u_{kj}),$$

$$(a_i a_j u_{ij})^2$$

Paziti je treba tudi na inverzijsko simetrijo. Tukaj ji je zadoščeno avtomatsko ($a_i a_j$)

=> Manjša simetrija -> Več objektov, ki jo karakterizirajo -> Več invariant
=> Več elastičnih koeficientov

V najsplošnejšem primeru, ko sistem nima več nobene rotacijske sim. je skalar tole:

$$f(u_{ij}) = f_0 + \frac{1}{2} K_{ijkl} u_{ij} u_{kl}$$

kjer je K_{ijkl} splošna elastična konstanta (Tenzor 4. ranga), kjer so K_{ijkl} poljubni.

" Ne, niso povsem poljubni, po definiciji morajo zadoščati permutacijskim simetrijam:

$$K_{ijkl} = K_{klij} = K_{jikl} = K_{ijlk}$$

kar zmanjša št. elementov iz $3^4 = 81$ na 21.
Na vajah bomo pogledali primer K_{ijkl} za sist. za diskretno rot. simetrijo (kristali).

Btw, K_{ijkl} izotropnega sistema lahko vsebuje le δ_{ij} (ni drugega objekta).

V splošnem je to metrični tenzor

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} K_{ijkl} u_{ij} u_{kl}$$

Hookov zakon: Linearna zveza med σ_{ij} in u_{ij} ($\sim F = kx$)

Po definiciji:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_{ij}}\right)_T,$$ kjer je v splošnem $$f = \frac{1}{2} K_{ijkl} u_{ij} u_{kl}$$

$$\Downarrow$$

Hookov zakon !

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl} u_{kl}$$

K_{ijkl} mora že imeti prave permutacijske simetrije!

Izračunajmo to še za set λ, μ:

$$f = \frac{1}{2}\lambda u_{kk}^2 + \mu u_{ij}^2 \Rightarrow \text{Odvod}$$

$$\downarrow$$

Hookov zakon (z λ in μ)

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda u_{kk}\delta_{ij}$$

Obratna zveza: $u_{ij}(\sigma_{ij})$

Moti nas u_{kk}, ki je vsota več komponent. Najprej povežimo u_{kk} in σ_{kk}. Vzamemo sled enačbe σ_{ij}.

$$\Rightarrow \sigma_{kk} = 2\mu u_{kk} + 3\lambda u_{kk} = (2\mu + 3\lambda) u_{kk}\ ; \quad u_{kk} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{kk}$$

Zdaj pa lahko obrnemo:

$$u_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ij} - \lambda u_{kk}\delta_{ij}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$u_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right]$$

Navierova enačba (gibalna en. + Hooke)!

Gibalna enačba: $\rho \ddot{u}_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i^z$

Hooke: $\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda u_{kk} \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \rho \ddot{u}_i = 2\mu \partial_j u_{ij} + \lambda \partial_j u_{kk} \delta_{ij} + f_i^z =$$

$$= 2\mu \partial_j \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \lambda \partial_i u_{kk} + f_i^z =$$

$$= \mu \partial_i \partial_j u_j + \mu \partial_j^2 u_i + \lambda \partial_i \partial_k u_k + f_i^z = ;$$

BTW: $u_{kk} = \partial_k u_k = \nabla \cdot \vec{u}$

$$= \mu \partial_j^2 u_i + (\lambda + \mu) \partial_i (\partial_k u_k) + f_i^z$$

Navierova enačba

Vektorski zapis:

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f}^z$$

Zapis $f = \frac{1}{2} \lambda u_{kk}^2 + \mu u_{ij}^2$ ni najlepši, ker u_{ij}^2 ni razcepljen na "ireducibilne" dele in vsebuje tudi izotropni del, ki je že zapisan že v prvem členu. Vemo, da u_{kk}^2 podaja energijo izotropnega stiskanja, medtem ko u_{ij}^2 pa enako penalizira kakršnokoli deformacijo.

Zapišimo dalje:

$$f = \frac{1}{2} K u_{kk}^2 + \mu' \left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij}\right)^2$$

Drugi člen zdaj ne vsebuje izotropne definicije.

