Hidrodinamika

Spremenljivke (oz. polja) s katerimi opišemo tekoči kontinuum so **hitrostno polje** $\vec{v}(\vec{r})$ in 2 **termodinamski količini** npr. $p(\vec{r})$ in $\rho(\vec{r})$. Ostale termodinamske količine so s tem določene preko enačbe stanja.

Kontinuitetna enačba za maso

Če si pogledamo spreminjanje mase znotraj nekega volumna:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dV\,\rho = -\oint d\vec{S}\cdot\rho\vec{v} = -\int dV\,\nabla\cdot(\rho\vec{v})$$

$$\Rightarrow \int dV\,\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right] = 0$$

Torej mora veljati povsod **kontinuitetna enačba za maso:**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

Pravzaprav posplošeno nam vsak ohranitveni zakon da kontinuitetno enačbo, ki je vedno oblike:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$$

kjer je ρ volumska gostota ohranjene količina (pri nas masa), $\vec{j}$ pa gostota njenega toka (pri nas $\vec{j} = \rho\vec{v}$ gostota masnega toka). Gostota masnega toka je kar produkt volumske gostote in hitrosti, kadar gre za makroskopsko gibanje, torej $\vec{v} \neq 0$. Pri difuziji pa imamo direktno $\vec{j}$. Tam ni makroskopskega gibanja, a difuzni tok pa obstaja.

Razpišimo tisto divergenco:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot\vec{v} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

Tu dobimo pomemben pogoj! Vidimo, da zato da je $\rho = \text{konst.}$ mora biti:

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

To je t.i. **nestisljiv tok** oz. pogoj zanj. Lahko pa to uporabimo tudi tako, da privzamemo pri modeliranju, da imamo nestisljiv tok in bodo kakšne divergence odpadle. Točno to bomo naredili.

Kontinuitetna enačba za gibalno količino

To smo pri predavanjih samo omenili, a smo dejansko izpeljali na vajah. Reminder je, da sem to jaz delal in da je bil kaos. Kakorkoli za popolnost:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \nabla\cdot\Pi_{ij} = 0$$

kjer je Π_{ij} tenzor gostote toka gibalne količine. Za izpeljavo glej vaje v skripti od profesorja.

Eulerjeva enačba

Eulerjeva enačba je pravzaprav le Newtonov zakon za idealno tekočino. Kaj je **idealna tekočina?** V njen nimamo izgube mehanske energije (torej ni disipacije). Iz tega sledi, da morata biti njena **viskoznost in toplotna prevodnost zanemarljivi**. V splošnem mora biti idealna **tekočina v termodinamičnem ravnovesju**, a ne zgolj v lokalnem ravnovesju, saj mora biti v tem tudi neidealna tekočina (da velja enačba stanja) in transportni pojavi morajo biti zanemarljivi npr. gibalna količina preko viskoznosti, toplote preko toplotne prevodnosti, koncentracije preko gradienta koncentracije in še bi se našlo..

Ker smo v ravnovesju morajo biti spremembe **adiabatne**, to pomeni, da je substancialni (materialni, totalni) odvod, s katerim "se peljemo z maso", entropije vsakega dela snovi enak 0. Zapišimo Newtonov zakon na enoto prostornine:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla\cdot\sigma + \vec{f}^z \qquad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

kjer je σ_{ij} tlak, ker v idealni tekočini ni drugega. Dajmo malo še olepšat tole enačbo:

$$\partial_j \sigma_{ij} = -\delta_{ij}\partial_j p = -\partial_i p$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \sigma = -\nabla p$$

Ker nočemo Lagrangeove formulacije ampak Eulerjevo, kjer ne sledimo delcem snovi, ampak opisujemo stvari z polji rabimo razpisati totalni odvod po času:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)$$

Tako se Eulerjeva enačba glasi:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{f}^z$$

Če gibaje ni le adiabatno $\left(\frac{ds}{dt} = 0\right)$, ampak celo **izentropno** $s = \mathrm{konst.}$ kjer je $s = \frac{\Delta S}{\Delta m}$ specifična entropija na enoto mase, lahko gradient tlaka $\frac{\nabla P}{\rho}$ iz razimo z gradientom specifične entalpije na enoto mase $h = \frac{\Delta H}{\Delta m}$:

$$dH = T\, dS + V\, dp \quad \Rightarrow \quad dh = T\, ds + \frac{1}{\rho}\, dp$$

$$dh = \frac{1}{\rho}\, dp \quad \Rightarrow \quad \nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p$$

kjer smo v prehodu med zgornjo in spodnjo vrstico uporabili dejstvo, da smo tu dali $ds = 0$. Gibanje idealne tekočine je običajno izentropno. To je zato, ker moramo na primer le pred začetkom gibanja zagotoviti, da velja $s = \mathrm{konst.}$. Za na prej pa adiabatnost poskrbi, da ta pogoj res ves čas velja.

