Elastomehanika

Osnovni pojem elastomehanike je **deformacija**. Naš zapis lahko malo posodobimo:

$$\vec{u_2} - \vec{u_1} \Rightarrow \nabla\vec{u}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r}$$

V igri za deformacijo sta dva vektorja $\vec{u}$ in ∇. Deformacijo bomo opisali s tenzorjem, ki mu pravimo **Deformacijski tenzor**, ki je seveda tudi sam spet neko polje.

Očitno je ta tenzor nekako povezan z gradientom premika a nastopi problem, ker so nekatere deformacije "trivialne" in jih nočemo zajeti. To so npr. togi premik in toga rotacija. Torej se izkaže, da bi bil predpis $\nabla\vec{u}$ za takšen tenzor v resnici malo presplošen.

Dekompozicija A_{ij} [Cauchy-Stokes]

Poglejmo si, kaj dobimo če tenzor 2. ranga razbijemo na t.i. "ireducibilne dele":

$$(\nabla\vec{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Da ne zgubimo splošnosti, dajmo to najprej za popolnoma splošen tenzor A_{ij}.

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

Prvi člen je simetričen in ga poimenujemo S_{ij}, drugi pa je anti-simetričen in ga označimo z W_{ij}. Anti-simetričen del lahko predstavimo z aksialnim vektorjem:

$$W_{ij} \equiv \varepsilon_{ijk} w_k \qquad w_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} W_{ij}$$

Na hitro se spomnimo par lastnosti za Levi-Civita tenzor:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

S tem orodjem torej lahko pokažemo, da to res velja:

$$\varepsilon_{ijl} W_{ij} = \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{ijk} w_k = 2\delta_{kl} w_k = 2w_l$$

In če še preverimo v drugo smer:

$$\varepsilon_{lmk} w_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{ijk} W_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{mj} - \delta_{im}\delta_{lj}) W_{ij} =$$

$$= \frac{1}{2}(W_{lm} - W_{ml}) = W_{lm}$$

Tako, smo dokazali. Kakorkoli naš S_{ij} lahko razcepimo še naprej:

$$S_{ij} = \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij}\right) + \frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij}$$

Tu smo dobili **brezsledni del** v prvem členu in **izotropni del** v drugem. Celoten razcep je potem:

$$A_{ij} = \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij}\right) + \frac{1}{3} S_{kk}\delta_{ij} + W_{ij}$$

Kako se transformirajo komponente tenzorja?

Pokažimo, da se komponente tenzorja transformirajo kot produkti komponent vektorja. To velja splošno (za vsak rang).

Vektor

Imejmo vektor $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$. Transformacija med bazami se naredi takole:

$$\hat{e}_i = M_{ij} \hat{e}_j{}'$$

kjer je M ortogonalna prehodna matrika. Sprojeciramo lahko ven vrednost z $a_i = \vec{a}\hat{e}_i$. Torej se komponenta vektorja transformira takole:

$$\vec{a} = a_i M_{ij} \hat{e_j}' \equiv a_j' \hat{e_j}' \Rightarrow a_j' = M_{ij} a_i$$

Tenzor

Tenzor zapišemo kot $T = T_{ij} \hat{e_i} \otimes \hat{e_j}$. Med bazama je tokrat torej potrebno transformirati oba bazna vektorja:

$$T = T_{ij} (M_{ik} \hat{e_k}') \otimes (M_{jl} \hat{e_l}') = T_{ij} M_{ik} M_{jl} \hat{e_k}' \otimes \hat{e_l}' \equiv$$

$$\equiv T_{kl}' \hat{e_k}' \otimes \hat{e_l}'$$

Torej smo ugotovili, da se matrične komponente transformirajo kot:

$$T_{kl}' = T_{ij} M_{ik} M_{jl}$$

To je isto kot produkt:

$$a_k' a_l' = (M_{ik} a_i)(M_{jl} a_j) = a_i a_j M_{ik} M_{jl}$$

Transformira se vsak indeks, indeks pa predstavlja vektor.

Kako se transformira izotropni del?

Za **brezsledni del** vemo, da se transformira matrično. Kaj pa za izotropni del?

$$T_{ij} = A \delta_{ij}$$

$$T_{kl}' = A \delta_{ij} M_{ik} M_{jl} = A M_{ik} M_{il} = A \delta_{kl}$$

To pa je enako kot to s čimer smo začeli.

Kako se transformira anti-simetrični del?

Prej smo zapisali, da velja:

$$W_{ij} = \varepsilon_{ijk} w_k \qquad w_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{ij}$$

Spomnimo se na hitro, da Levi-Civita tenzor dela pravzaprav vektorski produkt. Torej za vektorski produkt k-tega in l-tega:

$$\varepsilon_{ijp} M_{ik} M_{jl} = \varepsilon_{kls} M_{ps}$$

Tako lahko zapišemo takole:

$$W_{kl}' = W_{ij} M_{ik} M_{jl} = \varepsilon_{ijp} w_p M_{ik} M_{jl} =$$

$$= \varepsilon_{kls} M_{ps} w_p = \varepsilon_{kls} w_s'$$

Torej:

$$W_{kl} = \varepsilon_{kls} w_s \qquad W_{kl}' = \varepsilon_{kls} w_s'$$

Zaključimo lahko, da se **anti-simetrični del transformira kot aksialni vektor.**

Dekompozicija za $A_{ij} = (\nabla \vec{u})_{ij}$

Zdaj ko smo dekompozicijo naredili v splošnem primeru jo, dajmo še za predpis:

$$A_{ij} = (\nabla \vec{u})_{ij}$$

Dobimo:

$$(\nabla \vec{u})_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \equiv$$

$$\equiv u_{ij} + W_{ij}$$

Tu smo simetričen del proglasili za u_{ij}.