K je stisljivostni modul (bulk modulus)

Tako lahko primerjamo: Vstavimo brezsledni u_{ij} (defor. brez izotrop. stisk.)

$$\Rightarrow f = \mu u_{ij}^2, \quad f = \mu' u_{ij}^2 \Rightarrow \mu' = \mu \text{ je strižni modul}$$

Torej: $$f = \frac{1}{2} K u_{kk}^2 + \mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij}\right)^2$$

Vstavimo izotropno deformacijo: $u_{ij} = \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij}$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2} K u_{kk}^2 + \mu\left(\frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \lambda u_{kk}^2 + \mu \frac{1}{9} u_{kk}^2 \cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\mu\right) u_{kk}^2$$

Vs.

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \; ; \; \lambda = K - \frac{2}{3}\mu \qquad \Leftarrow \qquad f = \frac{1}{2} K u_{kk}^2$$

Vaja [Še direktno povežimo]:

$$\frac{1}{2} K u_{kk}^2 + \mu'\left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij}\right)^2 = \frac{1}{2} K u_{kk}^2 + \mu'\left[u_{ij}^2 - \frac{2}{3} u_{ij} u_{kk} \delta_{ij} + \frac{1}{9} u_{kk}^2 3\right] =$$
$$= \frac{1}{2} K u_{kk}^2 + \mu'\left(u_{ij}^2 - \frac{2}{3} u_{kk}^2 + \frac{1}{3} u_{kk}^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2} K u_{kk}^2 - \frac{1}{3} \mu' u_{kk}^2 + \mu' u_{ij}^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{2} K - \frac{1}{3}\mu'\right) u_{kk}^2 + \mu' u_{ij}^2 \Rightarrow \qquad \mu' = \mu, \quad \frac{1}{2} K - \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{2}\lambda$$

Še nekaj:
$$f = \frac{1}{2} K u_{kk}^2 + \mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij}\right)^2$$

Izotropna in brezsledna deformacija sta neodvisni. Lahko imamo tudi samo eno ali drugo.

$$\Rightarrow K > 0 \, , \, \mu > 0$$ Za pozitivno definitnost f (stab. ravnovesje)

To recimo nevelja za λ ali druge "ad-hoc" kombinacije

Hookov zakon za par K, μ dobimo odtod z upoštevanjem zveze:

$$\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$$

Za trening pa dajmo še direktno z:

$$f = \frac{1}{2} K u_{kk}^2 + \mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij}\right)^2 = \frac{1}{2} K u_{kk}^2 + \mu \left(u_{lm} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{lm}\right) \cdot$$
$$\cdot \left(u_{lm} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{lm}\right)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u_{ij}} = K u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{lm} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{lm}\right)\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{lm}\right) =$$
$$= K u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{9} u_{kk} \delta_{ij}\right) =$$
$$= K u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} - \frac{2\mu}{3} u_{kk} \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_{ij} = K u_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{kk} \delta_{ij}\right).$$

K podaja napetosti pri izotropnem stiskanju

μ podaja napetosti pri brezsledni deformaciji

Primer [Izotropna deformacija]

stisljivost $\chi_T = \frac{1}{K}$

$$\sigma_{ij} = K u_{kk} \delta_{ij} \Rightarrow \sigma_{kk} = 3K u_{kk}$$
$$-3p = 3K \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K} p$$

Primer [Strižna deformacija]

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = 2\mu u_{ij}, \quad \sigma_{xy} = 2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

in to je klasično

$$\frac{F_x}{S_y} = \mu \frac{\Delta x}{\Delta y}; \quad \mu \ldots \text{strižni modul}$$

Z novimi parametri:

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \mu \nabla^2 \vec{u} + \left(K + \frac{1}{3}\mu\right) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \vec{F}^z$$

Fundamentalna rešitev statične navierove enačbe (Greenova funkcija) (Kelvinova rešitev)

