Izračunajmo sedaj σ_{ij}:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0$$

Te so bili trivialni, sedaj pa z Hookeovim zakonom:

$$\sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)$$

Potrebujemo ravnovesni pogoj:

$$\partial_j \sigma_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad \text{(Avtomatsko, ni z odvisnosti)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0}$$

Ugodno je vpeljati drugo funkcijo $\chi(x,y)$, ki bo zadoščala enostavnejšemu robnemu pogoju.

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau\frac{\partial\chi}{\partial y}$$

$$\sigma_{yz} = -2\mu\tau\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

Torej:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = y + 2\frac{\partial\chi}{\partial y} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -x - 2\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

ψ se znebimo preko mešanega odvoda in odštevanja:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 1 + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}$$

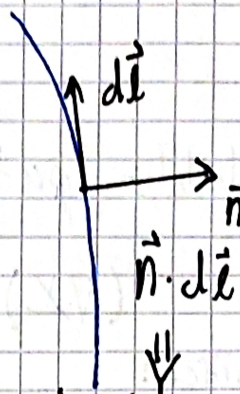
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = 1 - 2\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -1$$

Robni pogoj: Napetosti na plašč tanke palice so zanemarljive proti ostalim (notranjim) napetostim (kot pri tanki plošči).

$$\Rightarrow \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y = 0, \quad n_z = 0$$

To izraženo s χ: $\dfrac{\partial \chi}{\partial y} n_x - \dfrac{\partial \chi}{\partial x} n_y = 0$



$\vec{n} \cdot d\vec{l} = 0$

$\Downarrow$

$\vec{n} = \dfrac{(dy, -dx)}{dl}$

Normalo na rob izrazimo z vektorjem $d\vec{l} = (dx, dy)$

Vzdolž roba:

$$\Rightarrow \frac{\partial \chi}{\partial y} dy + \frac{\partial \chi}{\partial x} dx = d\chi = 0 \text{ na robu}$$

$$\Rightarrow \chi = \text{konst. na robu}$$

Če imamo le en rob (enostavno povezano območje / presek) lahko postavimo kar $\chi = 0$ na robu. Če je več robov so konstante v splošnem različne

Energija

$$f = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij}$$

Namreč: $df = \sigma_{ij}(u_{ij}) du_{ij}$; σ_{ij} je linearna funkcija

$$f = \int_0^{u_{ij}} \sigma_{ij}(u_{ij}) du_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}(u_{ij}) u_{ij}$$

Torej:

$$f = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{xz} u_{xz} + \sigma_{zx} u_{zx} + \sigma_{yz} u_{yz} + \sigma_{zy} u_{zy} \right) =$$

$$= \sigma_{xz} u_{xz} + \sigma_{yz} u_{yz} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 \right) =$$

$$= 2\mu \tau^2 \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$= 2\mu \tau^2 (\nabla \chi)^2$$

Pointegrirajmo da ostane le še dolžina:

$$F = \int dz\, dS\, f = \int dz\, dS\, 2\mu \tau^2 (\nabla\chi)^2 \equiv \frac{1}{2} C \int \tau^2 dz$$

kjer je C torzijski modul palice:

$$C = 4\mu \int dS (\nabla\chi)^2$$

C lahko predelamo z upoštevanjem identitete:

$$(\nabla\chi)^2 = \nabla\cdot(\chi\nabla\chi) - \chi\overset{-1}{\nabla^2\chi}$$

namreč:

Torej:

$$C = 4\mu\int dS(\nabla\chi)^2 = 4\mu\left[\int dS\, \nabla\cdot(\chi\nabla\chi) + \int dS\, \chi\right] =$$

$$= 4\mu\left[\int dl\, (\vec{n}\cdot\nabla\chi)\chi + \int dS\, \chi\right]$$

$\Rightarrow$ Za le en rob, kjer je $\chi = 0$ ostane:

$$C = 4\mu\int dS\, \chi(x,y)$$

Ilustracija za $\tau = \text{konst.} = \frac{\phi}{l}$

$$F = \frac{1}{2} C\int_0^l \tau^2 dz = \frac{1}{2} C\tau^2 l = \frac{1}{2} \frac{C}{l}\phi^2 \Rightarrow M = \frac{dF}{d\phi} = \frac{C}{l}\phi \equiv D\phi = C\tau$$