Kaj predstavlja anti-simetrični del?

Zanima nas kaj pomeni dobljeni anti-simetrični del, kakšno deformacijsko polje predstavlja. Pa poglejmo:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{ij} + W_{ij} \Rightarrow du_j = u_{ij}\, dx_i + W_{ij}\, dx_i$$

$$W_{ij}\, dx_i = \varepsilon_{ijk} w_k\, dx_i = \varepsilon_{jki} w_k\, dx_i = (\vec{w} \times d\vec{r})_j$$

To predstavlja **infinitezimalno rotacijo**, kjer je $\vec{w}$ kot zasuka $\delta\vec{\varphi}$. Bolj natančno imamo poleg te "majhnosti" še eno in sicer majhna razlika $d\vec{r}$ med bližnjima točkama.

$$\delta d\vec{u} = \delta\vec{\varphi} \times d\vec{r}$$

Če to pogledamo na časovno enoto:

$$\frac{\delta}{\delta t} d\vec{u} = \frac{d\vec{\varphi}}{\delta t} \times d\vec{r} \Rightarrow d\vec{u} = \vec{\omega} \times d\vec{r}$$

Za $\vec{\omega} \neq \vec{\omega}(\vec{r})$ predstavlja to **togo rotacijo** in je $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Sicer pa je za $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{r})$ to **lokalna deformacija**.

Zaradi kompletnosti bomo tu zapisali $\vec{w}$ z $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$.

$$W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \qquad w_k = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{ij}$$

$$w_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}W_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} =$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{u})_k \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{u} = 2\vec{w}$$

[Zgled: Strižno deformacijsko polje]

To so slike v pomoč zato. Najdeš jih lahko na str. 6. Imejmo strižno deformacijsko polje:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = a$$

Zapišimo to kot tenzor in ga nato razcepimo, kot smo se naučili:

$$\nabla\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

Poglejmo si kakšne krivulje predstavlja prva matrika. Imamo prisotna dva odvoda:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{1}{2}a \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2}a$$

$$u_y = \frac{1}{2}ax \qquad u_x = \frac{1}{2}ay$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} = \frac{x}{y}$$

$$\int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = C$$

To so **hiperbole.** Podobno lahko pogledamo za drugo matriko:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{1}{2}a \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2}a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x} = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C$$

To pa so **krožnice.** Torej, anti-simetričen del $\nabla\vec{u}$ je deformacijsko polje infinitezimalne toge rotacije česar v našem deformacijskem tenzorju nočemo imeti.

Izpeljava deformacijskega tenzorja

Ugotovili smo kako lahko tenzor razstavimo in kaj posamezni deli pomenijo. Sedaj pa zahtevamo slednje:

Energija je odvisna samo od razdalj med bližnjimi delčki.

Zaradi te zahteve deformacijski tenzor opiše **natanko spremembe razdalj med bližnjimi točkami**. Tu bo spet v pomoč prišla skica postavitve vektorjev, ki jo lahko najdeš na str. 7.

Formalno

Storimo to prvo formalno. Opišimo razdaljo pred deformacijo:

$$dr^2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} dx_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} dx_i \, dx_j = g_{ij} dx_i \, dx_j$$

kjer smo metrični tenzor zapisali kot:

$$g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j}$$

Opišimo sedaj še razdaljo po deformaciji:

$$dr'^2 = \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{r}'}{\partial x_j} dx_i \, dx_j = g'_{ij} dx_i \, dx_j$$

Tako lahko spremembo razdalji opišemo s **spremembo metričnega tenzorja**:

$$dr'^2 - dr^2 = (g'_{ij} - g_{ij}) dx_i \, dx_j$$

Bolj praktično izvedeno

Dajmo to izvest še praktično. Premaknjene lege lahko opišemo z vektorjem premika $\vec{u}$.

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r} + \vec{u} \qquad d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u}'$$

Sedaj pa primerjajmo dr^2 in $dr'^2 = (d\vec{r} + d\vec{u})^2$

$$dr'^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right)^2 =$$

$$= \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right) \left(dx_{+} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right) =$$

$$= dx_i^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_i \, dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j \, dx_k =$$

Da dobimo končno obliko moramo samo še simetrizirati drugi člen in zadnjemu malo zamenjati indekse:

$$= dr^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i \, dx_j + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j \, dx_k =$$

$$= dr^2 + \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] dx_i \, dx_j$$

To v kvadratastih oklepajih proglasimo za naš **deformacijski tenzor**, samo pazi, ker je to v bistvu $2u_{ij}$. Tako je predpis za **deformacijski tenzor**:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right]$$

Interpretacija deformacijskega tenzorja

Ker je deformacijski tenzor simetričen ga lahko diagonaliziramo, v neki dani točki, kjer je v splošnem odvisen od kraja. Poglejmo, kaj pomenijo njegovi elementi.

Pomen diagonalnih elementov

Poglejmo si primer brez rotacije in z majhno deformacijo. Torej:

$$u_{ij} = (\nabla \vec{u})_{ij}$$

Točki, ki sta razmaknjeni v lastni smeri $d\vec{r}$ se tudi pri deformaciji razmakneta samo v tej smeri in sicer za $d\vec{u}$. V lastnih smereh je deformacija torej **raztezanje/krčenje**. Torej lahko za lastno smer v 1. redu zapišemo:

$$u_{11} \approx \frac{du_1}{dx_1}$$

To seveda enako velja za u_{22} in u_{33}. Vedno lahko najdemo tak sistem, kjer je deformacija tako preprosta! S celotnim u_{ij} je stvar lahko nepregledna. V lastnem sistemu lahko zapišemo deformacijo kot vsoto neodvisnih členov:

$$dr'^2 - dr^2 = 2u_{11}\, dx_1^2 + 2u_{22}\, dx_2^2 + 2u_{33}\, dx_3^2$$

Torej: **deformacijo lahko sestavimo iz neodvisnih deformaciji, v lastnih smereh u_{ij}, ki so enostavna raztezanja v teh smereh**. Raztezek se lahko zapiše kot:

$$2u_{11} = \frac{dx_1'^2 - dx_1^2}{dx_1^2} = \frac{(dx_1' + dx_1)(dx_1' + dx_1)}{dx_1^2}$$