Za neskončno sredstvo!
Rešujemo enačbo:

$$\nabla^2 \vec{u} + \frac{K + \mu/3}{\mu} \nabla \nabla \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\mu} \vec{F}^z$$

Greenova funkcija je rešitev v primeru točkaste nehomogenosti.
Izjava velja splošno in za splošno "geometrijo".

$$\nabla^2 \vec{u} + \frac{K + \mu/3}{\mu} \nabla \nabla \cdot \vec{u} = -\frac{1}{\mu} \vec{f}^{\,0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Če poznamo Greenovo funkcijo, poznamo rešitev za poljubno nehomogenost. (Zato fundamentalna rešitev). V našem primeru Greenova funkcija povezuje $\vec{u}$ in $\vec{F}^z$ in je torej tenzor: $G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0)$

$$u_i^0(\vec{r}) = G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0) f_j^0(\vec{r}_0)$$

$\Rightarrow$ Za poljubno nehomogenost $\vec{F}^z(\vec{r}_0)$:

$$u_i^0(\vec{r}) = \int d^3 r_0 \, G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0) f_j^z(\vec{r}_0)$$

Ker je N. enačba linearna:
Rešitev vsote (sil) je vsota rešitev namreč:
Poljubna porazdelitev sile $\vec{F}^z(\vec{r})$ sestavimo iz točkastih sil:

$$\vec{F}^z(\vec{r}) = \int d^3 r_0 \, \vec{F}^z(\vec{r}_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

in enako sestavimo rešitev:

$$\vec{u}_i(\vec{r}) = \int d^3r_0 f_j^z(\vec{r}_0) G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

Primer [Potencial točkastega naboja]

$$\phi^0(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$ je G. F. enačbe $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Torej $\nabla^2\phi^0(\vec{r}) = -\frac{e^0}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$,

Rešitev za poljubna porazd. naboja pa je: $\phi(r) = \int d^3r_0 \frac{\rho(\vec{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

Ok, Izračunajmo G.F. Navierove enačbe za neskončni prostor.
Problem je, da člen $\nabla\nabla\cdot\vec{u}$ sklaplja komponente $\vec{u}$.
Vzamemo Galerkinov nastavek: $\vec{u} = a\nabla^2\vec{g} - b\nabla\nabla\cdot\vec{g}$, kjer sta a, b poljubni konstanti. Vstavimo to v enačbo:

$$\vec{a}\nabla^2\nabla^2\vec{g} - b\nabla^2\nabla\nabla\cdot\vec{g} + \frac{K+\mu/3}{\mu}\nabla\nabla\cdot\left[a\nabla^2\vec{g} - b\nabla\nabla\cdot\vec{g}\right] = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

$$\vec{a}\nabla^2\nabla^2\vec{g} - b\nabla^2\nabla\nabla\cdot\vec{g} + \frac{K+\mu/3}{\mu}\left[a\nabla^2\nabla\nabla\cdot\vec{g} - b\nabla^2\nabla\nabla\vec{g}\right] = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

$$\vec{a}\nabla^2\nabla^2\vec{g} + \left(-b + \frac{K+\mu/3}{\mu}(a-b)\right)\nabla^2\nabla\nabla\cdot\vec{g} = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

$\nabla\nabla\cdot = \underbrace{\nabla\times\nabla\times}_{\text{in na to grad.} \Rightarrow \text{1. člen } 0} + \nabla^2$

Izberimo a, b tako, da drugi člen odpade!

$$\Rightarrow -\mu b + (K + \mu/3)(a-b) = 0 \Rightarrow b = \frac{K+\mu/3}{K+\frac{4}{3}\mu}a, \quad a = 1$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \nabla^2\vec{g} - \frac{K+\mu/3}{K+4/3\mu}\nabla\nabla\cdot\vec{g}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{\underline{\nabla^2\nabla^2\vec{g} = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z}}$$

Biharmonična enačba!

