Zaradi preglednosti zapišimo še valovni ~~ob~~ obe valovni enačbi;
Videli smo, da sta neodvisni:

$$\ddot{\vec{u}}_T - c_T^2 \nabla^2 \vec{u}_T = 0$$

$$\ddot{\vec{u}}_L - c_L^2 \nabla^2 \vec{u}_L = 0$$

Zaradi kompletnosti pa še Navierovo enačbo in Hooke s c_T in c_L:

$$\ddot{\vec{u}} = -c_T^2 \nabla \times \nabla \times \vec{u} + c_L^2 \nabla \nabla \cdot \vec{u}$$

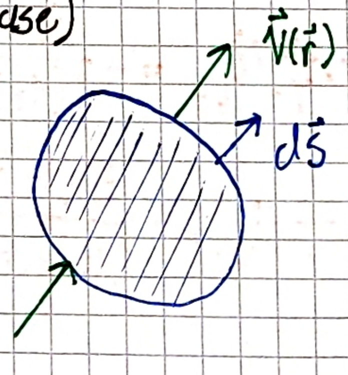
$$\sigma_{ij} = 2\rho c_T^2 u_{ij} + \rho (c_L^2 - 2c_T^2) u_{kk} \delta_{ij}$$

Hidrodinamika

Spremenljivke (polja), s katerimi opišemo tekoči kontinuum:

$\vec{v}(\vec{r})$ in 2 termodinamski količini
npr. $p(\vec{r})$, $\rho(\vec{r})$
Ostale TD količine so s tem določene preko enačbe stanja

Kontinuitetna enačba za maso (ohranitev mase)



$$\frac{\partial}{\partial t}\int dV \rho = -\oint d\vec{S} \cdot \rho \vec{v} = -\int dV \, \nabla \cdot (\rho \vec{v})$$

$$\int dV \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] = 0$$

Torej mora veljati povsod: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

Posplošeno: Vsak ohranitveni zakon da kont. enačbo, ki je vedno oblike:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

kjer je ρ volumska gostota ohranjene količine (tukaj mase), $\vec{j}$ pa gostota njenega toka (tukaj je $\vec{j} = \rho\vec{v}$ gostota masnega toka), ki je produkt volumske gostote in hitrosti, kadar gre za makroskopsko gibanje ($\vec{v} \neq 0$).

Pri difuziji pa imamo direktno $\vec{j}$ (ni makroskopskega gibanja, difuzni tok pa obstaja).

Primer: [Kontinuitetna enačba za gibalno količino]

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \nabla \cdot \Pi = 0; \quad \Pi_{ij} \text{ tenzor gostote toka gibalne količine}$$

Nazaj:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Za $\rho = \text{konst.}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = 0}$ Nestisljiv tok

Eulerjeva enačba (Newtonov zakon za idealno tekočino)

- Idealna tekočina: • Ni izgube mehanske energije (ni disipacije)
  $\Rightarrow$ Viskoznost in toplotna prevodnost morata biti zanemarljivi

  V splošnem: • Idealna tekočina je v TD ravnovesju (ne zgolj v lokalnem TD ravnovesju, v tem mora biti tudi neidealna tekočina - Enačba stanja!)
  • Transportni pojavi morajo biti zanemarljivi (npr. gib. količine prek viskoznosti, toplote prek topl. prev., koncentracije prek gradienta koncentracije ...)

Ravnovesje $\Rightarrow$ Spremembe (gibanje) morajo biti adiabatne, to je substancialni (materialni, totalni) časovni odvod entropije vsakega dela snovi mora biti 0.

Še peljemo z maso

• Newtonov zakon na enoto prostornine:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \sigma + \vec{f}^{z} \quad ; \quad \underbrace{\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}}$$

Totalni odvod (pospešek mase)

Tlak, v idealni tekočini ni drugega

Torej: $\partial_j \sigma_{ij} = -\delta_{ij} \partial_j p = -\partial_i p$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \sigma = -\nabla p$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{f}^{z}$$

Ker nočemo Lagrangeeve formulacije ampak Eulerjevo (ne sledimo delom snovi, ampak opisujemo z polji). Razpišemo totalni odvod po času:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

$$\Rightarrow \quad \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \vec{f}^{z}$$

Eulerjeva enačba

Če gibanje ni le adiabatno $\left(\frac{ds}{dt} = 0\right)$, ampak celo izentropno ($s = konst.$) kjer je ($s = \frac{\Delta S}{\Delta m}$, specifična entropija na enoto mase), lahko $\frac{\nabla p}{\rho}$ izrazimo direktno z gradientom specifične entalpije h ($= \frac{\Delta H}{\Delta m}$, specifična entalpija na enoto mase).

$$dH = TdS + Vdp \,/ : \Delta m \Rightarrow dh = Tds + \frac{1}{\rho}dp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dh = \frac{1}{\rho}dp \Rightarrow \nabla h = \frac{1}{\rho}\nabla p$$

Gibanje idealne tekočine je običajno izentropno:

V nekem trenutku moram zagotoviti, da velja $s = konst.$ npr. pred začetkom gibanja. Nato adiabatnost zagotavlja, da je še naprej $s = konst.$

V tem primeru se Eulerjeva enačba "polepša":

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla h + \frac{\vec{f}^z}{\rho}$$

∇h lahko vključimo vse potenciale npr. gravitacijskega gz ali elektro. potencialno energijo na enoto mase itd...