Če v prvem redu aproksimiramo $(dx_1' + dx_1) \approx 2dx_1$, dobimo **pomen elementa**:

$$u_{11} = \frac{1}{2}\frac{2dx_1(dx_1' + dx_1)}{dx_1^2} \approx \frac{dx_1' - dx_1}{dx_1}$$

Pomen izvendiagonalnih elementov

Pri izvendiagonalnih elementih so premiki pravokotni na razmik točk, torej se v 1. redu ne spremeni razdalja med točkama, ampak kot vektorja med njima $d\vec{r}$. **Ampak pazi:** Kot vektorja se spremeni tudi pri rotaciji, ki je pa u_{ij} ne vsebuje več. Pogoje je tak, da če velja:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \Rightarrow \text{Rotacija}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \neq -\frac{\partial u_y}{\partial x} \Rightarrow \text{Deformacija}$$

1. možnost

Prva možnost je, da pogledamo kako se spremeni kot med pravokotnima vektorjema pri rotaciji. Na nju rotacija naj ne bi imela vpliva.

$$d\vec{x}' = d\vec{x} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} dx$$

oz. po komponentah zapisano:

$$d\vec{x}' = dx\left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$d\vec{y}' = dy\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}, 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}, \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)$$

Iz česar dobimo v 1. redu:

$$d\vec{x}' \cdot d\vec{y}' \approx dx\, dy\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = 2u_{xy} dx\, dy$$

Velja pa tudi običajna enakost za skalarni produkt:

$$d\vec{x}' \cdot d\vec{y}' = dx'\, dy' \cos\theta$$

Če to združimo dobimo:

$$\cos\theta = \frac{d\vec{x}' \cdot d\vec{y}'}{dx'\, dy'} = \frac{2u_{xy} dx\, dy}{dx'\, dy'} \approx 2u_{xy}$$

2. možnost

Lahko pa pogledamo kako se zasuče en vektor pri pravokotnem premiku z odšteto rotacijo.

$$du_y = u_{xy}\, dx \Rightarrow \theta_{xy} \approx \frac{du_y}{dx} = u_{xy}$$

$$du_z = u_{xz}\, dx \Rightarrow \theta_{xz} \approx \frac{du_z}{dx} = u_{xz}$$

Sprememba prostornine pri deformaciji

V lastnem sistemu [lažji način]

Najlažje se spremembo vidi v lastnem sistemu u_{ij}. Na začetku imamo:

$$dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$$

Po deformaciji pa je to:

$$dV' = dx_1'\,dx_2'\,dx_3' =$$

$$= (1+u_{11})\,dx_1\,(1+u_{22})\,dx_2\,(1+u_{33})\,dx_3\ =$$

$$= dx_1\,dx_2\,dx_3\,(1+u_{11}+u_{22}+u_{33}+\ldots) \approx dV(1+u_{kk})$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dV'-dV}{dV} = u_{kk} = \mathrm{tr}(u)$$

Sled u_{ij} podaja **relativno lokalno spremembo volumna**.

V splošnem sistemu

Malo bolj zapleteno je če si to predstavljamo v splošnem sistemu, ampak je tudi popolnoma mogoče. Deformacijo $\vec{r} \to \vec{r}'(\vec{r})$ si lahko predstavljamo kot transformacijo med koordinatami $\vec{x} \to \vec{x}'(\vec{x})$. Torej imamo:

$$dV = dx\,dy\,dz \quad \to \quad dV' = \det J\,dx'\,dy'\,dz'$$

kjer moramo upoštevati, da rabimo pri pretvorbi koordinat determinanto Jacobijeve matrike, ki ima predpis:

$J_{ij} = \dfrac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ker lahko deformacijo zapišemo indeksno kot $x_i' = x_i + u_i(x_j)$. Jacobijeva matrika je potem:

$$J = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1+\frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1+\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Izračunajmo približek determinante:

$$\det J = \left(1+\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\left[\left(1+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial u_x}{\partial y}[\mathcal{O}(1)] + \frac{\partial u_x}{\partial z}[\mathcal{O}(1)] =$$

$$= 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\frac{dV'}{dV} = \det J \approx 1 + u_{kk} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV'-dV}{dV} = u_{kk}$$

Lagrangev in Eulerjev deformacijski tenzor

Pravzaprav obstajata dva predpisa za deformacijski tenzor, ki se nekoliko razlikujeta. Na hitro si poglejmo.

Lagrangev opis

Lagrange pravi, da premik izrazimo v koordinatnem sistemu nedeformiranega telesa oz. s starimi koordinatami. Torej koordinate položimo pred deformacijo. Označujejo delčke telesa. Dokler je deformacija majhna in bližnje točke ostanejo bližnje je deformacijsko polje smiselno vprašanje, kar pomeni, da je takšen predpis **naraven za elastomehaniko**.

Eulerjev opis

Euler pa pravi, da premik izrazimo v koordinatnem sistemu deformiranega telesa oz. z novimi koordinatami. Ta pride bolj v upoštev v primeru “premešanega sistema”, kjer ni smiselno, da koordinata označuje delčke. Položimo koordinate šele po deformaciji. To vse nam omogoči, da izvemo npr. $\vec{v}$, T, p, ... Pravzaprav ima to največ smisla ko želimo slediti delčkom. V kontinuumu pa ravno ni delčkov, so samo polja v prostoru.