Sicer višjega reda, a komponente $\vec{g}$ niso sklopljene. Rešimo $\vec{g}(\vec{r})$, nato izračunamo $\vec{u}(\vec{r})$

Imamo skalarno biharmonično enačbo za vsako (neodvisno) komponento. Poiščimo njeno G.F.

$$\nabla^2 \underbrace{\nabla^2 u}_{w} = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

u je tu neka splošna skalarna funkcija

Vemo pa pa za Poissonovo enačbo:

$$\nabla^2 w = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \Rightarrow w = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 u = w$$

Postavimo izhodišče v $\vec{r}=\vec{r}_0$, na koncu pa samo premaknemo rešitev (Translac. invar. due to inf. space)

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\nabla\cdot\nabla u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{r}{4\pi}$$

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r^2}{8\pi} + \cancel{\text{const.}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{8\pi} + \cancel{\frac{\text{const.}}{r^2}}$$

$$\Rightarrow \quad u = -\frac{r}{8\pi} + \text{const.} \quad \text{oz.} \quad u(\vec{r}) = -\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{8\pi} + \text{const.}$$

Torej: $\nabla^2\nabla^2 u = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$; $u(\vec{r}) = -\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{8\pi} + \text{const.}$

$$\Rightarrow \nabla^2\nabla^2 \vec{g} = -\frac{1}{\mu}\vec{F}^0\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$\hookrightarrow \vec{g} = \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{8\pi\mu}\vec{F}^0 + \overrightarrow{\text{const.}}$$

Izračunajmo: $\vec{u} = \nabla^2 \vec{g} - \frac{K + \mu/3}{K + \frac{4}{3}\mu} \nabla\nabla\cdot\vec{g}$

$$\nabla^2 \vec{g} = \frac{1}{\mu} \vec{F}^0 \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

To že vemo, preverimo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g_i = \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)_j}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \left[\frac{3}{\sqrt{(\vec{r}-\vec{r}_0)}} - \frac{1}{2}(r-r_0)_j \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_0)_j}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^{3/2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \left[\frac{3}{\sqrt{}} - \frac{1}{\sqrt{}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu} f_i^0 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

Torej:

$$(\nabla\nabla\cdot\vec{g})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} g_j = \frac{1}{8\pi\mu} f_j^0 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)_j}{\sqrt{}} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} f_j^0 \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{}} - \frac{1}{8\pi\mu} f_j^0 (\vec{r}-\vec{r}_0)_j \frac{1}{2} \frac{2(\vec{r}-\vec{r}_0)_i}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{1}{8\pi\mu}\left(\vec{f}^0\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)\right)\frac{(r-r_0)_i}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{u} = \frac{1}{4\pi\mu}\left\{\frac{\vec{F}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{K + \mu/3}{K + 4/3\,\mu}\frac{1}{2}\left[\frac{\vec{F}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} - \frac{(\vec{F}^0\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0))(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu}\frac{1}{K + \frac{4}{3}\mu}\left\{\left(K + \frac{4\mu}{3} - \frac{1}{2}K - \frac{1}{2}\frac{\mu}{3}\right)\frac{\vec{F}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{1}{2}\left(K + \frac{\mu}{3}\right) f^0\cdot(r-r_0)\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right\} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{K+\mu/3}{K+4/3\mu}\left[\frac{K+7/3}{K+\frac{1}{3}\mu}\frac{\vec{F}_0}{|r-\vec{r}_0|} + \vec{F}_0\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right] = \vec{u}^0(\vec{r})$$

Na začetku smo to zapisali kot: $u_i^0(\vec{r}) = G_{ij}(\vec{r},\vec{r}_0')f_j^0$. Greenova f. $G_{ij}(\vec{r},\vec{r}_0)$ je torej:

$$G_{ij}(\vec{r},\vec{r}_0) = \frac{1}{8\pi\mu}\frac{3K+\mu}{3K+4\mu}\left[\frac{3K+7\mu}{3K+\mu}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\delta_{ij} + \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)_i(\vec{r}-\vec{r}_0)_j}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\right]$$