!

$$\Rightarrow D = C/l$$

Analogno npr. $F = \frac{ES}{l} x$, $F = kx$

$M = C\tau$, navor na presek

Bolj "učeno": $F = \frac{1}{2} C\int \tau^2 dz = \frac{1}{2} C \int \left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 dz$

$$\delta F = C\int dz \frac{d\phi}{dz}\delta\left(\frac{d\phi}{dz}\right) = C\int dz \frac{d}{dz}\left[\frac{d\phi}{dz}\delta\phi\right] - C\int dz\left(\frac{d^2\phi}{dz^2}\right)\delta\phi =$$

$$= C\frac{d\phi}{dz}\delta\phi\Big|_1^2 - C\int dz\,\underbrace{\frac{d^2\phi}{dz^2}}\delta\phi$$

Če zahtevamo $\delta F = 0$: $\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dz} = \tau =$ const.

$$C\tau\delta\phi\Big|_{z_2} - C\tau\delta\phi\Big|_{z_1}$$

$\Rightarrow M = C\tau$ navor na presek (z_2 poljuben)

Upogib

Spet obstaja nevtralna ploskev v kateri ni raztezka, na eni strani nje je raztezek na drugem pa skrček.

Obravnavamo upogib majhnega dela palice, ki je šibko upognjen:

- Premik je majhen glede na debelino.
- Določiti želimo lokalno 3D def. polje

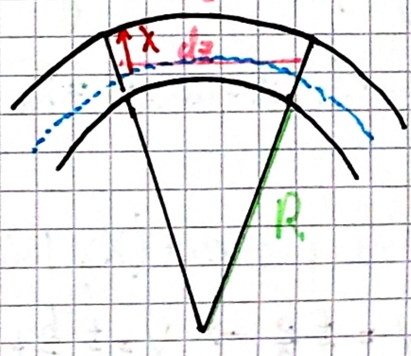
Izhodišče v nevtralni ravnini, os z v smeri palice, upogib v xz ravnini. Za majhne upogibe je upogib v eni ravnini (pritisnjena ravnina krivulji palice. Vrtenje te ravnine "Torzija" je višjega reda kot ukrivljenost.
↳ To ni torzijska deformacija

(Najprej mora obstajati ukrivljenost, ki definira pritis. rav., šele nato jo lahko vrtimo).

Zunanje napetosti na plašč palice so spet zanemarljive proti notranjim in ker je palica tanka, so te napetosti zanemarljive tudi znotraj

$\Rightarrow$ Neničelen je le σ_{zz}! (Enostavno raztezanje/krčenje)

Določimo ta raztezek:



$$dz' = \frac{R+x}{R}dz \Rightarrow \frac{dz'-dz}{dz} = \frac{x}{R} = u_{zz}$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = Eu_{zz} = E\frac{x}{R}$$

Določimo lego nevtralne ploskve tako, da je celotna raztezek po preseku nič, torej da je celotna sila v z smeri nič,

$$\int \sigma_{zz} dS = 0$$

$\Rightarrow \int dS\, x = 0 \Rightarrow$ Nevtralna ploskev gre skozi središča presekov.

Določimo celotno deformacijsko polje:

Za enoosne raztezke vemo $u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$ (σ... poissonovo št.)

Torej:

$$u_{zz} = \frac{x}{R},\quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma \frac{x}{R},\quad 2u_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$$

$$2u_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$$

$$2u_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

Integriramo sedaj to (lahko doma za zabavo):

$$u_x = -\frac{1}{2R}\left[z^2 + \sigma(x^2 - y^2)\right]$$

$$u_y = -\frac{\sigma}{R} xy$$

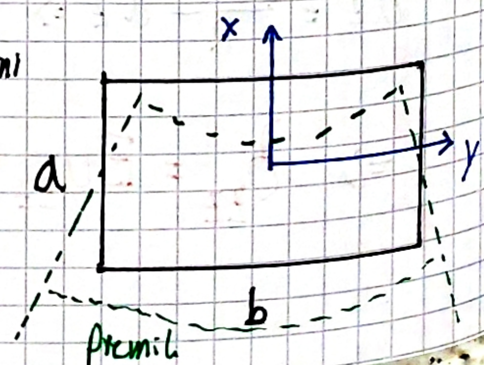
$$u_z = \frac{1}{R} xz$$

(integracijske konstante so postavljene na 0, tako da se izhodišče ne premakne)