Mehanska napetost in napetostni tenzor

Notranje sile na izbrani delček predstavljajo sile okoliških delcev nanj. Te sile se **izničijo**, **napetosti ostanejo**. Mi bomo predpostavili, da so sile v snovi kratkega dosega (t.i. “kontaktne” sile) in tako delujejo le na površini delčka. Torej celotna sila, za katero vemo, da je tu sila okolice na delček oz. elastična sila se mora zapisati dati zapisati kot integral po površini delčka:

$$F_i = \int f_i(\vec{r})\,dV$$

$f_i(\vec{r})$ mora biti divergenca nečesa, torej divergenca tenzorja, ker je stvar sama vektor. Tako dajmo definirati f_i kot divergenco **napetostnega tenzorja** σ_{ij}

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}$$

Tako imamo predpis za silo:

$$F_i = \int f_i\, dV = \int dV \partial_j \sigma_{ij} = \oint dS_j \sigma_{ij}$$

Pomen komponent σ_{ij}

Z malo premisleka ugotovimo. da prvi indeks predstavlja silo, drugi indeks pa geometrijo. Torej če to lepše interpretiramo je σ_{ij} i-ta komponenta površinske gostote sile na j-to komponento ploskve.

Navor in simetričnost σ_{ij}

Dajmo izračunati navor elastičnih sil na delček M_i. Tudi ta se mora dati zapisati kot integral po površini delčka:

$$M_i = \int dV \varepsilon_{ijk} x_j f_k = \int dV \varepsilon_{ijk} x_k \partial_l \sigma_{kl}$$

Uvedimo slednjo oznako namesto splošnega ε_{ijk}:

$$M_{ij} = \int dV (x_i f_j - x_j f_i)$$

Pojdimo dalje s tem primerom:

$$M_{ij} = \int dV (x_i f_j - x_j f_i) = \int dV \left(x_i \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) =$$

$$= \int dV \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik}) - \int dV \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} \sigma_{jk} - \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \sigma_{ik} \right) =$$

$$= \oint dS_k (x_i \sigma_{jk} - x_j \sigma_{ik}) - \int dV (\sigma_{ji} - \sigma_{ij})$$

Če želimo, da volumski del izgine mora biti σ_{ij} **simetričen**. Kaj to implicira? No, če bi veljalo $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ji}$ bi imeli neko volumsko gostoto navora. Vsak infinitezimalen delček bi bil obremenjen z navorom. To pa ni kar tako, saj takšen volumski navor pada kot r^3, vztrajnostni moment pa kot r^5. To bi vseeno pomenilo, da bi kotni pospešek $\alpha \to \infty$.

Volumske gostote navora ne sme biti!

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Ampak čakaj pravite, brez težav imamo v snovi volumsko gostoto navora in to res velja. Lahko si zamislimo, da imamo snov z polarizacijo v zunanjem električnem polju. V tem primeru mora obstajati volumska gostota elastičnega navora (anti-simetričen del σ_{ij}), ki **vedno**, tudi v nestatični situaciji, eksaktno izravna volumsko gostoto zunanjega navora (npr. električen navor).

Volumska gostota elastičnega navora pa se mora dati še vedno zapisati kot nek površinski integral. To sledi iz mikroskopske teorije. Je pa tudi logično, sicer ne bi mogli doseči ravnovesja z navorom na površino. *Npr. Kovač vpne železo in mu z navorom na površino prepreči vrtenje*.

Torej anti-simetričen del σ_{ij} v splošnem lahko obstaja, a ponavadi ne. Če obstaja mora biti to divergenca tenzorja 3. ranga:

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} = 2\frac{\partial \Phi_{ijk}}{\partial x_k} \qquad \Phi_{ijk} = -\Phi_{jik}$$

Obstaja samo če mora obstajati, sicer ne.

[Zgled: Nekaj napetostnih tenzorjev]

Izotropni tlak

Za izotropni tlak, recimo tlak v tekočini. je predpis za napetostni tenzor:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Sila na delček oz. volumska gostota sile je v tem primeru:

$$f_i = \partial_j \sigma_{ij} = -\delta_{ij}\partial_j p = -\partial_i \Rightarrow \vec{f} = -\nabla p$$

Da dobimo silo na območje pa moramo to pointegrirati po ploščini:

$$F_i = \oint dS_j \sigma_{ij} = -\oint dS_j p \delta_{ij} = -\oint dS_i p =$$

$$= -\int dV \partial_i p$$

Privzemimo, da je p hidrostatičen tlak $p(\vec{r}) = \rho \vec{g} \cdot \vec{r}$. Dobimo **vzgon**!

$$F_i = -\int dV \partial_i p = -\rho g_j \int dV \partial_i x_j = -\rho g_j \int dV \delta_{ij} =$$

$$= -\rho g_i V$$

Enoosna obremenitev

Npr. če ima napetostni tenzor neničeleno samo komponento σ_{zz} potem vemo, da imamo eno osno obremenitev v smeri z.

Strižna obremenitev

Npr. če ima napetostni tenzor neničelno samo komponento $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ potem vemo, da imamo strig, kjer sila v x smeri potiska/vleče na ploskev z normalo v y smeri.

