Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Politropni modeli in Lane-Emdenova enačba

1. naloga pri Teoretični Astrofiziki

Avtor: Marko Urbanč (28191096)
Predavatelj: prof. dr. Dunja Fabjan

26.12.2021

Kazalo

1 Uvod

Lane-Emdenova enačba (1) je v astrofiziki brezdimenzijska oblika Poissonove enačbe (2) za lastni gravitacijski potencial sferično **simetrične** in **politropne** kapljevine. Za politropno kapljevino velja preprosta enačba stanja $p = K\rho^{\frac{n+1}{n}}$, kjer je n **politropni indeks**. Lane-Emdenova enačba se tako glasi:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) + \theta^n = 0 \tag{1}$$

kjer je ξ brezdimenzijski radij in je θ povezan z gostoto in (zaradi politropnosti) tlakom preko zveze $\rho(r) = \rho_c\theta^n(r)$. Radij lahko pretvorimo v brezdimenzijski radij preko zveze $r = \alpha\xi$, kjer je:

$$\alpha = \left[(n+1)\frac{K\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}\right]^{1/2}$$

in je K proporcionalnostna konstanta. V tem zapisu lahko pravzaprav prepoznamo Laplaceov operator v sferičnih koordinatah, kjer ni kotne odvisnosti zaradi sferične simetrije. Tako se enačba lahko posplošeno zapiše kot:

$$\Delta\theta + \theta^n = 0\,, \tag{2}$$

kjer Δ označuje Laplaceov operator. Takim zvezdnim modelom pravimo *politropni* modeli.

2 Analitična rešitev za $n = 5$

V splošnem enačb zvezdne strukture ne uspemo rešiti analitično. V našem primeru pa, ker velja preprosta enačba stanja, lahko Lane-Emdenovo enačbo rešimo analitično za politropne indekse $n = 0, 1, 5$. Ustrezni robni pogoji za reševanje so $\theta(0) = 1$ in $\theta'(0) = 0$.
Pri predavanjih smo enačbo že rešili za indeksa $n = 0, 1$. Naloga od nas zahteva, da preverimo, če je rešitev za indeks $n = 5$ res:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\xi^2}}\,. \tag{3}$$

To preverimo preprosto tako, da rešitev vstavimo v enačbo in preverimo, če se enačba res izide. Sicer pa tudi izpeljava te rešitve ni nekaj pretirano zahtevna. Zgledne izpeljave se najdejo na internetu [1]. V primeru $n = 5$ se enačba torej glasi:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) + \theta^5 = 0 \tag{4}$$

Najprej se lotimo tako, da izračunamo odvod domnevne rešitve (3):

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{-3/2} \cdot \frac{1}{3}2\xi = -\frac{\xi}{3\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{3/2}} \tag{5}$$

oz. pravzaprav potrebujemo:

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = -\frac{\xi^3}{3\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{3/2}} \tag{6}$$

Tako lahko naredimo naslednji odvod:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) = -\frac{3\xi^2\cdot 3\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{3/2} - \xi^3\cdot 3\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{3}2\xi}{9\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^3} = \tag{7}$$

$$= -\frac{3\xi^2\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{3/2} - \xi^4\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{1/2}}{3\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^3} \tag{8}$$

Tako imamo vse sestavne dele:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right) + \theta^5 = -\frac{3\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{3/2} - \xi^2\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{1/2}}{3\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^3} + \theta^5 = \tag{9}$$

$$= \frac{3\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^3\left[\xi^2\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{-5/2} - 3\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{-3/2}\right]}{3\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^3} + \theta^5 = \tag{10}$$

$$= \frac{1}{3}\xi^2\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{-5/2} - \left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{-3/2} + \theta^5 = \tag{11}$$

$$= \left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{-5/2}\left(\frac{1}{3}\xi^2 - \left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)\right) + \theta^5 = -\left(1+\frac{1}{3}\xi^2\right)^{-5/2} + \theta^5 \tag{12}$$

Iz česar pa res sledi domnevna rešitev (3).