Privzemimo, da so vse zunanje sile potencialne, spravljene v $-\nabla h$:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\nabla h \qquad \frac{1}{2}\nabla v^2 = \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) - \nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right),$$ delujemo še z $\nabla\times$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{v}) = \nabla\times\left[\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})\right]$$

Nastopa le hitrostno polje!

$\Rightarrow$ Pomemben izsledek! Če je $\nabla\times\vec{v}=0$ povsod, bo tako ostalo!

Brezvrtinčni tok ($\nabla\times\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{v}=\nabla\phi$ potencialni tok) ostaja brezvrtinčen. To je pomembno, saj sicer potencialni tok kot poseben primer ne bi imel smisla.

Še to: V nestisljivem primeru $0=\nabla\cdot\vec{v} = \nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi = 0$, je potec. tok odvisen le še od robnih pogojev, in zato ~~nestacionar~~ nestacionaren le če se ti spreminjajo s časom, sicer pa je nestisljiv potencialni tok avtomatsko stacionaren! !

Helmholzova enačba za vrtinčnost

Izhajamo iz: $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{v}) = \nabla\times[\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})]$

Uporabimo še identiteto: $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a})$

Pišimo še: $\nabla\times\vec{v} = \vec{\omega}$ (vrtinčnost) $\quad$ 0 $\mathrm{div}(\mathrm{rot}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} \underbrace{- (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega}} + \vec{v}(\cancel{\nabla\cdot\vec{\omega}}) - \vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{v})$$

dopolni do totalnega odvoda

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} - \vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{v}),$$ v nestisljivem primeru

torej:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v}$$

↳ Ta člen opisuje dinamično vrtinčnost zaradi gradientu hitrosti polja.

Bernoullijeve enačbe (prvi integral Eulerjeve enačbe / ohranitev "Energije")

Vse sledi iz oblike Eulerjeve enačbe, ki smo jo že zapisali:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) - \nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right); \quad h = h_0 + gz + \dots$$

Če je tok brez vrtinčen: $\nabla\times\vec{v} = 0;\ \vec{v} = \nabla\phi \Rightarrow \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right)$

$$\Rightarrow \nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + h + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 + h + \frac{\partial\phi}{\partial t} = f(t)$$ ni odvisno od kraja

Če je obenem še stacionaren:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 + h = \text{const.}$$

Za stacionaren, a v splošnem vrtinčnim tok pa veljata enačbi, ki ju dobimo z množenjem z $\vec{v}\cdot$, $(\nabla\times\vec{v})$:

$\vec{v}\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 + h = \text{const.}$ vzdolž tokovnice (krivulja v smeri $\vec{v}$)

$(\nabla\times\vec{v})\cdot\nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 + h = \text{const.}$ vzdolž vrtinčnice (krivulje v smeri $\nabla\times\vec{v}$)

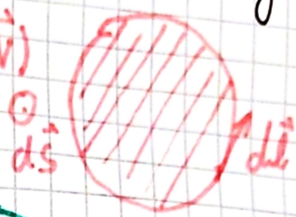
Ohranitev cirkulacije (Kelvinov teorem) Cirkulacije, ne vrtinčnosti

Cirkulacija (obtekanje) vektorskega polja v tem primeru hitrostnega:

$$\Gamma = \oint d\vec{l} \cdot \vec{v}$$

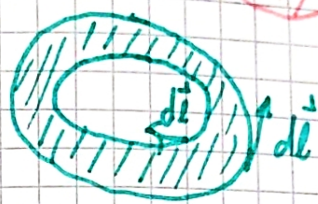
Spomnimo se: Stokesov izrek za enostavna povezana območja

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{v} = \int d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{v})$$



Teorem velja za izentropni tok idealne tekočine!

Ne pa za:



Pravi:

Totalni (substancialni) odvod cirkulacije je 0. Torej cirkulacija se zgolj seli s tokom.