Gibalna enačba (2. Newtonov Zakon)

Zdaj ko poznamo elastično silo na delček lahko zapišemo gibalno enačbo zanj. Zapišemo ga kot vsoto elastičnih in zunanjih sil:

$$dm\, \ddot{\vec{u}} = d\vec{F}_{el} + d\vec{F}_z$$

in ker smo v zveznem sredstvu, ga zapišemo na enoto prostornine:

$$\rho \ddot{u}_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i^z$$

Iz tega dobimo pogoj za ravnovesje, tako imenovan **Cauchyjev pogoj**:

$$\partial_j \sigma_{ij} + f_i^z = 0$$

To je volumski pogoj za ravnovesje. To pomeni, da mora veljati v vsaki točki volumna. Dodatno pa imamo za ravnovesje še robni pogoj, to je ravnovesje površinskih sil na mejah volumna:

$$\sigma_{ij} dS_j = dF_i^z$$

Pazi: Tu $\vec{f}^z$ in $\vec{F}^z$ nimata nobene zveze. To sta ločeni zadevi.

Gibalne enačbe v splošnem tu še ne moramo rešiti saj je robni pogoj lahko tudi na $\vec{u}$ in naš problem ima samo 3 prostostne stopnje, ne pa 6 kot pri σ_{ij}. Rabimo zvezo med σ_{ij} in u_{ij} in vse moramo izraziti z $\vec{u}$. To zvezo nam podaja **Hookov zakon**.

Delo pri deformaciji

Delo, ki smo ga opravili pri deformaciji, je šlo v elastično energijo. Deformacijo naj povzroča zunanja sila $\vec{f}^z$. Če želimo, da je delo sile $\vec{f}^z$ enako spremembi elastične energije **ne smemo večati kinetične** energije. Tako iz ravnovesja sil sledi:

$$\vec{f}^{el} = -\vec{f}^z$$

Sprememba elastične energije je enaka negativnemu delu elastične sile. Sedaj pa naredimo deformacijo za $\delta\vec{u}$ in izračunamo spremembo energije δW pri temu:

$$\delta W = \int dV \delta W = -\int dV f_i^{el} \delta u_i = -\int dV (\partial_j \sigma_{ij}) \delta u_i =$$

$$= -\int dV \left[\partial(\sigma_{ij} \delta u_i) - \sigma_{ij} \partial_j \delta u_i\right] =$$

$$= -\oint dS_j \sigma_{ij} \delta u_i + \int dV \sigma_{ij} \partial_j \delta u_i =$$

$$= -\oint dS_j \sigma_{ij} \delta u_i + \int dV \sigma_{ij} \frac{1}{2}(\partial_i \delta u_j + \partial_j \delta u_i) =$$

$$= -\oint dS_j \sigma_{ij} \delta u_i + \int dV \sigma_{ij} \delta u_{ij}$$

Prvi člen (površinski člen) za neskončno sredstvo ali pa za na mejah neobremenjeno ($\sigma = 0$) ali na mejah ne premaknjeno ($\delta u_i = 0$) sredstvo odpade. Tako ostane samo:

$$\delta W = \int dV \sigma_{ij} \delta u_{ij} = \int dV \delta W$$

$$\Rightarrow \delta W = \sigma_{ij} \delta u_{ij}$$

Iz tega dobimo ob predpostavki, da ni izmenjave toplote (ker je nismo upoštevali v bilanci za delo):

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial W}{\partial u_{ij}} \right)_S$$

Ponavadi je relevantna prosta energija $f = w - Ts$. V tem primeru je:

$$df = -s\, dT + \sigma_{ij}\, du_{ij} \qquad \sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_{ij}} \right)_T$$

Torej moramo poznati $f(u_{ij})$.

Elastična energija

Zapisati želimo gostoto elastične proste energije v odvisnosti od u_{ij}, torej $f(u_{ij})$ do najnižjega netrivialnega reda. Izkaže se, da je to 2. red u_{ij} Členov 1. reda ne sme biti, drugače ne obstaja stabilno ravnovesje (imamo lahko samo implozijo ali eksplozijo), saj mora biti $f(u_{ij})$ za $u_{ij} = 0$ minimalna.

Energija je skalar, torej je lahko odvisna le od skalarjev, ki jih tvorimo iz u_{ij}. To je enostavno in velja za poljubne range. Poiskati moramo vse različne načine, po katerih lahko **kontraktiramo indekse** vse do skalarja, ki nima indeksa.

Kontrakcija indeksov pomeni znebiti se indeksov po pravilnem načinu.

Za u_{ij} sta samo dve možnosti pravzaprav in sicer:

$$u_{kk} \qquad u_{ij}^2 = u_{ij} u_{ij}$$

Iz tega sledi, da je v izotropnem sistemu, ki ima rotacijsko simetrijo in nima nobene posebne lastnosti, ki bi zmanjševala to simetrijo/nobenega z manjšo simetrijo elastična prosta energija zapisana kot:

$$f(u_{ij}) = f_0 + \frac{1}{2} \lambda u_{kk}^2 + \mu u_{ij}^2$$

kjer sta λ, μ **Lamejeva elastična koeficienta**.

[Zgled: Tak objekt, ki zlomi simetrijo]

Poglejmo si nek objekt, ki bi lahko zlomil prej omenjeno simetrijo. To bi lahko bil npr. nek vektor $\vec{a}$, ki obstaja, če je sistem polaren. Tak sistem ima manjšo simetrijo. *Invarianten je le še na rotacije okrog osi $\vec{a}$.*

Se pa pojavijo nove invariante:

$$a_i a_j u_{ij} u_{kk} \quad \frac{1}{2}(a_i a_j u_{ik} u_{jk} + a_i a_j u_{ki} u_{kj}) \quad (a_i a_j u_{ij})^2$$

Tu je treba paziti tudi na inverzijsko simetrijo. Zgoraj ji je zadoščeno avtomatsko. Torej manjša simetrija vodi v več objektov, ki jo karakterizirajo, ti pa predstavljajo več invariant, ki so pa pravzaprav elastični koeficienti.