Poglejmo, kako to izgleda:

- Presek $z = \text{konst.} = z_0$ $\quad z = z_0 + u_z = z_0\left(1 + \frac{x}{R}\right)$ Ostane ravno/lin. v x a nagnjeno

- Oblika preseka (xy ravnina): Recimo na pravokotni presek (a, b)
  - $y = \pm \frac{b}{2} \rightarrow y = \pm \frac{b}{2} + b_y = \pm \frac{b}{2}\left(1 - \frac{\sigma}{R} x\right)$



$$\cdot\ x = \pm\frac{a}{2} \to \underset{x''}{\pm\frac{a}{2} + u_x} = \pm\frac{a}{2} - \frac{1}{2R}\left[z_0^2 + \sigma\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)\right]$$

Energija

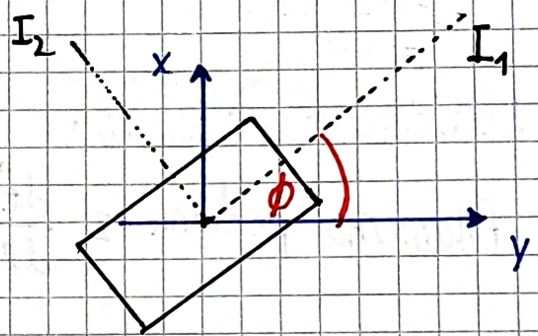
$$f = \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{zz}u_{zz}$$

$$\Rightarrow \quad f = \frac{1}{2}E\frac{x^2}{R^2} \quad \Big\}\ \text{volumska gostota energije}$$

Da pridemo do dolžinske:

$$\frac{F}{l} = \frac{1}{2}\frac{E}{R^2}\int dS\, x^2 \ ; \qquad \int dS\, x^2 \equiv$$ 2. ~~mo~~ moment, podobno (kot vztrajnosti samo brez mase)

$$\Rightarrow \quad \frac{F}{l} = \frac{1}{2}\frac{E I_y}{R^2}$$



Navor na preseku:

$$I_y = I_1\cos^2\phi + I_2\sin^2\phi$$

$$I_{ij} = \int dS\left(r^2\delta_{ij} - x_i x_j\right)$$

Okrog y osi:

$$M_y = \pm\int dS\, x\,\sigma_{zz} = \frac{E}{R}\int dS\, x^2 = \frac{E I_y}{R}$$

V splošnem neničelno

Okrog x osi:

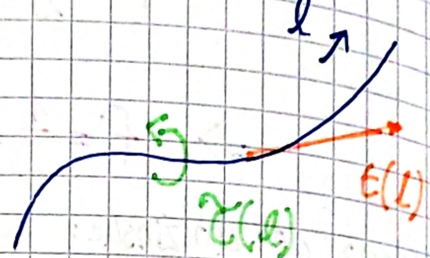
$$M_x = \pm\int dS\, y\,\sigma_{zz} = \pm\frac{E}{R}\int dS\, xy \equiv \frac{E I_{xy}}{R}\ !$$

Če upogib ni okrog lastne osi I, potem navor, potrebnega zanj ni v isti smeri kot kot upogiba.

Oz.: Palica se ne opogne v smeri navora.

Sedaj poznamo energijo torzije na dolž. enoto in upogiba na (D.F.?)

Lahko preidemo na elastični filament, ki ga v celoti opišemo s $\vec{t}(l)$ in $\tau(l)$
(enotska tangenta) (torzija)



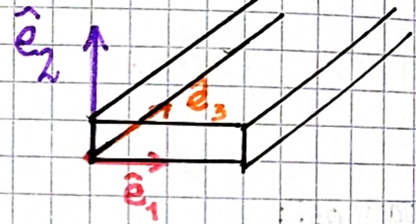
V primeru, ko $I_1 \neq I_2$ je pri upogibu komplikacija:

- Pomembno je v kateri smeri glede na lastni sistem I kaže vektor ukrivljenosti $\frac{d\vec{t}}{dl}$

Energija elastičnega filamenta

Deformacija filamenta podana z $\frac{d\vec{t}}{dl}(l)$ in $\tau(l)$, torej upogib in torzija.