Poglejmo:

$$\frac{d}{dt}\oint d\vec{l} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\oint d\vec{r} \cdot \vec{v} = \oint \delta\vec{r} \, \frac{d\vec{r}}{dt} + \oint \frac{d\delta\vec{r}}{dt} \cdot \vec{v} =$$

$$= \oint d\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \oint \delta\dot{\vec{r}} \cdot \vec{v} = \oint \delta\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \oint \delta\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$= 0$ Po zaključeni zanki

Torej imamo: $\frac{d}{dt}\oint \delta\vec{r} \cdot \vec{v} = \oint \delta\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \star$; za $\frac{d\vec{r}}{dt}$ vstavimo Eulerjevo enačbo za izentropni tok:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\nabla h$$

$$\star = -\oint \delta\vec{r} \cdot \nabla h \overset{\text{Stokes}}{=} -\int d\vec{S} \, \nabla \times (\nabla h) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\oint \delta\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \oint d\vec{r} \cdot \vec{v} = \text{konst.}$$

Pozor: Ohranja se cirkulacija, ne vrtinčnost!

Na primer: Za infi. majhno zankico:

$$\oint d\vec{l}\cdot\vec{v} = \int d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{v}) = d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{v}) = \text{konst.}$$

Ne pomeni, da je $\nabla\times\vec{v} = \text{konst.}$, ker se lahko spremeni tudi $d\vec{S}$.

Obtekanje s potencialnim tokom

Potencialni tok: $\nabla^2\phi = 0$ To je $\vec{v} = \nabla\phi$ in $\nabla\cdot\vec{v} = 0$

Pozor: Zahtevamo $\nabla\times\vec{v} = 0$ je le potrebni pogoj za obstoj potenciala ϕ in omogoča lokalno izražavo $\vec{v} = \nabla\phi$. V enostavno povez. območju tudi zadostni pogoj Vendar!!! Ovira v toku (v 2D!) naredi območje po definiciji ne-enostavno povezano.

Splošni zadostni pogoj za obstoj potenciala ϕ je, da je cirkulacija po vsaki sklenjeni krivulji nič, to vemo:

$$\oint d\vec{r}\cdot\vec{v} = 0 = \oint d\vec{r}\cdot\nabla\phi = 0 = \phi_{konec} - \phi_{začetek}$$

Pogoju, da ni cirkulacije pa v realnosti ne moremo kar tako zadostiti. (Pri krilu letala, tega niti ne želimo :))

Stvar je analogna magnetnemu polju okrog vodnikov s tokom ($\vec{v} \leftrightarrow \vec{H}$, $\nabla\times\vec{v} \leftrightarrow \nabla\times\vec{H} = \vec{j}$). Vendar tam zlahka zagotovimo, da ni cirkulacije preprosto izklopimo tok. Takrat obstaja pravi skalarni magnetni potencial (= Magnetna napetost).

Sledi torej "akademska" razprava za primer, ko ni cirkulacije. Je pa koristna predvsem za vpeljavo efektivne hidrodinamske mase objekta pri pospeševanju v tekočini.

Premikamo objekt, koord. sistem je pripet na objekt (izhodišče v njem), gledamo pa rešitev v danem trenutku.

"Hitra" rešitev Laplaceove enačbe: $\phi = -\frac{a}{4\pi r} + \vec{A}\cdot\left(\nabla\left[\frac{1}{4\pi r}\right]\right) + \dots$

(Btw, $-a\vec{A} \equiv \vec{p}$ standardni definirani dipolni moment.)

Saj če je $\nabla^2\phi_0 = 0$, potem je $\nabla^2\nabla\phi_0 = \nabla\nabla^2\phi_0 = 0$ torej

$$\vec{A}\cdot\nabla\nabla^2\phi = 0$$

za poljuben $\vec{A}$ (prost parameter = "dipolni moment")

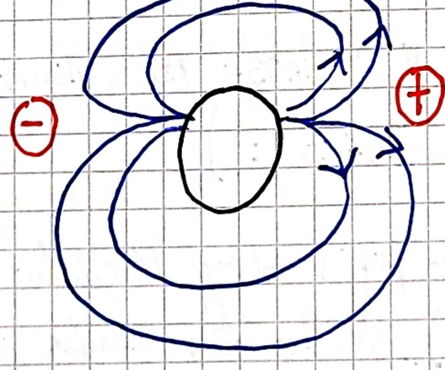
Ali pa:
$$\nabla^2\partial_i\partial_j\phi_0 = \partial_i\partial_j\nabla^2\phi_0 = 0$$

Torej $A_{ij}\,\partial_i\partial_j\nabla^2\phi_0 = 0$ ipd.

Monopol ne pride v pošter, ker predstavlja izvir:

$$\oint d\vec{S}\cdot\nabla\phi = 4\pi r^2\frac{a}{4\pi r^2} = a$$

Torej dipol in višji multipoli je intuitiven:



Btw, za kroglo je natanko <u>samo</u> dipol!