V takem primeru se Eulerjeva enačba nekoliko polepša:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{v} = -\nabla h + \frac{\vec{f}^z}{\rho}$$

V h lahko vključimo vse potenciale na primer gravitacijskega kot gz ali električno potencialno energijo na enoto mase in tako dalje.

Privzemimo, da so vse zunanje sile potencialne spravljene v $-\nabla h$. Tu nam bo prišla zveza $\frac{1}{2}\nabla^2 = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ s katero bomo zamenjali lahko advekcijski odvod. Okay, gremo naprej:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{v} = -\nabla h$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h \right)$$

Sedaj pa delujemo še z rotorjem na enačbo, da jo res sčistimo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})]$$

Spomni se: Tu je člen z gradientom odpadel, ker je vedno $\nabla \times (\nabla f) = 0$. Vidimo da v tej enačbi nastopa pa le še hitrostno polje. Od tu sledi **pomemben izsledek:** Če je $\nabla \times \vec{v} = 0$ povsod, bo tako ostalo! Brezvrtinčni tok ostaja brezvrtinčen.

$$\nabla \times \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \nabla \phi \quad \text{potenialni tok}$$

To je pomembno saj sicer **potencialni tok** kot poseben primer ne bi imel smisla. Dodatno v nestisljivem primeru, ko velja:

$$0 = \nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0$$

je potencialni tok **odvisen le še od robnih pogojev** in zato nestacionaren le če se ti spreminjajo. Sicer pa je **nestisljiv potencial tok avtomatsko stacionaren!**

Helmholzova enačba za vrtinčnost

Izhajajmo iz tiste Eulerjeve enačbe, kjer smo vse zunanje sile upoštevali kot potenciale v entalpiji in nato delovali z rotorjem:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})]$$

Prav nam bo še prišlo tole:

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\, \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\, \vec{b} + \vec{a}\, (\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}\, (\nabla \cdot \vec{a})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0 \qquad \vec{f} \quad \text{poljubna}$$

Pisali bomo še $\nabla \times \vec{v} = \vec{\omega}$. Plan je tak, da po identiteti razpišemo:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\, \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{\omega} + \vec{v}\, (\nabla \cdot \vec{\omega}) - \vec{\omega}\, (\nabla \cdot \vec{v})$$

Tu se zdaj zgodi kar nekaj zanimivosti.. drugi člen bomo združili z levo stranjo v totalen odvod, tretji člen odpade zaradi identitete za nabla operatorje in zadnji člen odpade, ker obravnavamo nestisljiv primer, kar pomeni $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Preživi tako samo še:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\, \vec{v}$$

Ta člen opisuje dinamično vrtinčnost zaradi gradienta hitrostnega polja.

Bernoullijeve enačbe

Bernoullijeve enačbe predstavljajo ohranitev “energije”. So prvi integral Eulerjeve enačbe. Vse bo sledilo iz Eulerjeve enačbe, ki smo jo prej postavili v primeru, ko smo upoštevali zunanje sile kot potenciale v entalpiji:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) - \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h\right) \qquad h = h_0 + gz + \dots$$

Če je **tok brez vrtinčen** velja $\nabla \times \vec{v} = 0$:

$$\vec{v} = \nabla \phi \Rightarrow \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h\right) \Rightarrow \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} v^2 + h + \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t)$$

Vidimo da ni odvisnosti od kraja! Če je ob enem **tok še stacionaren** pa še časovna odvisnost odpade:

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} v^2 + h = \text{konst.}$$

Za **stacionaren, a v splošnem vrtinčen tok** pa veljata enačbi, ki ju dobimo z množenjem z $\vec{v} \cdot$ in $(\nabla \times \vec{v})$. Tako velja **vzdolž tokovnice** (krivulja v smeri $\vec{v}$):

$$\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} v^2 + h = \text{konst.}$$

in **vzdolž vrtinčnice** (krivulje v smeri $\nabla \times \vec{v}$):

$$(\nabla \times \vec{v}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + h\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} v^2 + h = \text{konst.}$$

Ohrantev cirkulacije (Kelvinov teorem)

Pazi tu, obravnavamo cirkulacijo **ne** vrtinčnost. **Cirkulacija** (obtekanje) vektorskega polja, pri nas hitrostnega, je definirana kot:

$$\Gamma = \oint d\vec{l} \cdot \vec{v} = \int d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{v})$$

Enakost sledi iz Stokesovega izreka za enostavna povezana območja. Kelvinov teorem velja za **izentropni tok idealne**

tekočine. Pravi pa slednje:

Totalni (substancialni) odvod cirkulacije je 0. Torej cirkulacija se zgolj seli s tokom.