Definiramo trirob (trirado) vektorjev $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.



$\hat{e}_3$ je v smeri filamenta, $\hat{e}_3 = \vec{t}$

$\hat{e}_1, \hat{e}_2$ sta v lastnih smereh I

Energijo izrazimo z $\vec{\Omega} = \frac{d}{dl}\vec{\phi}$

$d\phi$ je kot infinitez. rotacije sosednjih trirobov, $\vec{\Omega}$ je "hitrost" sukanja triroba. Energija bo kvadratna v $\vec{\Omega}$.

Jasno je, da je $\Omega_3 = \tau$ (torzija)

Upogib: $\frac{d\vec{t}}{dl}$ je vektor ukrivljenosti, definira smer glavne normale, njegova velikost je:

$$\left|\frac{d\vec{t}}{dl}\right| = \frac{1}{R}$$

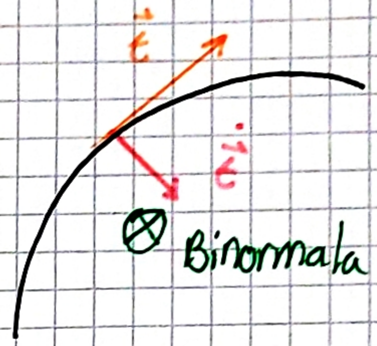
To je "hitrost" obračanja tangente, zapišimo jo z $\vec{\Omega}$!

$$\Rightarrow \frac{d\vec{t}}{dl} = \vec{\Omega} \times \vec{t} \quad ; \text{ standardna rotacija vektorja}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

Izraziti želimo $\vec{\Omega}$, vektorsko množimo s $\vec{t}$

$$\Rightarrow \vec{t}\times\frac{d\vec{t}}{dl} = \vec{t}\times(\vec{\Omega}\times\vec{t}) = (\vec{t}\cdot\vec{t})\vec{\Omega} - (t\cdot\vec{\Omega})\vec{t}$$



$$\Rightarrow \vec{\Omega} = \underbrace{\vec{t}\times\frac{d\vec{t}}{dl}}_{\substack{\text{Smer binormale} \\ \text{"Kotna hitrost" upogibanja}}} + \underbrace{(t\cdot\vec{\Omega})\vec{t}}_{\substack{\text{To vemo,} \\ \tau\vec{t}}}$$

Energija je kvadratna v $\vec{\Omega}$, torej se izraža s členi oblike $\Omega_i\Omega_j$

Členov $\Omega_1\Omega_3$ in $\Omega_2\Omega_3$ ne more biti, če je filament homogen v vzdolžni smeri (invariantna na $\hat{e}_3 \to -\hat{e}_3$) saj pri $\hat{e}_3 \to -\hat{e}_3$ spremenita predznak.

Za $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ imamo le torzijo, njeno energijo poznamo:

$$F/l = \frac{1}{2}C\tau^2 = \frac{1}{2}C\tau_3^2$$

Enačbe so pregledne, če je $I_1 = I_2 = I$

$$\Rightarrow (M_1, M_2) = EI(\Omega_1, \Omega_2)$$

Tako je:

$$\vec{M} = c\tau\vec{t} + EI\vec{t}\times\dot{\vec{t}}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dl} + \vec{t}\times\vec{F} = 0$$

$$\frac{d\vec{F}}{dl} + \vec{K} = 0$$

V tem primeru upogib tudi ne povzroča torzije. Obratno pa vedno obstaja t.i. torzijska nestabilnost.

Namreč: Poglejmo odvod torzijskega navora:

$$\underbrace{\frac{d}{dl}(\vec{M}\cdot\vec{t})}_{\parallel \; c\frac{d\tau}{dl}} = \cancel{\frac{d\vec{M}}{dl}\cdot\vec{t}} + \vec{M}\cdot\frac{d\vec{t}}{dl} = \vec{M}\cdot\frac{d\vec{t}}{dl} = (c\tau\vec{t} + EI\vec{t}\times\dot{\vec{t}})\cdot\dot{\vec{t}} = 0$$

$$\frac{d\vec{M}}{dl} = -\vec{t}\times\vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dl} = 0, \quad \tau = \text{const.}$$

Če (npr.) na začetku filamenta ni torzijskega navora, je tam $\tau = 0$ in je torej $\tau = 0$ povsod.