Vzemimo le dipol brez ostalih višjih, torej bomo dobili dobro rešitev pri velikih oddaljenostih od objekta.

$$\phi = \frac{1}{4\pi}\vec{A}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\vec{A}\cdot\hat{e}_r}{r^2} = -\frac{1}{4\pi}\vec{A}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} \rightarrow \vec{v} = \nabla\phi$$

$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + \vec{a}\times(\nabla\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})$$

$$\vec{v} = \nabla\phi = \frac{1}{4\pi}(\vec{A}\cdot\nabla)\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{4\pi}(\vec{A}\cdot\nabla)\frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{A}}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}\vec{r}\left(\vec{A}\cdot\frac{3\hat{e}_r}{r^4}\right)$$

$$= \frac{3(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{A}}{4\pi r^3} = \vec{v}$$

$\vec{v}$ torej pada kot $1/r^3$, kar pomeni, da je vsaj kinetična energija tekočine gotovo integrabilna za $r \to \infty$

Dipolni moment $\vec{A}$ je odvisen od oblike telesa (Robni pogoj za $\vec{v}$ na površini telesa) in hitrosti telesa.

Za sfero ($r =$ konst.) ga dobimo direktno s projekcijo dipolne kotne odvisnosti na kotno odvisnost R.P. Za splošno obliko $r(\theta,\phi)$ pa je treba upoštevati vse člene.

Izračunajmo celotno W_k tekočine:

$$W_k = \frac{1}{2}\int \rho v^2 dV \quad ;$$

po tekočini izven telesa, najprej do sfere R, nato $R \to \infty$

Splošno obliko telesa ujamemo s tole finto:

$$\int dV v^2 = \int dV u^2 + \int dV (\vec{v}+\vec{u})\cdot(\vec{v}-\vec{u}) ;$$

$\vec{u}$... hitrost telesa

Prvi integral je trivialen, drugega pa pišimo:

$$\vec{v} + \vec{u} = \nabla(\phi + \vec{u}\cdot\vec{r}),$$

in nato:

$$\nabla\cdot[(\phi + \vec{u}\cdot\vec{r})(\vec{v}-\vec{u})] = \nabla(\phi + \vec{u}\cdot\vec{r})(\vec{v}-\vec{u}) + \underbrace{(\phi + \vec{u}\cdot\vec{r})\nabla\cdot(\vec{v}-\vec{u})}_{0}$$

ker je nestisljiva

Torej:

$$\int dV u^2 = u^2(V-V_0) + \int dV \nabla\cdot[\dots] = u^2(V-V_0) + \oint_{S,S_0} d\vec{S}\cdot(\vec{v}-\vec{u})(\phi + \vec{u}\cdot\vec{r})$$

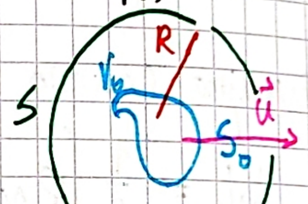
na S_0: $d\vec{S}\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = 0$

Ostane le še integral po S:

$$= \int_S d\vec{S}\cdot\left[\frac{3(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{A}}{4\pi r^3} - \vec{u}\right]\left[-\frac{1}{4\pi}\vec{A}\frac{\hat{e}_r}{r^2} + r\vec{u}\cdot\hat{e}_r\right] =$$

$$= \int_S dS\left[\frac{2\vec{A}\cdot\hat{e}_r}{4\pi r^3} - \vec{u}\cdot\hat{e}_r\right]\left[-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{A}\cdot\hat{e}_r + r\vec{u}\cdot\hat{e}_r\right]$$

$$= \int_S dS\left[-\frac{2}{(4\pi)^2}\frac{1}{r^5}(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)^2 + \frac{1}{4\pi r^2}(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)(\vec{u}\cdot\hat{e}_r) + \frac{2}{4\pi}r^2(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)\cdot(\vec{u}\cdot\hat{e}_r) - r(\vec{u}\cdot\hat{e}_r)^2\right] =$$



$$= \int d\Omega\left[-\frac{2}{(4\pi)^2}\cancelto{0}{\frac{1}{r^3}}(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)^2 + \frac{3}{4\pi}(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)(\vec{u}\cdot\hat{e}_r) - r^3(\vec{u}\cdot\hat{e}_r)^2\right]_{r=R\to\infty}$$

ker $r = R \to \infty$

$$= \int d\Omega\left[\frac{3}{4\pi}(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)(\vec{u}\cdot\hat{e}_r) - R^3(\vec{u}\cdot\hat{e}_r)^2\right] =$$

Integral je po prostorskem kotu, $\vec{A}$ in $\vec{u}$ sta konstantna vektorja.