Pa si poglejmo:

$$\frac{d}{dt}\oint d\vec{l}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\oint \delta\vec{r}\cdot\vec{v} = \oint \delta\vec{r}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \oint \frac{d\delta\vec{r}}{dt}\cdot\vec{v} =$$

$$= \oint d\vec{r}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \oint \delta\vec{r}\cdot\vec{v} = \oint \delta\vec{r}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \oint \delta\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

Tu zadnji člen odpade, ker je enak 0 po zaključeni zanki. Za $\frac{d\vec{r}}{dt}$ pa bomo vstavili Eulerjevo enačbo za izentropni tok. Torej kar imamo je:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v} = -\nabla h = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\oint \delta\vec{r}\cdot\vec{v} = \oint \delta\vec{r}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = -\oint \delta\vec{r}\cdot\nabla h = -\int d\vec{S}\,\nabla\times(\nabla h) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\oint \delta\vec{r}\cdot\vec{v} = 0 \quad\Rightarrow\quad \oint d\vec{r}\cdot\vec{v} = \mathrm{konst.}$$

Pozor: Ohranja se cirkulacija NE vrtinčnost. Na primer za majhno zanko:

$$\oint d\vec{l}\;\cdot\vec{v} = \int d\vec{S}\;\cdot(\nabla\times\vec{v}) \quad\Rightarrow\quad d\vec{S}\;\cdot(\nabla\times\vec{v}) = \mathrm{konst.}$$

To tukaj ne pomeni, da je kar $\nabla\times\vec{v} = \mathrm{konst.}$ ker se lahko spremeni tudi $d\vec{S}$.

Obtekanje s potencialnim tokom

Imejmo potencialni tok:

$$\nabla^2\phi = \qquad \vec{v} = \nabla\phi \qquad \nabla\cdot\vec{v} = 0$$

Ampak **pozor:** To da zahtevamo $\nabla\times\vec{v} = 0$ je le potrebni pogoj za obstoj potenciala ϕ in mu omogoča lokalno izražavo $\vec{v} = \nabla\phi$. V enostavno povezanem območju je to tudi zadostni pogoj, **vendar ovira v toku** naredi območje po definiciji ne-enostavno povezano.

Splošni zadostni pogoj za obstoj potenciala ϕ je, da je cirkulacija po vsaki sklenjeni krivulji nič, to pa že vemo:

$$\oint d\vec{r}\;\cdot\vec{v} = 0 \oint d\vec{r}\;\cdot\nabla\phi = 0 = \phi_{\mathrm{konec}} - \phi_{\mathrm{začetek}}$$

Pogoju, da ni cirkulacije pa v realnosti ne moremo kar tako zadostiti oz. tega niti ne želimo, ker potem letala ne bi letela.

Stvar je precej podobna magnetnemu polju okrog vodnikov s tokom, samo da imamo tam $\vec{H}$ in $\nabla\times\vec{H} = \vec{j}$. Tam zlahka zagotovimo, da ni cirkulacije. Preprosto ugasnemo tok. Takrat obstaja pravi skalarni magnetni potencial oz. “magnetna napetost”.

Akademska razprava za vpeljavo efektivne hidrodinamske mase

Sledi torej “akademska” razprava za primer, ko ni cirkulacije. Je pa koristna predvsem za vpeljavo efektivne hidrodinamske mase objekta pri pospeševanju v tekočini.

Premikamo objet. Koordinatni sistem je pripet na ta objekt, kjer je izhodišče v njem. Gledamo rešitev v danem trenutku. “Hitra” rešitev Laplacove enačbe bi bila:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi r} + \vec{A}\cdot\left(\nabla\left[\frac{1}{4\pi r}\right]\right) + \dots$$

kjer bi bil $-a\vec{A} \equiv \vec{p}$ standardno definirani dipolni moment. Saj če je $\nabla^2\phi_0 = 0$, potem je $\nabla^2\nabla\phi_0 = \nabla\nabla^2\phi_0 = 0$ torej:

$$\vec{A} \cdot \nabla \nabla^2 \phi = 0$$

za poljuben $\vec{A}$. Torej je "dipolni moment" prosti parameter. Ali pa:

$$\nabla^2 \partial_i \partial_j \phi_0 = \partial_i \partial_j \nabla^2 \phi_0 = 0$$

$$A_{ij} \partial_i \partial_j \nabla^2 \phi_0 = 0$$

in tako naprej. Monopol ne pride v poštev ker predstavlja izvir:

$$\oint d\vec{S} \cdot \nabla \phi = 4\pi r^2 \frac{a}{4\pi r^2} = a$$

Dipol in višji multipoli so pa intuitivni. Spoiler: za obtekanje krogle dobimo natanko **samo** dipol.