$$\propto \frac{1}{r}$$

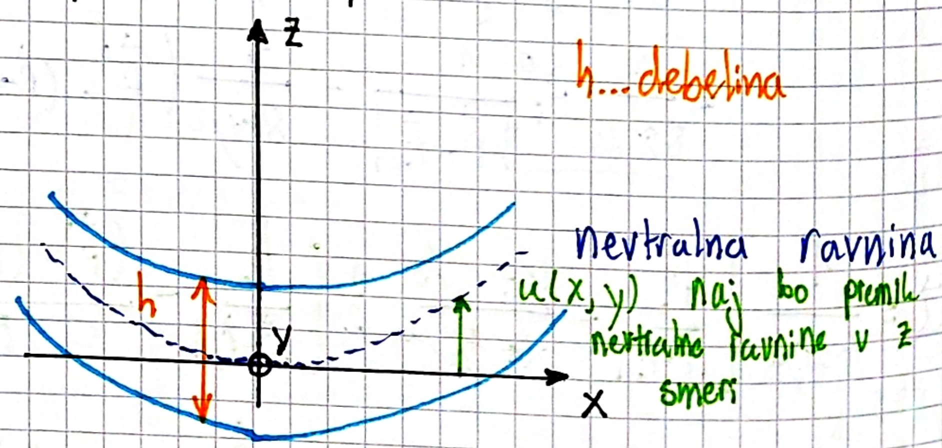
Upogib tankih ravnih plošč (V Landau-u!)

- Tanke: Debelina majhna v primerjavi z ostalima dimenzijama
- Ravna: Upogib v 1. približku ne povzroči raztezanja v ravnini plošče

  Če je plošča ukrivljena (v ravnovesju) (lupina), se pri upogibanju v splošnem razteza.

- Obravnavamo majhen upogib: Premiki majhni glede na debelino.

V principu je vse opisano z Navierovo enačbo (ustrezna limita za tanko ploščo), vendar se standardno na novo izpelje iz upogibne energije, ki se jo zapiše v približku 2D plošče



Premiki v nevtralni ravnini (jih ni) so drugega reda in jih zanemarimo:

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0$$

- Iz predpostavke o napetostnih dobimo komponente u_{ij} v celotni plošči (3D polje)
- Notranje napetosti (raztezanje vzdolž plošče) so dosti večje od površinskih obremenitev, s katerimi upogibamo ploščo (ker je plošča tanka, navor, ročica debelina)

=> Površinske obremenitve zanemarimo!

Male glede na notranje napetosti

$\sigma_{ij} u_j = 0$, $\vec{n} = \hat{e}_z$ => $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ na površini

ker je plošča tanka, je to majhno povsod! Torej majhno proti ostalimi σ_{ij} => zanemarimo.

=> $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$ povsod ← odtod določimo komponente u_{ij} preko Hooke

Uporabimo Hookov zakon: $\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{kk} \delta_{ij}\right)$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_{xz} = 0 \Rightarrow u_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yz} = 0 \Rightarrow u_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-2\sigma)u_{zz} + \sigma u_{kk}\right] = \frac{E}{(\ldots)}\left[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx}+u_{yy})\right] = 0$$

Iz u_{xz} ↳ => $\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial y}$, } Rešiti želimo z profil, da ostane le še (x,y) odvisnost => 2D problem

$u_z \approx u(x,y)$ (premik nevtralne ravnine)

=> $u_x = -z\frac{\partial u}{\partial x}$ $u_y = -z\frac{\partial u}{\partial y}$ ← Integracijski konstanti sta 0, ker želimo pri $z=0 \to u_x = u_y = 0$.

Odtod določimo vse komponente u_{ij}:

$$u_{xx} = -z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{yy} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_{xy} = -z\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$u_{xz} = u_{yz} = 0 \quad \text{(prvotna zahteva)}$$

$$u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}\left[\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right] = \frac{\sigma}{1-\sigma} z\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Izračunajmo energijo upognjene plošče po definiciji:

$$f = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ij}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}^2\right)$$

in jo integriramo po z tako, da ostane le še 2D problem.

$$f = \frac{E}{1-\sigma} z^2 \left\{\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\right\}$$