3 Numerično reševanje

Kot rečeno se tovrstne enačbe v splošnem rešujejo numerično. Za namen numeričnega računanja prevedemo diferencialno enačbo drugega reda na sistem diferecialnih enačb prvega reda. Našo enačbo lahko pravzaprav prepišemo v obliko:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\xi^2} = -\left[\theta^n + \frac{2}{\xi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right] \tag{13}$$

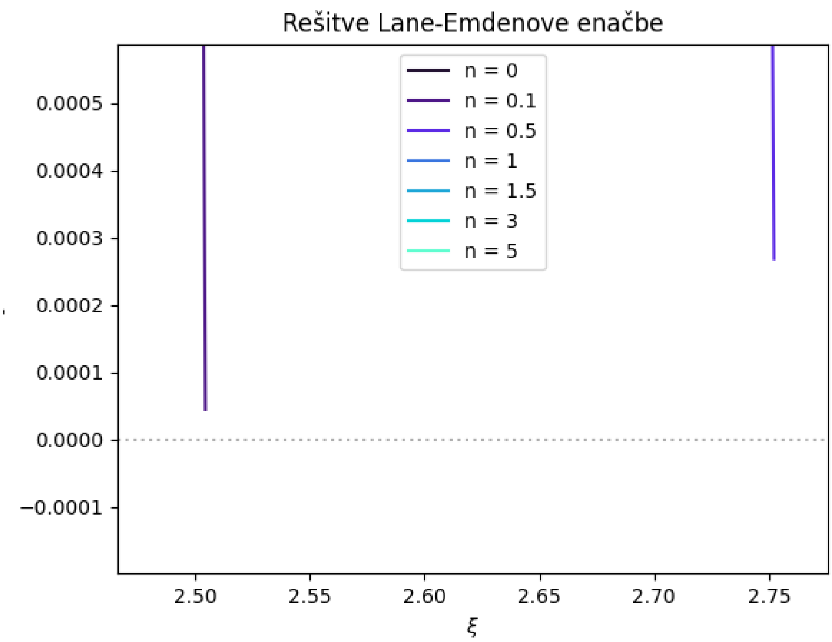
Z uvedbo nove spremenljivke φ enostavno prevedemo diferencialno enačbo v sistem. Tako dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi} = \varphi \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi} = -\left[\theta^n + \frac{2}{\xi}\varphi\right] \tag{15}$$

Numeričnega problema sem se lotil v Pythonu, kjer sem si pomagal z knjižnicami `NumPy` in `matplotlib`. Prvi poskrbi za vso delo z podatki in preprostejšimi operacijami z njimi. Drugi pa je prisoten za risanje grafov. Pri numeričnem reševanje sistema diferencialnih enačb sem zaradi stabilnosti in robustnosti raje uporabil vgrajeno funkcijo
`scipy.integrate.odeint()`, kot da bi uporabljal lastno implementirane integratorje.

Kar se tiče iskanja ničel sem jih raje odbral od grafa, kot da bi jih iskal z npr. Newton-Raphsonovo metodo. To je zato, ker se rešitve z polcelim politropnim indeksom približajo abscisni osi, ampak je zaradi končne numerične natančnosti ne dosežejo zares. Namesto da bi se mučil z interpolacijo in posledično iskanjem ničel numerično sem raje pomanjšal delitev integracijskega intervala, kar služi v namen večanja natančnosti. Tako sem uporabljal mrežo 50000000 točk (ki je porabilo tudi vseh 16 GB spomina, ki ga imam) in čim bolj natančno odbral ničle vseh funkcij. Rešitev za $n = 5$ se asimptotsko približuje abscisni osi zato nje prve ničle ni možno določiti. To je zato ker $n = 5$ predstavlja neskončno zvezdo.



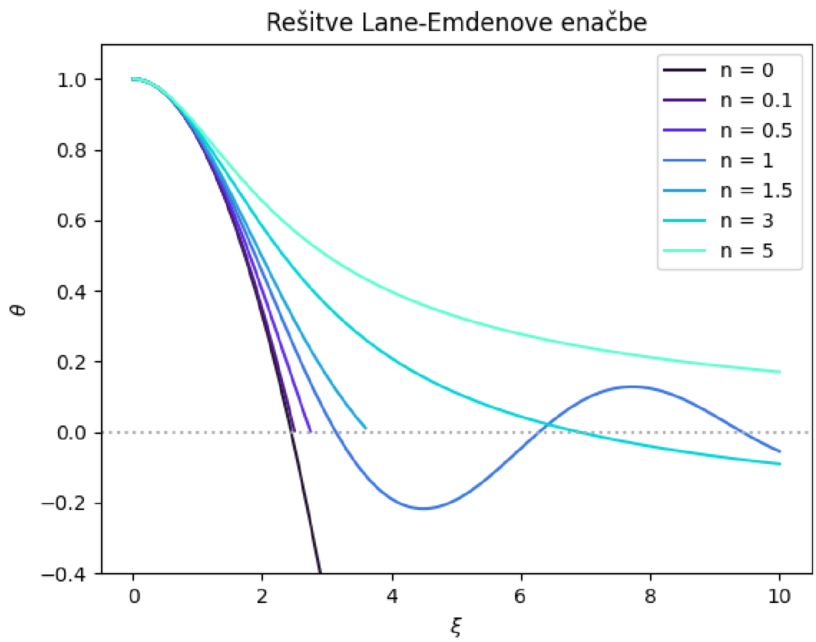
Slika 1: Prikaz iskanja ničel

Ker rešujemo sistem diferencialnih enačb vrednosti odvoda pravzaprav dobimo "zastonj". Integrator nam vrne pravzaprav dva vektorja, kjer so v prvem vrednosti funkcije v podanih točkah, v drugem pa njihovi odvodi. Tako sem zopet pri čim višji numerični natančnosti prebral vrednosti odvoda pri ξ_1 za vsako rešitev.