Vzemimo le dipol brez ostalih višjih in tako bomo dobili dobro rešitev pri veliki oddaljenostih od objekta:

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \vec{A} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\vec{A} \cdot \hat{e}_r}{r^2} = -\frac{1}{4\pi} \vec{A} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Spomnimo se, da je hitrostno polje potem definirano kot $\vec{v} = \nabla \phi$. Prav pa bo prišla identiteta

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla)\, \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\, \vec{a} + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a})$$

Dobimo:

$$\vec{v} = \nabla \phi = \frac{1}{4\pi} (\vec{A} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{4\pi} (\vec{A} \cdot \nabla) \frac{\vec{r}}{r^3} =$$

$$= -\frac{\vec{A}}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \vec{r} \left(\vec{A} \cdot \frac{\hat{e}_r}{r^4} \right) =$$

$$= \frac{3(\vec{A} \cdot \hat{e}_r)\, \hat{e}_r - \vec{A}}{4\pi r^3}$$

Hitrostno polje pada kot $\frac{1}{r^3}$, kar pomeni, da je vsaj kinetična energija gotovo integrabilna za $r \to \infty$.

Dipolni moment $\vec{A}$ je odvisen od oblike telesa (robni pogoj za $\vec{v}$ na površini telesa) in hitrosti telesa. Za sfero, kjer je $r = \text{konst.}$ ga dobimo direktno s projekcijo dipolne kotne odvisnosti na kotno odvisnost robnih pogojev. Za splošno obliko $r(\theta, \varphi)$ pa je treba upoštevati vse člene.

Izračunajmo celotno kinetično energijo W_k tekočine:

$$W_k = \frac{1}{2} \int \rho v^2 \, dV$$

po tekočini izven telesa, najprej do sfere R in nato pošljemo $R \to \infty$. Splošno obliko telesa uženemo s tole finto:

$$\int dV\, v^2 = \int dV\, u^2 + \int dV\, (\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$$

kjer je $\vec{u}$ hitrost telesa. Prvi integral je trivialen, v drugem pa pišimo:

$$\vec{v} + \vec{u} = \nabla(\phi + \vec{u} \cdot \vec{r})$$

in nato:

$$\nabla \cdot [(\phi + \vec{u} \cdot \vec{r})(\vec{v} - \vec{u})] = \nabla(\phi + \vec{u} \cdot \vec{r})(\vec{v} - \vec{u}) + (\phi + \vec{u} \cdot \vec{r})\, \nabla \cdot (\vec{v} - \vec{u}) =$$

$$= \nabla(\phi + \vec{u} \cdot \vec{r})(\vec{v} - \vec{u})$$

Tu zadnji člen odpade ker obravnavamo nestisljivo tekočino. Torej:

$$\int dV\, u^2 = u^2(V-V_0) + \int dV\, \nabla\cdot[(\phi+\vec{u}\cdot\vec{r})(\vec{v}-\vec{u})] =$$

$$= u^2(V-V_0) + \oint_{S_1S_0} d\vec{S}\,\cdot(\vec{v}-\vec{u})(\phi+\vec{u}\cdot\vec{r})$$

Na ploskvi S_0: $d\vec{S}\cdot(\vec{v}-\vec{u}) = 0$. Ostane le še integral po S:

$$\int_S d\vec{S}\,\cdot\left[\frac{3(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)\,\hat{e}_r - \vec{A}}{4\pi r^3} - \vec{u}\right]\left[-\frac{1}{4\pi}\vec{A}\frac{\hat{e}_r}{r^2} + r\vec{u}\cdot\hat{e}_r\right] =$$

$$= \int_S d\vec{S}\,\left[\frac{2\vec{A}\cdot\hat{e}_r}{4\pi r^3} - \vec{u}\cdot\hat{e}_r\right]\left[-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{A}\cdot\hat{e}_r + r\vec{u} + \hat{e}_r\right] =$$

$$= \int_S d\vec{S}\,\left[\frac{2(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)^2}{(4\pi)^2r^5} + \frac{(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)(\vec{u}\cdot\hat{e}_r)}{4\pi r^2} + \frac{2r^2}{4\pi}(\vec{A}\cdot\hat{e})(\vec{u}\cdot\hat{e}_r) - r(\vec{u}\cdot\hat{e}_r)^2\right] =$$

$$= \int d\Omega\left[-\frac{2(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)^2}{(4\pi)^2r^3} + \frac{3}{4\pi}(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)(\vec{u}\cdot\hat{e}_r) - r^3(\vec{u}\cdot\hat{e}_r)^2\right] =$$

Tu sedaj pošljemo $r = R \to \infty$ in nam ostane le še:

$$= \int d\Omega\,\left[\frac{3}{4\pi}(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)(\vec{u}\cdot\hat{e}_r) - R^3(\vec{u}\cdot\hat{e}_r)^2\right]$$

Integral imamo po prostorskem kotu, $\vec{A}$ in $\vec{u}$ sta konstantna vektorja.

Kako rešimo ta siten integral?