- Za $I_1 = I_2 = I$ lahko imamo torej tudi samo upogib, za poljuben upogib. V tem primeru lahko pišemo:

$$\vec{M} = EI\vec{t}\cdot\dot{\vec{t}}, \quad \frac{d\vec{M}}{dl} + \vec{t}\times\vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow EI\vec{t}\times\ddot{\vec{t}} + \vec{t}\times\vec{F} = 0$$

Majhen upogib:

- Smer (tangenta) palice se le malo spremeni. Odtod sledi tudi, da so premiki majhni glede na dolžino (Geometrija) Vendar je to le potrebni pogoj (Stranski učinek malo spremenjene $\vec{t}$ tangente).

. Izhajamo iz $\frac{d\vec{F}}{dl}+\vec{K}=0$ in $\frac{d\vec{M}}{dl}+\vec{t}\times\vec{F}=0$

Cilj je, da se znebimo sile $\vec{F}$

$$\hookrightarrow \frac{d^2\vec{M}}{dl^2}+\vec{t}\times\frac{d\vec{F}}{dl}+\frac{d\vec{t}}{dl}\times\vec{F}=0$$

Tole pa je $-\vec{K}$

Vendar zadnjega člena ne moremo zavreči,

Uspeli se bomo znebiti prečne sile $\vec{F}_\perp$, ki povzroča upogib

Enačbo je treba konsistentno zapisati v najnižjem redu (T.j. 1. redu) odmikov. Začnimo z $\vec{M}$, odvajamo ga kasneje.

Naj bo $\vec{t}\approx\hat{e}_z$ $\qquad dl=\sqrt{dz^2+dx^2+dy^2}=dz\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dl}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}} \rightsquigarrow dz=dl \text{ v 1. redu prečnih odmikov } x, y$$

Zapišemo tangento: $\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{dl}=\frac{d\vec{r}}{dz}\frac{dz}{dl}\approx\left(\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz},1\right)$

. Kinematika: $\vec{t}\times\dot{\vec{t}}\approx\left(\frac{dx}{dz},\frac{dy}{dz},1\right)\times\left(\frac{d^2x}{dz^2},\frac{d^2y}{dz^2},0\right)=$

$$=\left(-\frac{d^2y}{dz^2},\frac{d^2x}{dz^2},\cancel{\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}}\right)\approx$$

2. reda

$$\approx(-\ddot{y},\ddot{x},0)$$

. Navor: $\vec{M}=E(-I_1\ddot{y},I_2\ddot{x},0)$

x, y morata biti v lastnih smereh I

Navor

$$\frac{d\vec{M}}{dl}+\vec{t}\times\vec{F}=0$$

$$\vec{t}\times\vec{F} = (\dot{x}, \dot{y}, 1) \times (F_x, F_y, F_z) =$$
$$= (\dot{y}F_z - F_y, F_x - \dot{x}F_z, \cancel{\dot{x}F_y - \dot{y}F_x})$$

2. reda

F_z poljubno velik

(ne povzroča pravih odmikov)

Vstavimo to nazaj:

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} EI_2 x^{(3)} - \dot{x}F_z + F_x &= 0 \\ EI_1 y^{(3)} - \dot{y}F_z + F_y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Sila (nastopa)}$$

Ponovno odvajamo: (Enačba za $\frac{d^2M}{dl^2}$)

$$\left.\begin{aligned} EI_2 x^{(4)} - \ddot{x}F_z - \dot{x}\dot{F}_z - K_x &= 0 \\ EI_1 y^{(4)} - \ddot{y}F_z - \dot{y}\dot{F}_z - K_y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Gostota sile (nastopa)}$$

Elastično valovanje

- V izotropnem neomejenem sredstvu
- Dinamična Navierova enačba je praktično že valovna enačba.