Preveč časa, ni zanimivo, je Svenšek preveril

Energija: integral po z je trivialen, $\int_{-h/2}^{h/2} dz\, z^2 \ldots = \ldots \frac{z^3}{3}\Big|_{-h/2}^{h/2} = \ldots \frac{2}{24} h^3$

$$\Rightarrow F = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\int dx dy \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\right\}$$

Ravnovesje: $F(u)$ mora biti minimalna $\Rightarrow \delta F = 0$ (variacija po $u(x,y)$)

Če deluje še zunanja sila v z smeri:

$$P(x,y) = \frac{\Delta F}{\Delta S}(x,y)$$

mora biti minimalna $F + F_p$, kjer je F_p potencialna energija zunanje sile,

$$F_p = -\int dx dy\, P u$$

$$\Rightarrow \delta(F + F_p) = 0 = \delta F - \int dx dy\, P \delta u = 0$$

Variacija prvega dela elast. energije

$$\delta \frac{1}{2}\int dS (\nabla^2 u)^2 ; \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\delta\int dS\,\tfrac{1}{2}(\nabla^2 u)^2 = \int dS\,\nabla^2 u\,\nabla^2\delta u = \boxed{\int dS\,\nabla\cdot(\nabla^2 u\,\nabla\delta u)} - \int dS\,\nabla(\nabla^2 u)\cdot\nabla\delta u =$$

$$\nabla\cdot(f\vec{v}) = \nabla f\cdot\vec{v} + f\,\nabla\cdot\vec{v}$$

Prvega prepišemo na rob (2D Gauss):

$$\int dS\,\nabla\cdot[\,] = \oint dl(\vec{n}\cdot\nabla\delta u)\,\nabla^2 u = \oint dl\,\frac{\partial\delta u}{\partial n}\nabla^2 u\ ;\quad \frac{\partial}{\partial n}$$ odvod v smeri normale navzven

Drugega predelajmo naprej: Izrazit ga želimo z δu namesto $\nabla\delta u$ (kot običajno pri variaciji).

$$-\int dS\,\nabla(\nabla^2 u)\cdot\nabla\delta u = -\int dS\,\nabla\cdot((\nabla\nabla^2 u)\delta u) + \int dS\,(\nabla^2\nabla^2 u)\delta u =$$

$$= -\oint dl(\vec{n}\cdot\nabla\nabla^2 u)\delta u + \int dS(\nabla^2\nabla^2 u)\delta u =$$

$$= -\oint dl\,\frac{\partial\nabla^2 u}{\partial u}\delta u + \int dS\,(\nabla^2\nabla^2 u)\delta u$$

$$\Rightarrow \delta\int dS\,\tfrac{1}{2}(\nabla^2 u)^2 = \int dS\,(\nabla^2\nabla^2 u)\delta u - \oint dl\,\frac{\partial\nabla^2 u}{\partial n} + \oint dl(\nabla^2 u)\delta\frac{\partial u}{\partial n}$$

Variacija drugega dela elastične energije $\propto \delta\int dS\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$ je dolgovezna, a se prevede v celoti na rob

Torej: Zahteva, da je ničelna površinski del variacije, vodi ravnovesne enačbe z $u(x,y)$

– II –, da je robni del variacije, pa do robnih pogojev.

Površinski del variacije $\delta F - \int dS\,P\delta u = \int dS\,[D\nabla^2\nabla^2 u - P]\,\delta u = 0$

$$\Rightarrow D\nabla^2\nabla^2 u - P = 0\ ;\quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

$u = u(x,y)$
$P = P(x,y)$
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$

Še to: [ ] je očitno površinska gostota celotne zunanje sile na delček.