Splošno:

$$\int d\Omega[(\vec{a}\cdot\hat{e}_r)(\vec{b}\cdot\hat{e}_r)] = \overline{(\vec{a}\cdot\hat{e}_r)(\vec{b}\cdot\hat{e}_r)} =$$

$$= 4\pi a_i b_j \overline{e_r^i e_r^j} = \frac{4\pi}{3} a_i b_j \delta_{ij} = 4\pi\cdot\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Namreč: i) $\overline{e_r^i e_r^j} = 0$ za $i \neq j$

ii) $\hat{e}_r^2 = 1 = e_r^{2x} + e_r^{2y} + e_r^{2z} = \overline{e_r^{2x}} + \overline{e_r^{2y}} + \overline{e_r^{2z}}$, vse smeri enake

$$\Rightarrow \overline{e_r^{2x}} = \overline{e_r^{2y}} = \overline{e_r^{2z}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int d\Omega\,[\,] = \frac{3}{4\pi}\,\frac{4\pi}{3}\vec{A}\cdot\vec{u} - \frac{4\pi}{3}R^3 u^2 =$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{u} - \frac{4\pi}{3}R^3 u^2$$

Torej končno:

$$\int dV\, v^2 = u^2(V - V_0) + \vec{A}\cdot\vec{u} - Vu^2 = \vec{A}\cdot\vec{u} - V_0 u^2$$

$$\Rightarrow \quad W_k = \frac{1}{2}\rho\left(\vec{A}\cdot\vec{u} - V_0 u^2\right)$$

Kot rečeno, $\vec{A}$ je sicer odvisen od oblike telesa in hitrosti, je pa linearno odvisen od obojega. (Robni pogoj), ki ga določa, je linearen v $\vec{v}$ in $\vec{u}$, torej ϕ in $\vec{u}$. Torej med $\vec{A}$ in $\vec{u}$ je linearna zveza.

V splošnem torej:

$$W_k = \frac{1}{2} m_{ij}\, u_i u_j$$

m_{ij} ... je konstanten simetrični tenzor = Tenzor inducirane mase!

Tako dodatno maso telesa občutimo pri pospeševanju v tekočini (bomo pokazali). V splošnem dodatna sila ni v smeri pospeška!

- Za simetrične oblike v smeri pospeška pa je v isti smeri.
- Za kroglo torej vedno v isti smeri, izkaže se, da je za kroglo:

$$m_{ij} = \frac{1}{2}\rho V_0 \delta_{ij}$$

Ker imamo vse pripravljeno, se takoj izkaže:

Robni pogoj: $v_r\big|_{r=R_0} = u_r$

$$\Rightarrow \quad \frac{3(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)\hat{e}_r - \vec{A}}{4\pi R_0^3}\cdot\hat{e}_r = \vec{u}\cdot\hat{e}_r \; ; \quad \text{za vsak } \hat{e}_r$$

$$\frac{2(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)}{4\pi R_0^3} = \vec{u}\hat{e}_r \Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{2}4\pi R_0^3\vec{u}$$

$$W_k = \frac{1}{2}\rho(\vec{A}\cdot\vec{u} - V_0u^2) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{2}3V_0u^2 - V_0u^2\right) = \frac{1}{2}\rho\frac{1}{2}V_0u^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_0}{2}u^2 \; ; \text{ kjer je } m_0 \text{ masa izpodrinjene tekočine.}$$

Gibalna količina tekočine

- Landau: Ne moremo je izračunati direktno preko $\int dV\rho\vec{v}$, ker ta integral "divergira".

  Lahko pa jo zračunamo prek energije, ki smo jo že zintegrirali.

Takole: Recimo, da telo pospešujemo. Pri tem na tekočino deluje z neko silo $\vec{F}$. Ta spreminja gibalno količino tekočine:

$$d\vec{P} = \vec{F}dt$$

Skalarno množimo z $\vec{u}$ (trenutno hitrostjo telesa):

$$\vec{u}\cdot d\vec{P} = \vec{F}\cdot\vec{u}\,dt = dA = dW_k$$

Torej: $\vec{u} \cdot d\vec{P} = m_{ij} u_i du_j$

Ta enačba sicer določa samo $d\vec{P}$ v smeri $\vec{u}$. Vendar:

i) Velja za vsak $\vec{u}$, ki je poljuben

ii) m_{ij} je konstanta (tukaj pomembno, da ni odvisna od $\vec{u}$)

iii) $\vec{P}(\vec{u}=0) = 0$

Odtod zares sledi, da je zares dP_i:

$$dP_i = m_{ij} du_j \quad !$$

in nato z integracijo iz stanja $\vec{P}(\vec{u}=0)=0$ naredimo:

$$P_i = m_{ij} u_j$$

Sila na ~~telo~~ tekočino: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

Na telo pa seveda: $-\vec{F}$

Vidimo, da je za $\vec{u} = $ const. sila nič! Ni ne upora ($\vec{F} \parallel \vec{u}$), ne vzgona ($\vec{F} \perp \vec{u}$). in to velja tudi za splošne oblike.

Upora nikakor ne more biti, saj ni energijskih izgub, celotna W_k pa je končna.

(t.i. D'Alembertov paradoks - ker niso poznali viskoznosti)

Vzgona pa ni zaradi samovoljne predpostavke/omejitve na ničelno cirkulacijo.