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2\vec{u} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla\nabla\cdot\vec{u}\right]$$

E, σ tokrat adiabatna namesto izotermnih (no, odvisno od ω)

- Upoštevamo identiteto: $\nabla\nabla\cdot\vec{u} = \nabla^2\vec{u} + \nabla\times\nabla\times\vec{u}$

Znebimo se $\nabla^2\vec{u}$, ker želimo namreč $\nabla\times\vec{u}$ in $\nabla\cdot\vec{u}$, ker bomo rešitev sestavili iz brezizvirnega in brezvrtinčnega dela (H-H izrek).

Vzamemo nastavek ravnih valov: $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}_0\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

Po HH izreku brez izgube splošnosti razdelimo na breziz. in brezvrt. del:

$$\vec{u} = \vec{u}_T + \vec{u}_L \; ; \; \nabla\cdot\vec{u}_T = 0 \qquad \nabla\times\vec{u}_L = 0$$

$$\vec{u}_T = \vec{u}_{T_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_T t)} \qquad \nabla\cdot\vec{u}_T = 0 = i\vec{k}\cdot\vec{u}_T \to \text{Transverzalen}$$
$$\vec{u}_L = \vec{u}_{L_0} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_L t)} \qquad \nabla\times\vec{u}_L = 0 = i\vec{k}\times\vec{u}_L \to \text{Longitudinalen}$$

Vidimo $\vec{u}_T$ je pravokoten na $\vec{k}$, to je torej transverzalen val.

$\vec{u}_L$ je vzporeden s $\vec{k}$, to je torej longitudinalni val.

$\vec{u} = \vec{u}_T + \vec{u}_L$ vstavimo v N.E., rotor preživi le $\vec{u}_T$, divergenco le $\vec{u}_L$. Po želji lahko pišemo spet:

$$-\nabla\times\nabla\times\vec{u}_T = \nabla^2\vec{u}_T \qquad \nabla\nabla\cdot\vec{u}_L = \nabla^2\vec{u}_L$$

$$\Rightarrow \rho(\ddot{\vec{u}}_T + \ddot{\vec{u}}_L) = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\nabla^2\vec{u}_T + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\nabla^2\vec{u}_L\right)$$

Torej:

$$\rho(-\omega_T^2\vec{u}_T - \omega_L^2\vec{u}_L) = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(-k^2\vec{u}_T - \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}k^2\vec{u}_L\right)$$

Pri danem $\vec{k}$ sta $\vec{u}_T$ in $\vec{u}_L$ pravokotna, tako da lahko v vsakem primeru (tudi če bi bila časovna dela slučajno enaka) zapišemo ločeni enačbi:

$$-\rho\omega_T^2\vec{u}_{T_0} = -\frac{E}{2(1+\sigma)}k^2\vec{u}_{T_0} \Rightarrow \omega_T^2 = \underbrace{\frac{E}{2\rho(1+\sigma)}}_{C_T^2}k^2$$

$$-\rho\omega_L^2\vec{u}_{L_0} = -\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}k^2\vec{u}_{L_0} \Rightarrow \omega_L^2 = \underbrace{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}_{C_L^2}k^2$$

Poglejmo razmerje:

$$\frac{C_T^2}{C_L^2} = \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}, \qquad \underset{(\sigma=1/2)}{0} \le \frac{C_T^2}{C_L^2} \le \underset{(\sigma=0)}{\frac{1}{2}}$$

↑ tekočine

Alternativno:

$$C_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \qquad \text{za } \mu=0 \text{ (tekočine)} \Rightarrow C_T^2 = 0$$

$$C_L^2 = \frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho} \qquad C_L^2 = \frac{K}{\rho} = \frac{1}{\rho\chi}$$

Zaradi preglednosti zapišimo še valovni ~~ob~~ obe valovni enačbi; Videli smo, da sta neodvisni:

$$\ddot{\vec{u}}_T - c_T^2 \nabla^2 \vec{u}_T = 0$$

$$\ddot{\vec{u}}_L - c_L^2 \nabla^2 \vec{u}_L = 0$$

Zaradi kompletnosti pa še Navierovo enačbo in Hooke s c_T in c_L:

$$\ddot{\vec{u}} = -c_T^2 \nabla \times \nabla \times \vec{u} + c_L^2 \nabla \nabla \cdot \vec{u}$$

$$\sigma_{ij} = 2\rho c_T^2 u_{ij} + \rho (c_L^2 - 2c_T^2) u_{kk} \delta_{ij}$$