V splošnem velja takole:

$$\int d\Omega\,[(\vec{a}\cdot\hat{e}_r)(\vec{b}\cdot\hat{e}_r)] = \overline{(\vec{a}\cdot\hat{e}_r)(\vec{b}\cdot\hat{e}_r)} = 4\pi a_i b_j e_r^i e_r^{=}$$

$$= \frac{4\pi}{3}a_i b_j \delta_{ij} = \frac{4\pi}{3}\,\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Namreč velja:

- $\overline{e_r^i e_r^j} = 0$ za $i \neq j$
- Vse smeri so enake:

$$\hat{e}_r^2 = 1 = e_{r_x}^2 + e_{r_y}^2 + e_{r_z}^2 = \overline{e_{r_x}^2} + \overline{e_{r_y}^2} + \overline{e_{r_z}^2}$$

$$\Rightarrow \overline{e_{r_x}^2} = \overline{e_{r_y}^2} = \overline{e_{r_z}^2} = \frac{1}{3}$$

Okay torej zdaj lahko rešimo ta integral:

$$\int d\Omega\,\left[\frac{3}{4\pi}(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)(\vec{u}\cdot\hat{e}_r) - R^3(\vec{u}\cdot\hat{e}_r)^2\right] =$$

$$= \frac{3}{4\pi}\frac{4\pi}{3}\vec{A}\cdot\vec{u} - \frac{4\pi}{3}R^3u^2 =$$

$$= \vec{A}\cdot\vec{u} - \frac{4\pi}{3}R^3u^2$$

Torej končno dobimo:

$$\int dV\, v^2 = u^2(V - V_0) + \vec{A}\cdot\vec{u} - Vu^2 = \vec{A}\cdot\vec{u} - V_0u^2$$

$$\Rightarrow \qquad W_k = \frac{1}{2}\rho(\vec{A}\cdot\vec{u} - V_0u^2)$$

Kot rečeno $\vec{A}$ je sicer odvisen od oblike telesa in hitrosti, je pa linearno odvisen od obojega. Robni pogoj, ki ga določa je linearen v $\vec{v}$ in $\vec{u}$, torej ϕ in $\vec{u}$. Torej **med $\vec{A}$ in $\vec{u}$ je linearna zveza**. V splošnem torej:

$$W_k = \frac{1}{2}m_{ij}u_iu_j$$

kjer je m_{ij} konstanten simetričen **tenzor inducirane mase**. Tako dodatno maso telesa občutimo pri pospeševanju v tekočini. V splošnem ta dodatna sila ni v smeri pospeška. Za simetrične oblike v smeri pospeška pa je v isti smeri. Za kroglo je vedno v isti smeri. Izkaže se, da za kroglo velja:

$$m_{ij} = \frac{1}{2}\rho V_0\delta_{ij}$$

Zdaj ko imamo vse pripravljeno se takoj izkaže:

$$\mathrm{RP}: \quad v_r|_{r=R_0} = u_r$$

$$\Rightarrow \frac{3(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)\,\hat{e}_r - \vec{A}}{4\pi R_0^3}\cdot\hat{e}_r = \vec{u}\cdot\hat{e}_r$$

$$\frac{2(\vec{A}\cdot\hat{e}_r)}{4\pi R_0^3} = \vec{u}\hat{e}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \frac{1}{2}4\pi R_0^3\vec{u}$$

To sedaj lahko vstavimo v izraz za kinetično energijo:

$$W_k = \frac{1}{2}\rho(\vec{A}\cdot\vec{u} - V_0u^2) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{2}3V_0u^2 - V_0u^2\right) = \frac{1}{2}\rho\frac{1}{2}V_0\vec{u}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_0}{2}\,u^2$$

kjer je m_0 masa izpodrinjene tekočine.

Gibalna količina tekočine

Landau pravi, da je ne moremo izračunati direktno preko integrala:

$$\int dV\,\rho\vec{v}$$

ker ta **integral "divergira"**. Lahko pa jo izračunamo preko energije, ki smo jo že integrirali. Predstavljajmo si tako: Telo pospešujemo. Pri tem na tekočino to telo deluje z neko silo $\vec{F}$. Ta spreminja gibalno količino tekočine:

$$d\vec{P} = \vec{F}\,dt$$

Skalarno to množimo z $\vec{u}$ (torej trenutno hitrostjo telesa):

$$\vec{u}\cdot d\vec{P} = \vec{F}\cdot\vec{u}\,dt = dA = dW_k$$

Od tod sledi zveza:

$$\vec{u}\cdot d\vec{P} = m_{ij}u_i\,du_j$$

Ta enačba sicer določa $d\vec{P}$ samo v smeri $\vec{u}$ **ampak** bo to "good enough". To je ker velja za vsak $\vec{u}$, ki je poljuben, m_{ij} je konstanta, kar se tiče odvisnosti od $\vec{u}$ in postavimo lahko izhodišče da velja:

$$\vec{P}(\vec{u} = 0) = 0$$

Od tod res potem sledi, da velja:

$$dP_i = m_{ij}\,du_j$$

in nato z integracijo iz izhodišča, ki smo ga postavili naredimo:

$$P_i = m_{ij}u_j$$

D'Alembertov paradoks

Sila na tekočino bo seveda $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$. Sila na telo pa $-\vec{F}$. Vidimo, da je za $\vec{u} = \text{konst.}$ sila enaka 0. **Ni ne upora ($\vec{F} \parallel \vec{u}$) ne vzgona ($\vec{F} \perp \vec{u}$).** To velja tudi za splošne oblike. Upora nikakor ne more biti, saj ni energijski izgub, celotna W_k pa je končna. To je tako imenovani **d'Alembertov paradoks** ker niso poznali viskoznosti. Vzgona pa ni zaradi samovoljne predpostavke oz. omejitve na ničelno cirkulacijo.

Viskozne tekočine

Spomnimo, kako smo začeli pri idealni tekočini. Napisali smo Newtonov zakon na enoto prostornine takole:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla\cdot\sigma + \vec{f}^z$$

V idealni tekočini smo pisali, da je $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ in od tod je sledila Eulerjeva enačba. Tu pa bomo dodali k napetostnem tenzorju še **viskozni napetostni tenzor** σ^v. Pojavi se vprašanje kako bi ga dobili. Naredimo premislek..

Viskozne sile nastopijo, kadar imamo **gradient hitrosti**. V homogenem toku jih ni (spomni se na "Galilejevo invariantnost"). To pomeni, da se σ^v_{ij} izraža s tenzorjem $\partial_j v_i = \partial\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\partial_j u_i$, ki ga že poznamo, saj je to časovni odvod gradienta premika. V linearnem približku, se bo izražal kar linearno.

V primeru toge rotacije tudi ni viskoznih sil. To je tudi še ena simetrija narave, invariantnost na rotacijo. To pomeni, da se σ^v_{ij} izraža s **simetričnim tenzorjem**.

S tem zaključimo premislek saj v izotropnem sredstvu ni nobene druge količine, ki bi lahko nastopala v zvezi med σ^v_{ij} in v_{ij}. Torej sledi:

$$\sigma^v_{ij} = 2\eta\left(v_{ij} - \frac{1}{3}v_{kk}\delta_{ij}\right) + \xi v_{kk}\delta_{ij}$$

kjer je η **dinamična viskoznost** oz. ponavadi kar samo viskoznost, ξ pa je **dilatacijska, volumska, druga viskoznost**, ki za nestisljive tekočine odpade saj je $v_{kk} = \nabla\cdot\vec{v} = 0$. Verjetno se pojavi tudi vprašanje od kod 2 pred η. To je zato, da je η kot zgodovinsko definirana. Poglejmo si na primeru strižnega toka.

$$\frac{F}{S} = \sigma^v_{xy} = 2y\frac{1}{2}\frac{\partial v_x}{\partial y} = y\frac{\partial v_x}{\partial v_y}$$

Ta napetostni tenzor bomo vstavili v napisan Newtonov zakon. Prej si pa naredimo še pomožni račun za $\nabla\cdot\sigma^v$, kjer naj bosta η, ξ konstantni:

$$\partial_j\sigma^v_{ij} = \eta\partial_j(\partial_j v_i + \partial_i v_j) - \frac{2}{3}\eta\partial_j\partial_k v_k\delta_{ij} + \xi\partial_j\partial_k v_k\delta_{ij} =$$

$$= \eta\partial_j^2 v_i + \left(\xi + \frac{1}{3}\eta\right)\partial_i\partial_k v_k$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\cdot\sigma^v = \eta\nabla^2\vec{v} + \left(\xi + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla\nabla\cdot\vec{v}$$

Super. Dajmo zdaj novo definirani napetostni tenzor vstaviti v Newtonov zakon. Tako dobimo **Navier-Stokesovo enačbo** za izentropno viskozno tekočino:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v}\right] = -\nabla p + \eta\nabla^2\vec{v} + \left(\xi + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla\nabla\cdot\vec{v} + \vec{f}^z$$

Nestisljiva limita (Helmholtzova enačba za vrtinčnost)

Nestisljiva limita je aktualna skoraj vedno, a tu skoraj še bolj kot pri Eulerjevi enačbi. Če postavimo $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ostane samo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \vec{v}$$

kjer je $\frac{\eta}{\rho}$ t.i. **kinematična viskoznost.** Napetostni tenzor se v tej limiti glasi:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta v_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\partial_j v_i + \partial_i v_j)$$

Dodatno če je $\rho = \mathrm{konst.}$ se lahko znebimo tlaka kot v Eulerjevi enačbi. Naredili bomo analogno. Upoštevamo vektorsko identiteto $\frac{1}{2}\nabla \vec{v}^2 = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ in potem delujemo na enačbo z rotorjem $\nabla \times$ ..