V najsplošnejšem primeru, ko sistem nima več nobene rotacijske simetrije je skalar tole:

$$f(u_{ij}) = f_0 + \frac{1}{2} K_{ijkl} u_{ij} u_{kl}$$

kjer je K_{ijkl} **splošna elastična konstanta (tenzor 4. ranga)**, kjer so elementi tega tenzorja poljubni. No pravzaprav niso čisto poljubni. Vseeno morajo po definiciji zadoščati permutacijskim simetrijam:

$$K_{ijkl} = K_{klij} = K_{jikl} = K_{ijlk}$$

kar zmanjša število elementov iz $3^4 = 81$ na 21. Kot zanimivost lahko K_{ijkl} izotropnega sistema vsebuje le δ_{ij}. Ta bi v splošnem primeru sicer bil metričen tenzor.

$$K_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta il) \Rightarrow \frac{1}{2} K_{ijkl} u_{ij} u_{kl}$$

Hookov zakon $(\sim F = kx)$

Hookov zakon je linearna zveza med σ_{ij} in u_{ij}. Zdaj ko smo si vse pripravili jo je čisto preprosto izpeljati. Spomnimo se, da smo pokazali, da je:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_{ij}}\right)_T$$

kjer smo prav tako ravno pokazali, da je v splošnem:

$$f = \frac{1}{2} K_{ijkl} u_{ij} u_{kl}$$

Če to odvajamo (ne vem, kam gre polovička sicer), dobimo **Hookov zakon**:

$$\sigma_{ij} = K_{ijkl} u_{kl}$$

Izračunajmo to še za set z Lamejevimi koeficienti:

$$f = \frac{1}{2}\lambda u_{kk}^2 + \mu u_{ij}^2$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda u_{kk}\delta_{ij}$$

Pri izračunih nam bo zelo prav prišla obratna zveza, torej $u_{ij}(\sigma_{ij})$, dajmo jo dobit. Moti nas u_{kk}, ker je to vsota več komponent. Dajmo najprej povezati u_{kk} in σ_{kk}. Vzemimo sled enačbe σ_{ij}:

$$\sigma_{kk} = 2\mu u_{kk} + 3\lambda u_{kk} = (2\mu + 3\lambda) u_{kk} \Rightarrow u_{kk} = \frac{1}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{kk}$$

Zdaj pa lahko obrnemo vse, da dobimo še obratno zvezo:

$$u_{ij} = \frac{1}{2\mu}[\sigma_{ij} - \lambda u_{kk}\delta_{ij}]$$

$$\Rightarrow u_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right]$$

Navierova enačba

Navierovo enačbo dobimo tako, da skombiniramo to kar smo do sedaj izpeljali, torej gibalno enačbo in Hookov zakon.

$$\rho \ddot{u}_i = \partial_j \sigma_{ij} + f_i^z$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda u_{kk}\delta_{ij}$$

Sedaj to združimo in vse izrazimo z u_{ij}

$$\rho \ddot{u}_i = 2\mu \partial_j u_{ij} + \lambda \partial_j u_{kk}\delta_{ij} + f_i^z =$$

$$= 2\mu \partial_j \frac{1}{2}(\partial_i \backslash\mathbf{u}_j + \partial_j u_i) + \lambda \partial_i u_{kk} + f_i^z =$$

$$= \mu \partial_i \partial_j u_j + \mu \partial_j^2 u_i + \lambda \partial_i \partial_k u_k + f_i^z =$$

$$= \mu \partial_j^2 u_i + (\lambda + \mu)\partial_i(\partial_k u_k) + f_i^z$$

Če se vrnemo v vektorsko obliko, kjer je to mogoče preglednejše dobimo **Navierovo enačbo**:

$$\rho \ddot{\vec{u}} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \vec{f}^z$$

Zapis $f = \frac{1}{2}\lambda u_{kk}^2 + \mu u_{ij}^2$ ni najlepši, ker u_{ij}^2 ni razcepljen na “ireducibilne” dele in vsebuje tudi izotropen del, ki je že zapisan v prvem členu. Vemo, da u_{kk}^2 podaja enrgijo izotropnega stiskanja. medtem ko u_{ij}^2 pa enako penalizira kakršnokoli deformacijo. Zapišimo dalje:

$$f = \frac{1}{2}K u_{kk}^2 + \mu' \left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)^2$$

kjer je K **stisljivostni modul (angl. bulk modulus)**. Drugi člen zdaj ne ne vsebuje izotropne definicije. Primerjamo lahko tako, da vstavimo brezsledni u_{ij} (deformacijo brez izotropnega stiskanja):

$$f = \mu u_{ij}^2 \quad f = \mu' u_{ij}^2 \quad \Rightarrow \quad \mu' = \mu \quad \text{strižni modul}$$

Torej, kar smo do zdaj ugotovili:

$$f = \frac{1}{2}Ku_{kk}^2 + \mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)^2$$

Vstavimo sedaj še izotropno deformacijo:

$$u_{ij} = \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}$$

$$f = \frac{1}{2}Ku_{kk}^2 + \mu\left(\frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}\lambda u_{kk}^2 + \mu\frac{1}{9}u_{kk}^2 \cdot 3 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\mu\right)u_{kk}^2$$

To pa primerjamo z prejšnjim izrazom za $f = \frac{1}{2}Ku_{kk}^2$ in dobimo:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \qquad \lambda = K - \frac{2}{3}\mu$$

Ker smo sadomazohisti dajmo še direktno povezati to kar smo ravnokar izpeljali:

$$\frac{1}{2}K_{kk}^2 + \mu'\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)^2 = \frac{1}{2}Ku_{kk}^2 + \mu'\left[u_{ij}^2 - \frac{2}{3}u_{ij}u_{kk}\frac{3}{9}u_{kk}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}Ku_{kk}^2 + \mu'\left(u_{ij}^2 - \frac{2}{3}u_{kk}^2 + \frac{1}{3}u_{kk}^2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}K - \frac{1}{3}\mu'\right)u_{kk}^2 + \mu' u_{ij}^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}K - \frac{1}{3}\mu = \frac{1}{2}\lambda \qquad \mu' = \mu$$

