Upogib tankih ravnih plošč

Tanka ravna plošča.. Kaj sploh mislimo s tem? No, to da je **tanka** pomeni, da je njena debelina majhna v primerjavi z ostalima dimenzijama. To, da je **ravna** pomeni, da upogib v 1. približku ne povzroči raztezanja v ravnini plošče. Če bi bila plošča ukrivljena že takrat, ko je v ravnovesju (npr. lupina), se pri upogibanju v splošnem razteza. Pomembno je pa tudi to, da **obravnavamo majhen upogib**, torej da so premiki majhni glede na debelino plošče.

Zdaj v principu je vse opisano z Navierovo enačbo (ustrezna limita za tanko ploščo), ampak se standardno na novo vse izpelje iz upogibne energije, ki se se jo zapiše v približku dvodimenzionalne plošče.

Tu bi bilo vredno, da si pogledaš postavitev sistema na str. 29. Debelino plošče označimo s h. V sredini pa označimo nevtralno ravnino, ki se v izhodišču ne premakne. Naj bo $u(x, y)$ premik nevtralne ravnine v z smeri (izven izhodišča je to bolj zanimivo pač). Premiki v nevtralni ravnini (ker jih ni), so drugega reda in jih zanemarimo:

$$u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0$$

Iz predpostavke o napetostih dobimo komponente u_{ij} v celotni plošči, torej celotno tridimenzionalno polje. Notranje napetosti (raztezanje vzdolž plošče) so dosti večje od površinskih obremenitev, s katerimi upogibamo ploščo. To je zato, ker je plošča tanka in je navor na njo zelo velik.

Površinske obremenitve zanemarimo! Saj so male glede na notranje napetosti. Torej na površini:

$$\sigma_{ij} u_j = 0 \quad \vec{u} = \hat{e}_z \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

ampak, ker je plošča tako tanka, je to majhno povsod. Tako velja **povsod**:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

Odtod lahko preko Hookovega zakona določimo komponente u_{ij}. Uporabimo tole verzijo:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{ij} + \frac{\sigma}{1-\sigma} u_{kk} \delta_{ij} \right)$$

$$\sigma_{xz} = 0 \Rightarrow u_{xz} = 0$$

$$\sigma_{yz} = 0 \Rightarrow u_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zz} = 0 = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-2\sigma) u_{zz} + \sigma u_{kk}] =$$

$$= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma) u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})] = 0$$

Iz členov u_{xz} in u_{yz}, želimo enakosti:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Rešit želimo z profil, da ostane le še (x, y) odvisnost in s tem dvodimenzionalen problem. Recimo, da je $u_z \approx u(x, y)$ kar **premik nevtralne ravnine**. Enačni integriramo in dobimo:

$$u_x = -z \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u_y = -z \frac{\partial u}{\partial y}$$

Tu smo integracijski konstanti avtomatsko postavili na 0, ker želimo pri $z = 0$ dobiti $u_x = u_y = 0$. Od tod izračunamo vse komponente u_{ij}

$$u_{xx} = -z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u_{yy} = -z\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad u_{xy} = -z\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$$

$$u_{zz} = -\frac{\sigma}{1-\sigma}[\sigma_{xx} + \sigma_{yy}] = \frac{\sigma}{1-\sigma} z\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Od prvotne zahteve nam ostane:

$$u_{xz} = u_{yz} = 0$$

Sedaj nam preostane, da izračunamo energijo upognjene plošče po definiciji:

$$f = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(u_{ij}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{kk}^2\right)$$

in jo integriramo po z tako, da ostane le še dvodimenzionalen problem:

$$f = \frac{E}{1-\sigma}z^2\left[\frac{1}{2(1-\sigma)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\right]$$

Zdaj pa tisti, ki se ne mara lahko to integrira. Profesor Svenšek pravi, da je integral po z trivialen, ampak jaz mu zaupam, da je naredil prav:

$$F = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}\int dx\, dy\,\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + (1-\sigma)\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]\right]$$

Da smo v ravnovesju mora biti $F(u)$ minimalna. Torej $\delta F = 0$ (naredimo variacijo $u(x,y)$). Če deluje še zunanja sila v z smeri:

$$P(x,y) = \frac{\Delta F}{\Delta S}(x,y)$$

mora biti minimalna $F + F_p$ kjer je F_p potencialna energija zunanje sile:

$$F_p = -\int dx\, dy P u$$

$$\Rightarrow \delta(F + F_p) = 0 = \delta F - \int dx\, dy P\delta u = 0$$

Naredimo prvo variacijo prvega dela elastične energije:

$$\delta\frac{1}{2}\int dS\,(\nabla^2 u)^2 \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \delta\int dS\,\frac{1}{2}(\nabla^2 u)^2 = \int dS\,\nabla^2 u \nabla^2 \delta u =$$

$$= \int dS\,\nabla\cdot(\nabla^2 u \nabla \delta u) - \int dS\,\nabla(\nabla^2 u)\cdot\nabla\delta u$$

kjer smo si za prehod v zadnjo vrstico pomagali s identiteto $\nabla\cdot(f\vec{v}) = \nabla f\cdot\vec{v} + f\nabla\cdot\vec{v}$ v prvem členu. Sedaj pa for ease of use obravnavajmo člena posebej. Prvega prepišimo na rob z uporabo dvodimanzionalnega Gaussovega izreka:

$$\int dS\,\nabla\cdot(\nabla^2 u\nabla\delta u) = \oint dl\,(\vec{u}\cdot\nabla\delta u)\nabla^2 u = \oint dl\,\frac{\partial \delta u}{\partial n}\nabla^2 u$$

kjer je $\frac{\partial}{\partial n}$ odvod v smeri navzven od normale. Drugi čelen pa predelamo naprej tako da ga poskusimo izrazit z δu namesto $\nabla\delta u$:

$$-\int dS\,\nabla(\nabla^2 u)\cdot\nabla\delta u = -\int dS\,\nabla\cdot((\nabla\nabla^2 u)\delta u) + \int dS\,(\nabla^2\nabla^2 u)\delta u =$$

$$= -\oint dl\,(\vec{n}\cdot\nabla\nabla^2 u)\delta u + \int dS\,(\nabla^2\nabla^2 u)\delta u =$$

$$= -\oint dl\,\frac{\partial\nabla^2 u}{\partial u}\delta u + \int dS\,(\nabla^2\nabla^2 u)\delta u$$

Tako je vse skupaj:

$$\Rightarrow \delta\int dS\frac{1}{2}(\nabla^2 u)^2 = \int dS\,(\nabla^2\nabla^2 u)\delta u - \oint dl\,\frac{\partial\nabla^2 u}{\partial u}\delta u + \oint dl\,(\nabla^2 u)\delta\frac{\partial u}{\partial n}$$

Variacija drugega dela elastične energije, tistega ki je sorazmeren z:

$$\delta\int dS\,\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

je dolgovezna, a se prevede v celoti na rob. Zahteva, da je ničelen površinski del variacije, vodi v ravnovesne enačbe z $u(x,y)$. Zahteva, da je robni del variacije ničelen, pa do robnih pogojev. Poglejmo si oba ločeno.

Površinski del variacije

Iz površinskega dela dobimo lahko dinamično enačbo. Imamo:

$$\delta F - \int dSP\delta u = \int dS\,\left[D\nabla^2\nabla^2 u - P\right]\delta u = 0$$

$$\Rightarrow D\nabla^2\nabla^2 u - P = 0 \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$$

$\left[D\nabla^2\nabla^2 u - P\right]$ je očitno površinska gostota celotne zunanje sile na delček. $-D\nabla^2\nabla^2 u$ je površinska gostota elastične sile na delček. Tu bodimo pozorni na predznak. Skratka kot rečeno to zdaj zlahka dopolnimo v dinamično enačbo:

$$P_s\ddot{u} = -D\nabla^2\nabla^2 u + P$$

Robni del variacije

Za rob smo izračunali, da imamo:

$$\delta F = \oint dl\,\frac{\partial\nabla^2 u}{\partial u}\delta u + \oint dl\,(\nabla^2 u)\delta\frac{\partial u}{\partial n}$$

Pomembno je tole: če imamo na robu δu poljuben potem je robni pogoj:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\nabla^2 u) = 0$$

Če pa imamo na robu $\delta\frac{\partial u}{\partial n}$ poljuben (to bi pomenilo vrtljivo vpetost) pa je robni pogoj:

$$(\nabla^2 u) = 0$$

Če je $\delta u = 0$ potem $\frac{\partial}{\partial u}(\nabla^2 u)$ ni v splošnem kar nič (sila podlage), enako če je na robu $\delta\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ potem $(\nabla^2 u)$ ni v splošnem nič (navor vpetja).

Primera dovolj enostavnih robnih pogojev

Recimo za **nevrtljivo vpeto ploščo** bi imeli robna pogoja:

$$u = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

Ali pa za prislonjeno ploščo (vrtljivo vpeto):

$$u = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \sigma \frac{d\phi}{dl} \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

kjer je $\frac{d\phi}{dl}$ odvod smeri (kota) v smeri roba. Več primerov robnih pogojev je moč najti v scanih zvezkov za vaje, če se zdi to komu koristno.