Viskozne tekočine

- Newtonov zakon na enoto prostornine:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \sigma + \vec{f}^{\,z}$$

σ... napetostni tenzor

$\vec{f} = \nabla \cdot \sigma$, vedno obstaja σ

V idealni tekočini je bilo $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ => Eulerjeva enačba

K napetostnemu tenzorju dodamo viskozni napetostni tenzor σ^v.

Kako bi ga dobili?

- Viskozne sile nastopijo, kadar imamo gradient hitrosti. V homogenem toku jih ni ("Galilejeva" invariantnost)

  => σ_{ij}^v se izraža s tenzorjem $\partial_j v_i$. V linearnem približku kar linearno.

  Že poznamo, to je čas. odvod gradienta premika

$$\partial_j v_i = \partial_j \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \partial_j u_i$$

- V primeru toge rotacije tudi ni viskoznih sil (še ena simetrija narave, invariantnost na rotacijo)

  => σ_{ij}^v se izraža s simetričnim tenzorjem

$$v_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_j v_i + \partial_i v_j\right)$$ ne vsebuje toge rotacije (lokalno)

- V izotropnem sredstvu ni nobene druge količine, ki bi lahko nastopala v zvezi med σ_{ij}^v in v_{ij}

Torej sledi:

$$\sigma^{v}_{ij} = 2\eta\left(v_{ij} - \frac{1}{3} v_{kk}\delta_{ij}\right) + \zeta v_{kk}\delta_{ij}$$

Sklapljamo razcepne dele

η je viskoznost (dinamična viskoznost)

ζ dilatacijska, volumska, druga viskoznost (odpade pri $v_{kk} = \nabla\cdot\vec{v} = 0$)

Zakaj je dvojka pred η?

Zato, da je η kot zgodovinsko definirana. Na primeru strižnega toka.

$$\frac{F}{S} = \sigma^{v}_{xy} = 2\eta\frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial y} = \eta\frac{\partial v_x}{\partial v_y} \quad \checkmark$$

Vstavimo to v gibalno enačbo, izračunajmo $\nabla\cdot\sigma^{v}$, η, ζ naj bosta konstantni:

$$\partial_j \sigma^{v}_{ij} = \eta\,\partial_j(\partial_j v_i + \partial_i v_j) - \frac{2}{3}\eta\,\partial_j\partial_k v_k\delta_{ij} + \zeta\,\partial_j\partial_k v_k\delta_{ij} =$$

isti zaradi delte

$$= \eta\,\partial_j^2 v_i + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\partial_i\partial_k v_k$$

Torej:

$$\nabla\cdot\sigma^{v} = \eta\nabla^2\vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla\nabla\cdot\vec{v}$$

Vstavimo to v enačbo:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] \ldots$$

Next page, da bo red $\Rightarrow$

Dobimo Navier-Stokesovo enačbo

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = -\nabla p + \eta\nabla^2\vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla\nabla\cdot\vec{v} + \vec{f}^{z}$$

Za ~~konstantno~~ izotropno viskozno tekočino.

Nestisljiva limita, aktualna skoraj vedno (še bolj kot pri Eulerjevi)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v};$$

$\frac{\eta}{\rho}$ "kinematična" viskoznost $= \nu$

Napetostni tenzor v tej limiti:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta v_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$$

Če je $\rho =$ konst. se lahko znebimo tlaka kot v Eulerjevi enačbi za izentropni tok (ki je lahko stisljiv):

Naredimo $\nabla\times$ in upoštevajmo $\frac{1}{2}\nabla v^2 = \vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}) + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{v}) = \nabla\times[\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})] + \nu\nabla^2\nabla\times\vec{v}$$

Če razpišemo še $\nabla\times[\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v})]$ kot v Eulerjevi z identiteto:

$$\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} - (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla\cdot\vec{b}) - \vec{b}(\nabla\cdot\vec{a})$$

in če pišemo $\nabla\times\vec{v} = \vec{\omega}$, dobimo Helmholtzovo en. za vrtinčnost v viskozni tekočini:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{\omega}$$

Novo!
Difuzija vrtinčnosti zaradi viskoznosti

Še vedno nestisljiva limita: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v}$

Če poznamo hitrostno polje, dobimo tlačno polje preko divergence

$$\Rightarrow \nabla^2 p = -\rho\partial_i(v_j\partial_j v_i) = -\rho[(\partial_i v_j)(\partial_j v_i) + v_j\partial_i\partial_j v_i] =$$

$$= -\rho(\partial_i v_j)(\partial_j v_i)$$

Ali pa:

$$= -\rho\partial_i\partial_j(v_i v_j) + \rho\partial_i(v_i\partial_j v_j)$$

$$= -\rho\partial_i\partial_j(v_i v_j)$$

Torej:

$$\nabla^2 p = -\rho(\partial_i v_j)(\partial_j v_i) = -\rho\partial_i\partial_j(v_i v_j)$$

Poissonova enačba za tlak

Še ta komentar: ∇p se vzpostavi takšen, da v vsakem trenutku velja $\nabla\cdot\vec{v} = 0$!