Še nekaj: izotropna in brezsledna deformacija sta neodvisni. Lahko imamo tudi samo eno ali drugo. Torej je pogoj za stabilno ravnovesje f pozitivna definitnost koeficientov:

$$K > 0 \qquad \mu > 0$$

To recimo ne velja za λ ali pa druge kombinacije. Drugače pa lahko dobimo še Hookov zakon za par K, μ z upoštevanjem zveze:

$$\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$$

No pa kar dajmo, da bo kompletno:

$$f = \frac{1}{2}Ku_{kk}^2 + \mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}Ku_{kk}^2 + \mu\left(u_{lm} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{lm}\right)\left(u_{lm} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{lm}\right)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial u_{ij}} = Ku_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{lm} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{lm}\right)\left(\delta_{il}\delta_{jm} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{lm}\right) =$$

$$= Ku_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij} + \frac{3}{9}u_{kk}\delta_{ij}\right) =$$

$$= Ku_{kk}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij} - \frac{2\mu}{3}u_{kk}\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = Ku_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(u_{ij} - \frac{1}{3}u_{kk}\delta_{ij}\right)$$

Pa smo! K podaja napetosti pri izotropnem stiskanju, μ pa podaja napetosti pri brezsledni deformaciji. Sedaj lahko napišemo tudi **Navierovo enačbo** v bolj znani obliki z temi novimi parametri:

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \mu\nabla^2\vec{u} + \left(K + \frac{1}{3}\mu\right)\nabla\nabla\cdot\vec{u} + \vec{f}^z$$

[Zgled: Izotropna deformacija]

Imejmo izotropno deformacijo:

$\sigma_{ij} = Ku_{kk}\delta_{ij} \Rightarrow \sigma_{kk} = 3Ku_{kk}$ V primeru izotropnega tlaka je to potem:

$$-3p = 3K\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K}p \Rightarrow \chi_T = \frac{1}{K}$$

Vidimo, da v takem primeru K predstavlja izotermno stisljivost.

[Zgled: Strižna deformacija]

Imejmo še strižno deformacijo sile iz smeri x na ploskev v smeri y:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial y}\,dy$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} \qquad \sigma_{xy} = 2\mu\frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

To dobro prepoznamo kot čisto klasičen izraz, kjer je μ strižni modul:

$$\frac{F_x}{S_y} = \mu\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Fundamentalna rešitev statične Navierove enačbe

Iščemo fundamentalno rešitev statične Navierove enačbe oz. njeno **Greenovo funkcijo**. Ta rešitev se imenuje **Kelvinova rešitev.** Računali bomo za neskončno sredstvo. Rešujemo enačbo:

$$\nabla^2\vec{u} + \frac{K+\frac{\mu}{3}}{\mu}\nabla\nabla\cdot\vec{u} = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

Greenova funkcija je rešitev v primeru **točkaste nehomogenosti**. Ta izjava velja splošno in za splošno geometrijo.

$$\nabla^2\vec{u} + \frac{K+\frac{\mu}{3}}{\mu}\nabla\nabla\cdot\vec{u} = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^0\delta(\vec{r}-\vec{r_0})$$

Če poznamo Greenovo funkcijo, poznamo rešitev za poljubno nehomogenost, zaradi tega ji pravimo tudi fundamentalna rešitev. V našem primeru Greenova funkcija povezuje $\vec{u}$ in $\vec{f}^z$ in je torej tenzor, ki ga bomo označili z $G_{ij}(\vec{r},\vec{r_0})$:

$$u_i^0(\vec{r}) = G_{ij}(\vec{r},\vec{r_0})\;\vec{f}_k^0(\vec{r_0})$$

Za poljubno nehomogenost $\vec{f}^z$:

$$u_i^0(\vec{r}) = \int d^3r_0\;G_{ij}(\vec{r},\vec{r_0})\;f_j^z(\vec{r_0})$$

ker je Navierova enačba linearna velja, da bo rešitev vsote sil je vsota rešitev. Kar mislim s tem je, da lahko poljubno porazdelitev sil $\vec{f}^z(\vec{r})$ sestavimo iz točkastih sil in enako sestavimo lahko rešitev:

$$\vec{f}^z(\vec{r}) = \int d^3r_0\;\vec{f}^z(\vec{r_0})\delta(\vec{r}-\vec{r_0})$$

$$u_i(\vec{r}) = \int d^3r_0\;f_k^z(\vec{r_0})\;G_{ij}(\vec{r},\vec{r_0})$$

Intermezzo: Električen potencial točkastega naboja

Spomnimo se Poissonove enačbe:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Njena Greenova funkcija je:

$$\phi^0(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_0}|}$$

Tako je rešitev za poljubno porazdelitev naboja:

$$\phi(r) = \int d^3r_0\;\frac{\rho(\vec{r_0})}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r_0}|}$$

Okay returning back to the previous topic. Če hočemo izračunati Greenovo funkcijo Navierove enačbe za neskončen prostor naletimo na problem in sicer, da nam člen $\nabla\nabla\cdot\vec{u}$ sklaplja komponente $\vec{u}$. Vzamemo **Galerkinov nastavek:**

$$\vec{u} = a\nabla^2\vec{g} - b\nabla\nabla\cdot\vec{g}$$

kjer sta a,b poljubni konstanti. Vstavimo to v enačbo, ki smo jo zgoraj zapisali, da jo rešujemo:

$$a\nabla^2\nabla^2\vec{g} - b\nabla^2\nabla\nabla\cdot\vec{g} + \frac{K+\frac{\mu}{3}}{\mu}\nabla\nabla\cdot[a\nabla^2\vec{g} - b\nabla\nabla\cdot\vec{g}] = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

$$a\nabla^2\nabla^2\vec{g} - b\nabla^2\nabla\nabla\cdot\vec{g} + \frac{K+\frac{\mu}{3}}{\mu}[a\nabla^2\nabla\nabla\cdot\vec{g} - b\nabla^2\nabla\nabla\cdot\vec{g}] = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