$-D\nabla^2\nabla^2 u$ je površinska gostota elastič. sile na delček
minus

· Zlahka dopolnimo v dinamično enačbo: $+\rho_s\ddot{u} = -D\nabla^2\nabla^2 u + P$

Pomen robnega dela variacije: Pomembno !

$$\delta F = \oint dl\,[A]\,\delta u + \int dl\,[B]\,\delta \frac{\partial u}{\partial n}$$

Pomembno je tole:
- Če je na robu δu poljuben => $[A] = 0$ (robni pogoj)
- Če je na robu $\delta \frac{\partial u}{\partial n}$ poljuben => $[B] = 0$ (robni pogoj) (vrtljivo vpeto)

Še to: $[A]$ je očitno dolžinska gostota zun. sile na rob plošče

$[B]$ je očitno dolžinska gostota zunanjega navora na rob plošče

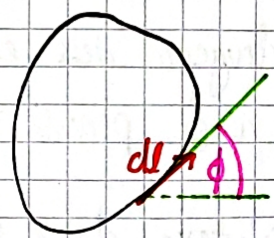
Če je na robu $\delta u = 0 \Rightarrow [A]$ v splošnem ni nič (sila podpore)

Če je na robu $\delta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \Rightarrow [B]$ v splošnem ni nič (navor vpetja)

Primera dovolj enostavnih robnih pogojev

- Nevrtljivo vpeta plošča: $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$
- Prislonjena (vrtljivo) vpeta plošča: $u = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \sigma \frac{d\phi}{dl} \frac{\partial u}{\partial n} = 0$

je odvod smeri (kota) v smeri roba



Tanke palice

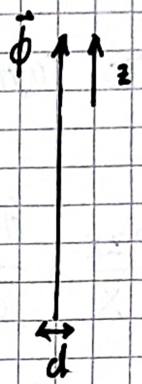
- Najprej bomo obravnavali lokalne razmere pri torziji (zvoj) in upogibu. Celotno deformacijsko polje v palici v odvisnosti od:
  - Torzijskega kota $\tau = \frac{d\phi}{dl}$
  - Krivinskega radija upogiba R
- Odtod dobimo dolžinsko gostoto deformacijske energije, palica pa postane le 1D krivulja, odvisnost le od dolžinskega parametra l.
- Nato zapišemo enačbo za obliko obremenjene palice (torzija, upogib) v odvisnosti od l.

- Premiki so lahko poljubno veliki, saj je palica dolga – "Elastični filament"
- Nazadnje naredimo še limito za majhen upogib ravne palice (premiki majhni glede na dolžino – smer palice imamo za konstantno)

Torzija

- Obravnavamo tanko ravno palico s poljubnim presekom. Obravnavamo šibko torzijo:

d... debelina palice



$$\tau = \frac{d\phi}{dl} \text{ majhen v smislu } \tau d \ll 1$$

Presek pri $z=0$ naj ne bo zasuk ($\phi(z=0)=0$).
Poiščimo $\vec{u}$ v okolici $z=0$ in odtod u_{ij}.

V 1. približku se presek suče okrog z osi:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\phi} \times \vec{r} \;;\; \delta\vec{\phi} = \delta\phi\,\hat{e}_z$$

Za $z=0$:

$$\delta\phi = \tau z \Rightarrow u_x = -\tau z y,\; u_y = \tau z x$$

Premiki so tudi v z smeri !

$$u_z = \tau\,\Psi(x,y)$$

Malo nenavadno, da smo zapostavili

$\Psi(x,y)$ "torzijska funk."
Odvisnost od τ mora biti vsaj linearna in jo IZPostavimo

Zapišimo u_{ij}:

$$u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0$$

$$u_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} - y\right)\tau$$

$$u_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y} + x\right)\tau$$

Izračunajmo sedaj σ_{ij}:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$$

Te so bili trivialni, sedaj pa z Hookeovim zakonom:

$$\sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)$$

Potrebujemo ravnovesni pogoj:

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$ (Avtomatsko, ni z odvisnosti)

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0}}$$

Ugodno je vpeljati drugo funkcijo $\chi(x,y)$, ki bo zadoščala enostavnejšemu robnemu pogoju.

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau \frac{\partial\chi}{\partial y}$$

$$\sigma_{yz} = -2\mu\tau \frac{\partial\chi}{\partial x}$$

Torej:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = y + 2\frac{\partial\chi}{\partial y} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -x - 2\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

ψ se znebimo preko mešanega odvoda in odštevanja:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 1 + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = 1 - 2\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}$$