$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{v} = 0$ je (skalarna) enačba za tlačno polje..

Nerodno, da ne vsebuje tlaka...

Če upoštevamo stiskanje je stvar čisto preprosta:

$$\nabla\cdot\vec{v} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\rho\vec{v}) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\chi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

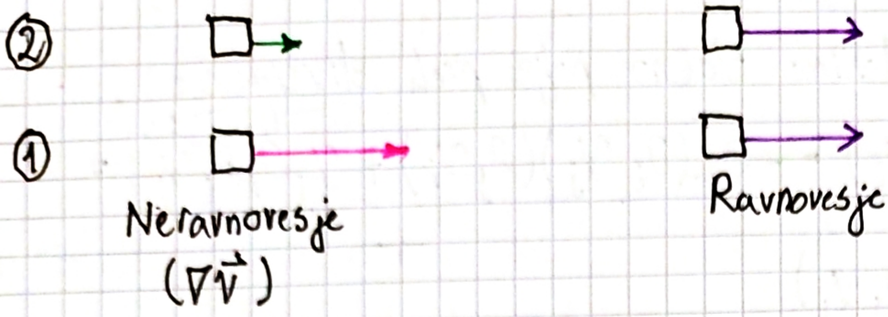
Viskozna disipacija

Pretvarjanje "mehanske" energije v notranjo.

Splošneje: "mehanska" energija v resnici pomeni celotno prosto energijo.

Ta se manjša s časom zaradi naraščujoče ~~[illegible]~~ entropije. In sicer s transportnim pojavom – difuzija gibalne količine zaradi viskoznosti.

Primer:



Delo viskoznih sil: Neravnovesno delo, ki pa ga znamo preprosto zračunat (zelo šibko neravnovesje)

Hitrejši je opravil večje + delo (moč $\vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1$)
Počasnejši je opravil manjše − delo (moč $\vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2$)

$\Rightarrow$ Skupno delo je pozitivno
$\Rightarrow$ Skupna kinetična energija je manjša
$\Rightarrow$ Sistem se segreje

Zdaj pa by the book: Nadomestna reverzibilna sprememba za izračun spremembe entropije sistema 1 + 2:

Sistema spravimo na končno hitrost z zunanjima silama (ki delujeta homogeno, tako da ostaja v ravnovesju). Nato pa z dobljeno energijo reverzibilno pogrejemo $\Rightarrow$ Skupna entropija se zveča

Končno izračunajmo opravljeno delo delov sistema zaradi viskoznih sil:

$$\delta A = T \delta S$$

$$-\vec{f}_i = f_i^v = \partial_j \sigma_{ij}^v$$

$$\delta A = \int dV f_i \delta u_i = -\int dV f_i^v \delta u_i = -\int dV (\partial_j \sigma_{ij}^v) \delta u_i$$

To smo že izračunali na str. 18, in sicer neg. delo elastične sile:

$$-\int dV (\partial_j \sigma_{ij}) \delta u_i$$

Torej: $\delta A = -\oint dS_j \overset{v}{\sigma}_{ij} \delta u_i + \int dV \overset{v}{\sigma}_{ij} \delta_{ij}$

$$P = \frac{\delta A}{\delta t} = -\oint dS_j \overset{v}{\sigma}_{ij} v_i + \int dV \overset{v}{\sigma}_{ij} v_{i,j}$$

V volumnu torej: $P = \int dV \overset{v}{\sigma}_{ij} v_{i,j}$

N.S. enačba: Značilne skale in brezdimenzijska oblika

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Značilni čas, v katerem se zaradi viskoznosti vzpostavi stacionarno hitrostno polje. (Viskozni relaksacijski čas). Ocenimo iz enakosti:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \sim \eta \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{v}{\tau_v} \sim \eta \frac{1}{\ell^2} v$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_v = \frac{\rho \ell^2}{\eta}$$

ℓ je znač. strižna dolžina hitrostnega polja.

Brezdimenzijska oblika:

Naj bo enota za čas na primer $\boxed{\tau_0 = \frac{\ell}{v_0}}$, kjer je v_0 značilna hitrost.

$$\Rightarrow \quad t = \tilde{t} \tau_0$$

In enota za dolžino $\boxed{\ell} \Rightarrow r = \tilde{r} \ell$.