Tu smo si med vrsticama pomagali z identiteto $\nabla\nabla\cdot = \nabla\times\nabla\times + \nabla^2$. Nadaljujemo

$$a\nabla^2\nabla^2\vec{g} + \left(-b + \frac{K+\frac{\mu}{3}}{\mu}(a-b)\right)\nabla^2\nabla\nabla\cdot\vec{g} = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

Sedaj pa izberemo a,b tako, da drugi člen odpade:

$$\Rightarrow -\mu b + \left(K + \frac{\mu}{3}\right)(a-b) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{K+\frac{\mu}{3}}{K+\frac{4}{3}\mu}a \qquad a = 1$$

Tako ostane enačba katere obliko prepoznamo kot **Biharmonična enačba**:

$$\nabla^2\nabla^2\vec{g} = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^z$$

$$\vec{u} = \nabla^2\vec{g} - \frac{K+\frac{\mu}{3}}{K+\frac{4}{3}\mu}\nabla\nabla\cdot\vec{g}$$

Sicer je biharmonična enačba višjega reda, a vsaj komponente niso sklopljene. Torej ideja je zdaj takšna, da rešimo biharmonično enačbo, da dobimo $\vec{g}(\vec{r})$ in s tem izračunamo $\vec{u}(\vec{r})$.

Reševanje biharmonične enačbe

Imamo skalarno biharmonično enačbo za vsako neodvisno komponento. Poiščimo njeno Greenovo funkcijo, a pred tem označimo $\nabla^2 u = w$:

$$\nabla^2\nabla^2 u = \delta(\vec{r} - \vec{r_0})$$

Vemo pa da za Poissonovo enačbo velja:

$$\nabla^2 w = \delta(\vec{r} - \vec{r_0}) \Rightarrow w = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r_0}|}$$

Postavimo izhodišče v $\vec{r} = \vec{r_0}$, na koncu pa samo premaknemo rešitev, da bo manj pisanja. To lahko storimo zaradi translacijske invariance, ker rešujemo za neskončen prostor:

$$\nabla^2 = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\nabla\cdot\nabla u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{r}{4\pi}$$

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{r^2}{8\pi} + C$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{8\pi} + \frac{C}{r^2}$$

Ker ne sme biti divergence v izhodišču tu člen z integracijsko konstanto C odpade. Pointegriramo in dobimo kot rešitev:

$$u = -\frac{r}{8\pi} + C' \qquad u(\vec{r}) = -\frac{|\vec{r} - \vec{r_0}|}{8\pi} + C'$$

Torej: $\nabla^2\nabla^2\vec{g} = -\frac{1}{\mu}\vec{f}^0\delta(\vec{r} - \vec{r_0}) \Rightarrow \vec{g} = \frac{|\vec{r} - \vec{r_0}|}{8\pi}\vec{f}^0 + \vec{C}'$

Torej se vrnimo zdaj in izračunajmo končno še:

$$\vec{u} = \nabla^2 \vec{g} - \frac{K + \frac{\mu}{3}}{K + \frac{4}{3}\mu} \nabla\nabla \cdot \vec{g}$$

Izračunajmo $\nabla^2 \vec{g}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g_i = \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2} = \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)_j}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)^2}} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \left[\frac{3}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)}} - \frac{1}{2} (r - r_0)_j \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_0)_j}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^{3/2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \left[\frac{3}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)}} - \frac{1}{\sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_0)}} \right] = \frac{1}{4\pi\mu} f_i^0 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Kar pa je v bistvu že znan rezultat. Torej:

$$(\nabla\nabla \cdot \vec{g})_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} g_j = \frac{1}{8\pi\mu} f_j^0 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)_j}{\sqrt{\vec{r} - \vec{r}_0}} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} f_j^0 \delta_{ij} \frac{1}{\sqrt{\vec{r} - \vec{r}_0}} - \frac{1}{8\pi\mu} f_j^0 (\vec{r} - \vec{r}_0)_j \frac{1}{2} \frac{2(\vec{r} - \vec{r}_0)_j}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} f_i^0 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{1}{8\pi\mu} (\vec{f}^0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)) \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)_i}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

Iz tega pa (nekako) sledi:

$$\vec{u} = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{\vec{f}^0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{K + \frac{\mu}{3}}{K + \frac{4}{3}\mu} \frac{1}{2} \left[\frac{\vec{f}^0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{(\vec{f}^0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0))(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right] \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu} \frac{1}{K + \frac{4}{3}\mu} \left[\left(K + \frac{4\mu}{3} - \frac{K}{2} - \frac{\mu}{2 \cdot 3} \right) \frac{\vec{f}^0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \frac{1}{2} (K + \frac{\mu}{3}) f^0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi\mu} \frac{K + \frac{\mu}{3}}{K + \frac{4}{3}\mu} \left[\frac{K + \frac{7}{3}}{K + \frac{\mu}{3}} \frac{\vec{f}^0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + \vec{f}^0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right]$$

Na začetku smo to zarisali kot $u_i = G_{ij} f_j$, kar pomeni, da je **Greenova funkcija** torej:

$$G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{8\pi\mu} \frac{3K + \mu}{3K + 4\mu} \left[\frac{3K + 7\mu}{3K + \mu} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \delta_{ij} + \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)_i (\vec{r} - \vec{r}_0)_j}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \right]$$