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})] + \nu \nabla^2 \nabla \times \vec{v}$$

Če razpišemo še rotor kvadratnega oklepaja, analogno kot pri Eulerju z identiteto:

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\, \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\, \vec{b} + \vec{a}\, (\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}\, (\nabla \cdot \vec{a})$$

in če še pišemo $\nabla \times \vec{v} = \vec{\omega}$ dobimo **Helmholtzovo enačbo za vrtinčnost** v viskozni tekočini:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\, \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

Zadnji člen nam je nov! Podaja difuzijo vrtinčnosti zaradi viskoznosti.

Poissonova enačba za tlak

Še vedno obravnavamo nestisljivo limito. Predpostavimo, da poznamo hitrostno polje, potem lahko tlačno polje dobimo preko divergence:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 = -\rho \partial_i (v_j \partial_j v_i) = -\rho[(\partial_i v_j)(\partial_j v_i) + v_j \partial_i \partial_j v_i] =$$

$$= -\rho(\partial_i v_j)(\partial_j v_i)$$

oz. čisto veljavno je tudi:

$$\nabla^2 = -\rho \partial_i \partial_j (v_i v_j) + \rho \partial_i (v_i \partial_j v_j) =$$

$$= -\rho \partial_i \partial_j (v_i v_j)$$

Tako smo prišli do **Poissonove enačbe za tlak**:

$$\nabla^2 p = -\rho(\partial_i v_j)(\partial_j v_i) = -\rho \partial_i \partial_j (v_i v_j)$$

Mogoče koristen komentar: ∇p se vzpostavi takšen, da v vsakem trenutku velja $\nabla \cdot \vec{v} = 0$! To pomeni, da je $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ skalarna enačba za tlačno polje. Smešno je, da ne vsebuje tlaka. Če bi pa morali upoštevati stiskanje bi pa tudi šlo, nekako takole:

$$\nabla \cdot \vec{v} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\chi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Viskozna disipacija

S tem mislimo pretvarjanje “mehanske” energije v notranjo oz. splošneje “mehanska “ energija v resnici pomeni celotno prosto energijo. Ta se manjša s časom zaradi naraščujoče entropije in sicer s transportnim pojavom: **difuzija gibalne količine zaradi viskoznosti**.

Dirty example

Opazujemo dva majhna volumna tekočine, kjer se eden giblje počasneje od drugega. Znamo izračunati delo viskoznih sil, ki je v principu neravnovesno delo, ampak gre za zelo šibko neravnovesje. Kakorkoli hitrejši volumen je opravil pozitivno delo s močjo $\vec{F}_1 \cdot \vec{v}_1$, počasnejši pa je opravil manjše negativno delo s močjo $\vec{F}_2 \cdot \vec{v}_2$. Skupaj je delo neto pozitivno in skupna kinetična energija je manjša. Od tod sledi, da se sistem segreje.

Okay dovolj miselnega eksperimenta. Naredimo zdaj kot se spodobi. Uvedimo nadomestno reverzibilno spremembo za izračun spremembe entropije prej opisanega sistema. Nadomestna sprememba pa je zastavljena takole:

Sistema spravimo na končno hitrost z zunanjima silama, ki delujeta homogeno, tako da ostaja stvar v ravnovesju. Nato pa z dobljeno energijo reverzibilno sistem pogrejemo. Skupna entropija se bo povečala.

Končno izračunajmo opravljeno delo delov sistema zaradi viskoznih sil:

$$\delta A = T\,\delta S$$

$$\delta A = \int dV\ f_i \delta u_i = -\int dV\ f_i^v \delta u_i = -\int dV\ \left(\partial_j \sigma_{ij}^v\right) \delta u_i$$

To smo že izračunal. Potrebujemo **negativno delo elastične sile**:

$$-\int dV\ \left(\partial_j \sigma_{ij}\right) \delta u_i$$

Torej imamo:

$$\delta A = -\oint dS_j\ \sigma_{ij}^v \delta u_i + \int dV\ \sigma_{ij}^v \delta_{ij}$$

Če si pogledamo moč je to potem:

$$P = \frac{\delta A}{\delta t} = -\oint dS_j \sigma_{ij}^v v_i + \int dV\ \sigma_{ij}^v v_{ij}$$

In tako nam v volumnu ostane le še:

$$P = \int dV\ \sigma_{ij}^v v_{ij}$$

Značilne skale in brezdimenzijska oblika Navier-Stokesove enačbe

Obravnavajmo tole verzijo Navier-Stokesove enačbe:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\, \vec{v}\right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Značilni čas v katerem se zaradi viskoznosti vzpostavi stacionarno hitrostno polje se imenuje **viskozni relaksacijski čas** τ_v . Ocenimo iz enakosti:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \sim \eta \nabla^2 v$$

$$\rho \frac{v}{\tau_v} \sim \eta \frac{1}{l^2} v$$

$$\Rightarrow \quad \tau_v = \frac{\rho l^2}{\eta}$$

kjer je l značilna strižna dolžina hitrostnega polja.

Brezdimenzijska oblika

Naj bo enota za čas na primer $\tau_0 = \frac{l}{v_0}$, kjer je v_0 značilna hitrost. Potem je pretvorba med dimenzijskimi in brezdimenzijskimi:

$$\Rightarrow t = \tilde{t}\tau_0$$

in enota za dolžino l:

$$\Rightarrow r = \tilde{r} l$$

S tem smo pa tudi definirali, da je:

$$v = \tilde{v} v_0$$

Vstavimo sedaj to:

$$\rho \left[\frac{v_0}{\tau_0} \frac{\partial \tilde{\vec{v}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{v_0^2}{l} (\tilde{\vec{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\vec{v}} \right] = -\frac{1}{l} \tilde{\nabla} p + \eta \frac{v_0}{l^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\vec{v}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\vec{v}}}{\partial \tilde{t}} + (\tilde{\vec{v}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\vec{v}} = -\frac{1}{l} \frac{\tau_0}{\rho v_0} \tilde{p} + \eta \frac{v_0}{l^2} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\vec{v}}$$

$$= -\frac{1}{l} \frac{l}{v_0^2 \rho} \tilde{\nabla} p + \frac{\eta}{l^2} \frac{l}{\rho v_0} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\vec{v}}$$

Tu se sama ponudi še pretvorba za tlak:

$$p = \tilde{p} \rho v_0^2$$

in uvedemo lahko **Reynoldsovo število**, ki meri pomembnost viskoznega člena glede na ostale:

$$\mathrm{Re} \equiv \frac{\rho v_0 l}{\eta}$$

Tako je končna brezdimenzijska oblika (in brez nadležne $\sim$):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \vec{v}$$

Razprava o Re

Če s sistemom nič posebnega ne delamo od zunaj, ampak ga pustimo da se nemoteno razvija je Re edini netrivialni parameter Navier-Stokesove enačbe. Ostali so zginili v definicijo enot časa in dolžine.

Od tod sledi en zelo pomemben zaključek in sicer, da je v takem primeru rešitev odvisna samo od Re. Pri danem Re lahko vse ostalo poljubno skaliramo in rešitev še vedno poznamo. To je tisto, kar nam omogoča simulacije v veternih tunelih in da to potem deluje na dejanskih letalih ipd.

Re je razmerje med velikostjo advekcijskega člena, ki predstavlja gostoto sil potrebnih za pospeševanje dela tekočine pri preletu gradienta hitrostnega polja in velikostjo viskoznega člena, ki predstavlja gostoto viskoznih sil.

Časovni odvod pa je takšen, kot ga določa Navier-Stokesova enačba v nekem trenutku. Na primer če je $\mathrm{Re} \ll 1$ je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ v splošnem reda $\frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \vec{v}$, torej značilni dinamični čas je $t \sim \mathrm{Re}$ oz. v fizičnih enotah je to:

$$t \sim \mathrm{Re}\, \tau_0 = \frac{\rho v_0 l}{\eta} \frac{l}{v_0} = \frac{\rho l^2}{\eta} = \tau_v$$

Razprava o St

Če sistemu vsiljujemo dinamiko od zunaj recimo z značilno frekvenco:

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

Pa je velikost:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim \frac{1}{\tau / \tau_0} = \frac{\tau_0}{\tau}$$

Tako lahko uvedemo razmerje med časom preleta gradienta hitrostnega polja in vsiljevanja od zunaj τ:

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \frac{l}{\tau v_0} \equiv \mathrm{St}$$

kjer je St **Strouhalovo število**. To je torej razmerje velikosti med $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ in $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$.

Stokesov približek

Za $\mathrm{Re} \ll 1$ in stacionarno nestisljivo tekočino ostane od Navier-Stokesove enačbe le še:

$$0 = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Na to enačbo delujemo z $\nabla \cdot$ in ∇^2 in dobimo, prvo v primeru divergence:

$$\nabla^2 p = 0$$

potem v primeru Laplaceovega operatorja:

$$0 = -\nabla \nabla^2 p + \eta \nabla^2 \nabla^2 \vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 \nabla^2 \vec{v} = 0$$

Če pa bi delovali z rotorjem, bi pa prišli do:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{v}) = \eta \nabla^2 \nabla \times \vec{v}$$

oz. v stacionarnem primeru:

$$\nabla^2 \nabla \times \vec{v} = 0$$