Seveda je s tem:

$$v = \tilde{v} v_0$$

Vstavimo:

$$\rho\left[\frac{v_0}{\tau_0}\frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial\tilde{t}}+\frac{v_0^2}{l}(\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\vec{v}}\right]=-\frac{1}{l}\tilde{\nabla}p+\eta\frac{v_0}{l^2}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}}\quad\Big/\cdot\frac{\tau_0}{\rho v_0}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial\tilde{t}}+(\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\vec{v}}=-\frac{1}{l}\frac{\tau_0}{\rho v_0}\tilde{\nabla}p+\eta\frac{v_0}{l^2}\frac{\tau_0}{\rho v_0}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}}=$$

$$=-\frac{1}{l}\frac{l}{v_0^2\rho}\tilde{\nabla}p+\frac{\eta}{l^2}\frac{l}{\rho v_0}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}}$$

$p=\tilde{p}\rho v_0^2$

$$\Rightarrow\frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial\tilde{t}}+(\tilde{\vec{v}}\cdot\tilde{\nabla})\tilde{\vec{v}}=-\tilde{\nabla}\tilde{p}+\frac{\eta}{\rho v_0 l}\tilde{\nabla}^2\tilde{\vec{v}}$$

Reynoldsovo število
(meri pomembnost viskoznega člena glede na ostale)

$$\frac{\rho v_0 l}{\eta}\equiv Re$$

Še enkrat v brez. dim. obliki in brez nadležne ~:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\nabla p+\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v}$$

Če s sistemom nič posebnega ne delamo od zunaj, ampak ga pustimo, da se nemoteno razvija, je Re edini netrivialni parameter N.S. enačbe. Ostali so zginili v definicijo enot časa in dolžine.

$\Rightarrow$ Rešitev je odvisna samo od Re
Pri danem Re lahko vse ostalo poljubno skaliramo in rešitev še vedno poznamo.

Npr.: Če l 10x povečamo in v_0 10x zmanjšamo ostane rešitev v brezdimenzijskih variablah.

$\tilde{r}=\frac{r}{l}$, $\tilde{t}=\frac{t}{\tau_0}$, ... ista!

Komentar: Re je razmerje med velikostjo advekcijskega člena (gostota sil potrebnih za pospeševanje dela tekočine pri preletu gradient hitrostnega polja) in velikostjo viskoznega člena (gostota viskoznih sil).

Časovni odvod pa je takšen, kot ga določa N.S. v nekem trenutku! Če je npr. $Re \gg 1$ je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ v splošnem reda $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ (Hitrostno polje se spreminja zaradi advekcije)

Če je $Re \ll 1$ je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ v splošnem reda $\frac{1}{Re}\nabla^2\vec{v}$, torej značilni dinamični čas $t \sim Re$ (v brez. dim. enotah).

To je v fizičnih enotah:

$$t \sim Re \cdot \tau_0 = \frac{\rho v_0 l}{\eta} \cdot \frac{l}{v_0} = \frac{\rho l^2}{\eta} = \underline{\underline{\tau_\nu}}$$

Če sistemu vsiljujemo dinamiko od zunaj, recimo z značilno frekvenco:

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

Pa je velikost $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \frac{1}{\tau/\tau_0} = \frac{\tau_0}{\tau}$

$$\boxed{\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{l}{\tau v_0} \equiv St \quad \text{Strouhalovo število}}$$

Razmerje časov preleta gradienta hit. polja in vsiljevanja od zunaj τ

To je torej razmerje velikosti $\frac{\partial v}{\partial t}\,(=St)$ in $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\,(=1)$.

Stokesov približek

$$\nabla\cdot\vec{v}=0$$

Za $Re \ll 1$: $\Rightarrow \underbrace{\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}_{=0 \text{ ker stacionarno}} = -\nabla p + \eta\nabla^2\vec{v}$;

$$0 = -\nabla p + \eta\nabla^2\vec{v} \;/\nabla\cdot \;\Rightarrow\; \nabla^2 p = 0$$

$$0 = -\nabla p + \eta\nabla^2\vec{v} \;/\nabla^2 \;\Rightarrow\; 0 = -\nabla\overset{0}{\overset{\parallel}{\nabla^2 p}} + \eta\nabla^2\nabla^2\vec{v}$$

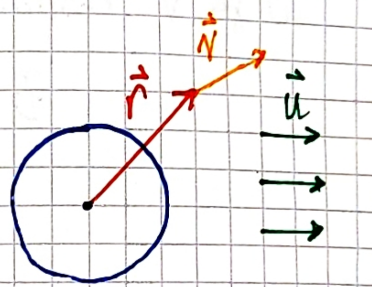
$$\Rightarrow \nabla^2\nabla^2\vec{v} = 0$$

Če delujemo z rotorjem:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{v}) = \eta\nabla^2\nabla\times\vec{v} \;;\; \text{oz. stacionarna: } \nabla^2\nabla\times\vec{v} = 0$$

Stokesov problem (1851)

Tok tekočine mimo fiksne krogle (stacionarno)



$$\vec{v}(r\to\infty) = \vec{u}$$

$$\nabla\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = \nabla\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v}-\vec{u} = \nabla\times\vec{A},$$

$$\nabla\times\vec{A} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

Nastavek za $\vec{A}$: