Tanke palice

Najprej bomo obravnavali lokalne razmere pri torziji (zvoj) in upogibu. Celotno deformacijsko polje v palici želimo opisati v odvisnosti od **torzijskega kota** $\tau = \frac{d\phi}{dl}$ in **krivinskega radija upogiba** R.

Odtod dobimo dolžinsko gostoto deformacijske energije, palica pa postane le enodimenzionalna krivulja, ki ima odvisnost le od dolžinskega parametra l. Nato lahko zapišemo enačbo za obliko obremenjene palice v odvisnosti od l. Premiki so lahko poljubno veliki, saj je palica dolga. Obravnavamo t.i. "elastični filament". Nazadnje naredimo še limito za majhen upogib ravne palice. S tem mislim, da je premik majhen glede na dolžino; smer palice imamo za konstantno.

Torzija

Obravnavamo tanko ravno palico s poljubnim presekom. Torzija naj bo šibka:

$$\tau = \frac{d\phi}{dl} \quad \text{majhen} \quad \Rightarrow \quad \tau d \ll 1$$

kjer je d debelina palice. Presek pri $z = 0$ naj ne bo zasukan. Torej $\phi(z = 0) = 0$. Poiščimo $\vec{u}$ v okolici $z = 0$ in odtod u_{ij}. V 1. približku se presek suče okrog z osi:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\phi} \times \vec{r} \qquad \delta\vec{\phi} = \delta\phi\hat{e}_z$$

Za $z = 0$ je potem:

$$\delta\phi = \tau z \quad \Rightarrow \quad u_x = -\tau z y \qquad u_y = \tau z x$$

Premiki so tudi v z smeri!. Uvedimo sedaj $\psi(x, y)$ **torzijsko funkcijo**, katere odvisnost od τ mora biti vsaj linearna. Kar je malce nenavadno je, da to odvisnost izpostavimo:

$$u_z = \tau\psi(x, y)$$

Zapišimo zdaj u_{ij}:

$$u_{xx} = u_{yy} = u_{xy} = u_{zz} = 0$$

$$u_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)$$

$$u_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)$$

In po Hookovem zakonu izračunamo σ_{ij}:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu\tau\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)$$

Potrebujemo še ravnovesni pogoj:

$$\partial_j\sigma_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

Vidimo, da avtomatsko ni z odvisnosti. Tako dobimo:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

Ugodno je vpeljati zdaj drugo funkcijo $\chi(x,y)$, ki bo zadoščala enostavnejšemu robnemu pogoju:

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau\frac{\partial\chi}{\partial y}$$

$$\sigma_{yz} = -2\mu\tau\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = y + 2\frac{\partial\chi}{\partial y} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -x - 2\frac{\partial\chi}{\partial x}$$

ψ se moramo še znebiti, kar naredimo preko mešanega odvoda in odštevanja:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = 1 + 2\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = 1 - 2\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} = -1$$

Robni pogoj: Napetosti na plašč tanke palice so zanemarljive proti ostalim (notranjim) napetostim. To je kot smo naredili pri tanki plošči.

$$\sigma_{zx}u_x + \sigma_{zy}u_y = 0 \qquad u_z = 0$$

Oz. ta isti pogoj izražen s χ:

$$\frac{\partial\chi}{\partial y}u_x - \frac{\partial\chi}{\partial x}u_y = 0$$

Normalo na rob izrazimo z vektorjem $d\vec{l} = (dx, dy)$. Tu je koristno, če vidiš postavitev vektorjev na str. 2. Vzdolž roba je potem:

$$\frac{\partial\chi}{\partial y}dy + \frac{\partial\chi}{\partial x}dx = d\chi = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi = \text{konst. na robu}$$

Če imamo le en rob (enostavno povezano območje) lahko postavimo $\chi = 0$ na robu. Če imamo robov več so konstante v splošnem različne.

Energija pri torziji

Izhajamo iz:

$$f = \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{ij}$$

Velja namreč $df = \sigma_{ij}(u_{ij})du_{ij}$. σ_{ij} je linearna funkcija.

$$f = \int_0^{u_{ij}} (\sigma_{ij}(u_{ij}))\,du_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{ij})u_{ij}$$

So če vstavimo naše neničelne člene:

$$f = \frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{xz}u_{xz} + \sigma_{zx}u_{zx} + \sigma_{yz}u_{yz} + \sigma_{zy}u_{zy}) =$$

$$= \sigma_{xz}u_{xz} + \sigma_{yz}u_{yz} = \frac{1}{2\mu}(\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2) = 2\mu\tau^2\left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2\right] =$$

$$= 2\mu\tau^2(\nabla\chi)^2$$

To sedaj pointegriramo, da ostane le še dolžina:

$F = \int dz\, dS\, f = \int dz\, dS\, 2\mu\tau^2(\nabla\chi)^2 \equiv \frac{1}{2}C\int \tau^2\, dz$ kjer je C **torzijski modul palice**:

$$C = 4\mu \int dS\, (\nabla\chi)^2$$

Lahko ga predelamo z upoštevanjem identitete:

$$(\nabla\chi)^2 = \nabla\cdot(\chi\nabla\chi) - \chi\nabla^2\chi$$

kjer velja tudi $\nabla^2\chi = -1$. Torej dobimo:

$$C = 4\mu\int dS\,(\nabla\chi)^2 = 4\mu\left[\int dS\,\nabla\cdot(\chi\nabla\chi) + \int dS\,\chi\right] =$$

$$= 4\mu\left[\int dl\,(\vec{n}\cdot\nabla\chi)\chi + \int dS\,\chi\right]$$

Za **le en rob**, kjer je $\chi = 0$ ostane:

$$C = 4\mu\int dS\,\chi(x,y)$$

Ilustracija za $\tau = \mathrm{konst.}$

Predpostavimo, da imamo:

$$\tau = \mathrm{konst.} = \frac{\phi}{l}$$

$$F = \frac{1}{2}C\int\tau^2\,dz = \frac{1}{2}C\int\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 dz$$

$$\delta F = C\int dz\,\frac{d\phi}{dl}\delta\frac{d\phi}{dl} = C\int dz\,\frac{d}{dz}\left[\frac{d\phi}{dz}\delta\phi\right] - C\int dz\,\frac{d^2\phi}{dz^2}\delta\phi =$$

$$= C\frac{d\phi}{dz}\delta\phi\Big|_1^2 - C\int dz\,\frac{d^2\phi}{dz^2}\delta\phi$$

Če tu zahtevamo $\delta F = 0$ dobimo $\frac{d^2\phi}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{dz} = \tau$. Tako drugi člen izgine. Od prvega člena pa ostane:

$$C\tau\delta\phi|_{z_2} - C\tau\delta\phi|_{z_1} \qquad \Rightarrow \qquad M = c\tau$$

Kar pa je **navor na presek!**

Upogib

Spet obstaja nevtralna ploskev v kateri ni raztezka, na eni strani nje je raztezek na drugem pa skrček. Obravnavamo upogib majhnega dela palice, ki je šibko upognjen. S tem mislimo, da je premik majhen glede na debelino palice. Zanima nas seveda, kakšno je lokalno tridimenzionalno deformacijsko polje.

Postavimo izhodišče v nevtralno ravnino in os z v smeri palice. Upogib bo v xz ravnini. Za majhne upogibe je upogib v eni ravnini (pritisnjena ravnina krivulji palice). Vrtenje te ravnine “torzija” je višjega reda kot ukrivljenost. Pazi ker to tukaj ni pravzaprav torzijska deformacija. Najprej moramo obstajati ukrivljenost, ki definira pritisnjeno ravnino. Šele potem jo lahko vrtimo.

Zunanje napetosti na plašč palice so spet zanemarljive proti notranjim in ker je palica tanka, so te napetosti zanemarljive tudi znotraj. Torej ostane neničelen le:

$$\sigma_{zz} \neq 0$$

kar predstavlja enostavno raztezanje/krčenje, kot smo že debatirali. Določimo ta raztezek:

$$dz' = \frac{R+x}{R}\,dz \Rightarrow \frac{dz'-dz}{dz} = \frac{x}{R} = u_{zz}$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = Eu_{zz} = E\frac{x}{R}$$

Tu je koristno, da vidiš postavitev in skico na str. 4. Določimo lego nevtralne ploskve tako, da je celotni raztezek po preseku nič, torej da je celotna sila v z smeri nič:

$$\int \sigma_{zz}\,dS = 0$$

$$\Rightarrow \int dS\,x = 0$$

vidimo, da gre nevtralna ploskev skozi središča presekov. Določimo sedaj celotno deformacijsko polje. Za eno-osne raztezke vemo, kako se spremenijo ostale dimenzije, ker je to podano s σ **Poissonovim številom**. Torej:

$$u_{xx} = u_{yy} = -\sigma u_{zz}$$

$$u_{zz} = \frac{x}{R} \qquad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma\frac{x}{R}$$

$$2u_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$$

$$2u_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$$

$$2u_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

Tisti, ki želi malo vaje v integraciji, lahko to stori za zabavo. Tole so rezultati:

$$u_x = -\frac{1}{2R}[z^2 + \sigma(x^2 - y^2)]$$

$$u_y = -\frac{\sigma}{R}xy$$

$$u_z = \frac{1}{R}xz$$

kjer smo integracijske konstante stalno postavljali na 0, zato da se nam izhodišče ne premakne. Tu bo slika zelo pomembna, ker je dobra za vizualizacijo tega, kar smo pravkar dobili. Poglej si jo na str. 5!

Presek pri nekem $z = \text{konst.} = z_0$ je

$$z = z_0 + u_z = z_0\left(1 + \frac{x}{R}\right)$$

Oblika preseka (xy ravnine) pa je:

$$y = \pm\frac{b}{2} \to y = \pm\frac{b}{2} + u_y = \pm\frac{b}{2}\left(1 - \frac{\sigma}{R}x\right)$$

$$x = \pm\frac{a}{2} \to x = \pm\frac{a}{2} + u_x = \pm\frac{a}{2} - \frac{1}{2R}\left[z_0^2 + \sigma\left(\frac{a^2}{4} - y^2\right)\right]$$

če imamo pravokotni presek (a, b).

Energija upogiba

As always, bomo začeli iz znanega izraza. Tu imamo samo eno komponento σ_{ij} neničelno zato lahko preprosto zapišemo kar direktno:

$$f=\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{zz}u_{zz}$$

$$\Rightarrow f=\frac{1}{2}E\frac{x^2}{R^2}$$

in že imamo **volumsko gostoto energije**. Da pridemo do dolžinske moramo prvo vpeljati pojem **2. momenta**. To je kot vztrajnost/vztrajnostni moment, samo da je definiran brez mase:

$$I_{ij}=\int dS\,(r^2\delta_{ij}-x_ix_j)$$

Tako potem dolžinsko gostoto zapišemo kot:

$$\frac{F}{l}=\frac{1}{2}\frac{E}{R^2}\int dS\,x^2=\frac{1}{2}\frac{EI_y}{R^2}$$

Navor na presek

Če upogib ni okoli lastne osi 2. momenta I, potem navor potrebnega zanj ni v isti smeri kot kot upogiba oz. palica se ne upogne v smeri navora. Recimo, da imamo pravokotni presek zarotiran za kot ϕ, potem je:

$$I_y=I_1\cos^2\phi+I_2\sin^2\phi$$

kjer sta I_1, I_2 2. momenta v lastnih smereh preseka. Okrog y je navor potem:

$$M_y=\pm\int dS\,x\sigma_{zz}=\frac{E}{R}\int dS\,x^2=\frac{EI_y}{R}$$

Okrog x osi pa je navor:

$$M_x=\pm\int dS\,y\sigma_{zz}=\pm\frac{E}{R}\int dS\,xy\equiv\frac{EI_{xy}}{R}$$

ki je v splošnem neničelen.

Elastični filament

Sedaj poznamo energijo torzije na dolžinsko enoto in upogiba na dolžinsko enoto. Lahko preidemo na **elastični filament**, ki ga v celoti opišemo s **enotsko tangento** $\vec{t}(l)$ in **torzijo** $\tau(l)$.

V primeru, ko je $I_1\neq I_2$ je pri upogibu malce komplikacija.. pomembno je v kateri smeri glede na lastni sistem I kaže vektor ukrivljenosti $\frac{d\vec{t}}{dl}$.

Energija elastičnega filamenta

Deformacija filamenta je podana z $\frac{d\vec{t}}{dl}(l)$ in $\tau(l)$. Torej z upogibom in torzijo. Definirajmo **trirob (triado)** vektorjev:

$$(\hat{e}_1,\ \hat{e}_2,\ \hat{e}_3)$$

kjer $\hat{e}_3$ kaže v smeri filamenta $\hat{e}_3=\vec{t}$. $\hat{e}_1$ in $\hat{e}_2$ pa kažeta v lastnih smereh I. Dajmo energijo izraziti z:

$$\vec{\Omega}=\frac{d}{dl}\vec{\phi}$$

Tu je $d\vec{\phi}$ je kot infinitezimalne rotacije sosednjih trirobov, $\vec{\Omega}$ je “hitrost” sukanja triroba. Energija bo kvadratna v $\vec{\Omega}$. Precej jasno je, da je $\Omega_3=\tau$. Poglejmo še kako povežemo upogib. $\frac{d\vec{t}}{dl}$ je vektor ukrivljenosti, ki definira smer glavne normale. Njegova velikost je:

$$\left|\frac{d\vec{t}}{dl}\right|=\frac{1}{R}$$

To je “hitrost” obračanja tangente. Zapišimo jo z $\vec{\Omega}$. Od tod sledi **standardna rotacija vektorja**:

$$\frac{d\vec{t}}{dl} = \vec{\Omega} \times \vec{t}$$

Izraziti želimo $\vec{\Omega}$. Tu nam bo prav prišla identiteta za dvojni vektorski produkt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$. Vektorsko pomnožimo prejšnjo enačbo s $\vec{t}$:

$$\vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{dl} = \vec{t} \times (\vec{\Omega} \times \vec{t}) = (\vec{t} \cdot \vec{t})\,\vec{\Omega} - (\vec{t} \cdot \vec{\Omega})\,\vec{t}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{dl} + (\vec{t} \cdot \vec{\Omega})\,\vec{t} = \vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{dl} + \tau\vec{t}$$

Kjer ima prvi čelen tu smer binormale in predstavlja “kotno hitrost” upogibanja. Energija je kvadratna v $\vec{\Omega}$, torej se izraža s členi oblike $\Omega_i\Omega_j$. Členov $\Omega_1\Omega_3$ in $\Omega_2\Omega_3$ ne more biti. če je filament **homogen v vzdolžni smeri** oz. invarianten na $\hat{e}_3 \to -\hat{e}_3$, saj pri temu zrcaljenju spremenita predznak. Poglejmo prvo energijo samo za torzijo in potem samo za upogib. Na koncu bomo pa izpeljano združili.

Torzija

Za $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ imamo le torzijo, katere energijo poznamo:

$$\frac{F}{l} = \frac{1}{2}C\tau^2 = \frac{1}{2}C\tau_3^2$$

Upogib

Za upogib okrog y osi lahko zapišemo:

$$\frac{F}{l} = \frac{1}{2}\frac{EI_y}{R^2} = \frac{1}{2}EI_y\Omega_2^2$$

kjer smo upoštevali:

$$\left|\vec{t} \times \frac{d\vec{t}}{dl}\right| = \frac{1}{R}$$

Za upogib okrog splošne smeri v ravnini $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$:

$$\frac{F}{l} = \frac{1}{2}E(I_{11}\Omega_1^2 + 2I_{12}\Omega_1\Omega_2 + I_{22}\Omega_{22}^2)$$

ampak ker sta $\hat{e}*1in\hat{e}_2vlastnihsmerehIjeI*{12}=0$:

$$\frac{F}{l} = \frac{1}{2}E(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2)$$

In s tem dobimo celotno **energijo elastičnega filamenta** kot:

$$F = \int dl\,\left[\frac{1}{2}EI_1\Omega_1^2 + \frac{1}{2}EI_2\Omega_2^2 + \frac{1}{2}C\Omega_3^2\right]$$

Izračunajmo navor na presek filamenta, po bizarni variaciji:

$$F=\int dl\, f(\Omega_i)\Rightarrow \delta F=\int dl\, \frac{\partial f}{\partial\, \frac{d\phi_i}{dl}}\delta\frac{d\phi_i}{dl}=$$

$$=\int dl\left[\frac{d}{dl}\left(\frac{\partial f}{\partial\, \frac{d\phi_i}{dl}}\delta\phi_i\right)-\frac{d}{dl}\frac{\partial f}{\partial\, \frac{d\phi_i}{dl}}\delta\phi_i\right]=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial\, \frac{d\phi_i}{dl}}\delta\phi_i\Bigg|-\int dl\, \left(\frac{d}{dl}\frac{\partial f}{\partial\, \frac{d\phi_i}{dl}}\right)\delta\phi_i$$

Prvi (tisti "čudni") ulomek v predstavlja navor na poljuben presek:

$$M_i=\frac{\partial f}{\partial \Omega_i}$$

$$M_1=EI_1\Omega_1 \qquad M_2=EI_2\Omega_2 \qquad M_3=C\Omega_3=C\tau$$

To je ključno! Navor na presek in kinematika filamenta, torej geometrija, $\frac{d\vec{t}}{dl}$, τ sta direktno povezana. Elastomehanika nam je povedala, kako točno. Preko I in C in to je vse. Sedaj lahko zapišemo preprosto ravnovesje sil in navorov na košček filamenta dolžine dl, menda znano kot **Kirchoffova teorija**

Ravnovesje sil

Označimo z $\vec{F}$ silo na prednji presek glede na smer:

$$F_i=\int dS_j\, \sigma_{ij}$$

$\vec{K}dl$ naj bo morebitna zunanja sila na košček, torej to pomeni, da je $\vec{K}$ linearna gostota zunanje sile.

$$\vec{F}+d\vec{F}-\vec{F}+\vec{K}dl=0$$

$$\frac{d\vec{F}}{dl}+\vec{K}=0$$

Vidimo, da če je $\vec{K}=0$ se sila $\vec{F}$ ohranja vzdolž filamenta.

Ravnovesje navorov

Označimo z $\vec{M}$ upogibni in torzijski navor na presek. To je navor okrog središča preseka (točki O in O'). Je pa navor morebitne neto sile na presek $\vec{F}$ glede na središče tega preseka enak nič. (Navor homogene sile je nič, navor nehomogene sile pa drugega reda, saj je že ročica prvega reda.) Tudi navor sile $\vec{K}dl$ je drugega reda. Poglejmo navor glede na O':

$$\vec{M}+d\vec{M}-\vec{M}+d\vec{l}\times(\vec{F}+d\vec{F})=0$$

$$\frac{d\vec{M}}{dl}+\vec{t}\times\vec{F}=0$$

Enačbe so bolj pregledne če imamo izotropen presek $I_1=I_2=I$. Tedaj je:

$$(M_1,\, M_2) = EI(\Omega_1,\, \Omega_2)$$

$$\vec{M} = C\tau\vec{t} + EI\vec{t}\times\dot{\vec{t}}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dl} + \vec{t}\times\vec{F} = 0$$

$$\frac{d\vec{F}}{dl} + \vec{K} = 0$$

V tem primeru upogib ne povzroči torzije. Obratno pa ne velja, kar vedno obstaja t.i. torzijska nestabilnost. Poglejmo odvod torzijskega navora:

$$\frac{d}{dl}(\vec{M}\cdot\vec{t}) = \frac{d\vec{M}}{dl}\cdot\vec{t} + \vec{M}\cdot\frac{d\vec{t}}{dl} = -(\vec{t}\times\vec{F})\cdot\vec{t} + (C\tau\vec{t} + EI\vec{t}\times\dot{\vec{t}})\cdot\dot{\vec{t}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dl}\vec{M}\cdot\vec{t} = C\frac{d\tau}{dl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tau}{dl} = 0 \qquad \tau = \text{konst.}$$

To pomeni, da če na primer na začetku filamenta ni torzijskega navora je tam $\tau = 0$ in ker je konstanten je $\tau = 0$ povsod. S tem vidimo, da imamo za $I_1 = I_2 = I$ lahko torej tudi samo upogib. V tem primeru je poljuben upogib:

$$\vec{M} = EI\vec{t}\times\dot{\vec{t}} \qquad \frac{d\vec{M}}{dl} = \vec{t}\times\vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow EI\vec{t}\times\ddot{\vec{t}} + \vec{t}\times\vec{F} = 0$$

Majhen upogib

Obravnavajmo sedaj majhen upogib. S tem mislimo, da se smer (tangenta) palice le malo spremeni. Odtod sledi tudi, da so premiki majhni glede na dolžino vendar je to le potrebni pogoj. Stranski učinek tega so malo spremenjene tangente $\vec{t}$. Izhajamo iz prej izpeljanih:

$$\frac{d\vec{F}}{dl} + \vec{K} = 0 \qquad \frac{d\vec{M}}{dl} + \vec{t}\times\vec{F} = 0$$

$$\frac{d^2\vec{M}}{dl^2} + \vec{t}\times\frac{d\vec{F}}{dl} + \frac{d\vec{t}}{dl}\times\vec{F} = 0$$

Tu je cilj, da se znebimo sile $\vec{F}$, vendar **pozor** zadnjega člena ne moremo zavreči. Uspeli se bomo znebiti prečne sile $\vec{F}_\perp$, ki povzroča upogib. Enačbo je treba konsistentno zapisati v najnižjem redu odmikov. Izkaže se, da je to 1. red. Začnimo z $\vec{M}$, odvajali ga bomo kasneje:

$$\vec{t} \approx \hat{e}_z \qquad dl = \sqrt{dz^2 + dx^2 + dy^2} = dz\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dl} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}} \qquad \rightsquigarrow \qquad dz = dl$$

v 1. redu prečnih odmikov x, y. Zapišimo tangento:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{dl} = \frac{d\vec{r}}{dz}\frac{dz}{dl} \approx \left(\frac{dx}{dz},\, \frac{dy}{dz},\, 1\right)$$

Sedaj pa pogledamo kinematiko:

$$\vec{t} \times \dot{\vec{t}} \approx \left(\frac{dx}{dz},\ \frac{dy}{dz},\ 1\right) \times \left(\frac{d^2x}{dz^2},\ \frac{d^2y}{dz^2},\ 0\right) =$$

$$= \left(-\frac{d^2y}{dz^2},\ \frac{d^2x}{dz^2},\ \frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}\right) \approx$$

$$\approx (-\ddot{y},\ \ddot{x}, 0)$$

kjer smo v z komponenti zanemarili odvode, ker so višjega reda. Navor je potemtakem:

$$\vec{M} = E(-I_1\ddot{y},\ I_2\ddot{x},\ 0)$$

kjer morata biti x, y v lastnih smereh I. Skombinirali bi radi tole:

$$\frac{d\vec{M}}{dl} + \vec{t} \times \vec{F} = 0$$

Dajmo si pogledat prvo samo vektorski produkt:

$$\vec{t} \times \vec{F} = (\dot{x},\ \dot{y},\ 1) \times (F_x,\ F_y,\ F_z) =$$

$$= (\dot{y}F_z - F_y,\ F_x - \dot{x}F_z,\ \dot{x}F_y - \dot{y}F_x) = (\dot{y}F_z - F_y,\ F_x - \dot{x}F_z,\ 0)$$

kjer smo spet z komponento zanemarili, ker je višjega reda. Opazimo zanimivost: F_z je lahko poljubno velik, ker ne povzroča prečnih odmikov. No ja, vstavimo to nazaj da dobimo enačbe kjer nastopa **sila**:

$$EI_2x^{(3)} - \dot{x}F_z + F_x = 0$$

$$EI_1y^{(3)} - \dot{y}F_z + F_y = 0$$

In za končen rezultat ponovno odvajamo, da dobimo enačbe za $\frac{d^2\vec{M}}{dl^2}$ kjer nastopa **gostota sile**:

$$EI_2x^{(4)} - \ddot{x}F_z - \dot{x}\dot{F}_z - K_x = 0$$

$$EI_1x^{(4)} - \ddot{y}F_z - \dot{y}\dot{F}_z - K_y = 0$$

kjer K_x in K_y predstavljata linearno gostoto sile.