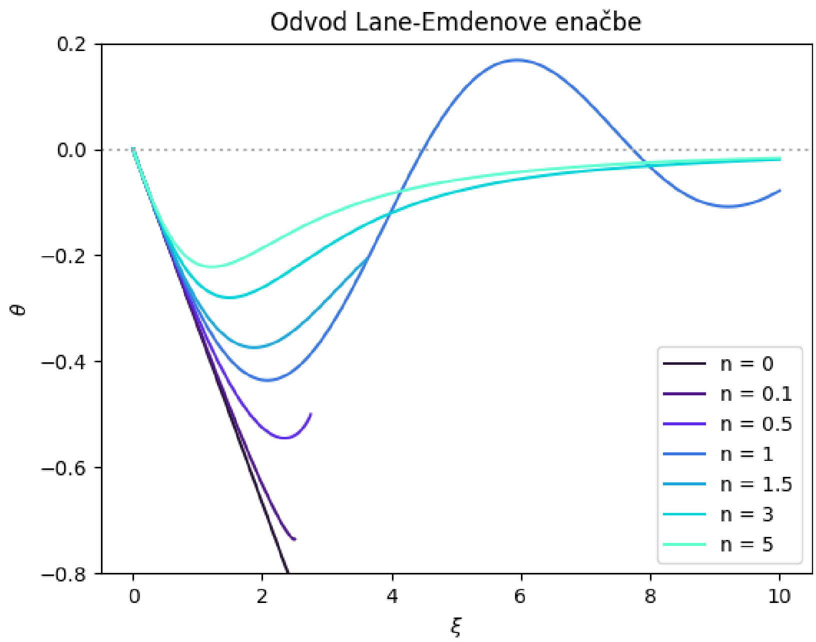
Za izračun M_n pa obstaja preprosta zveza $M_n = -\xi_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)|_{\xi_1}$. To formulo sem implementiral v Excelu.

n	ξ_1	$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\vert_{\xi_1}$	M_n
0.0	2.45	-0.82	4.92
0.1	2.50	-0.73	4.56
0.5	2.75	-0.50	3.78
1.0	3.14	-0.32	3.16
1.5	3.64	-0.20	2.65
3.0	6.89	-0.04	1.9
5.0	/	/	/

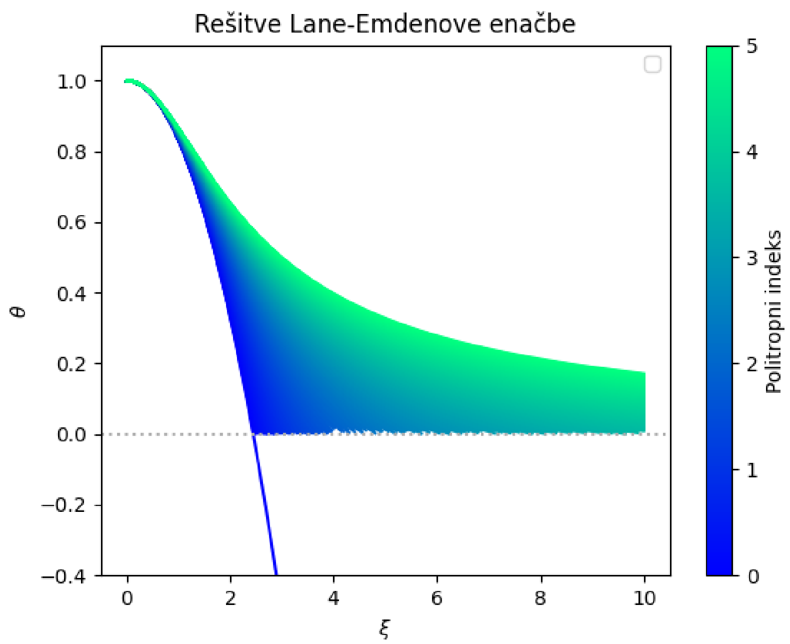
Tabela 1: Prve ničle, vrednosti odvodov in M_n.



Slika 2: Graf rešitev za željene indekse



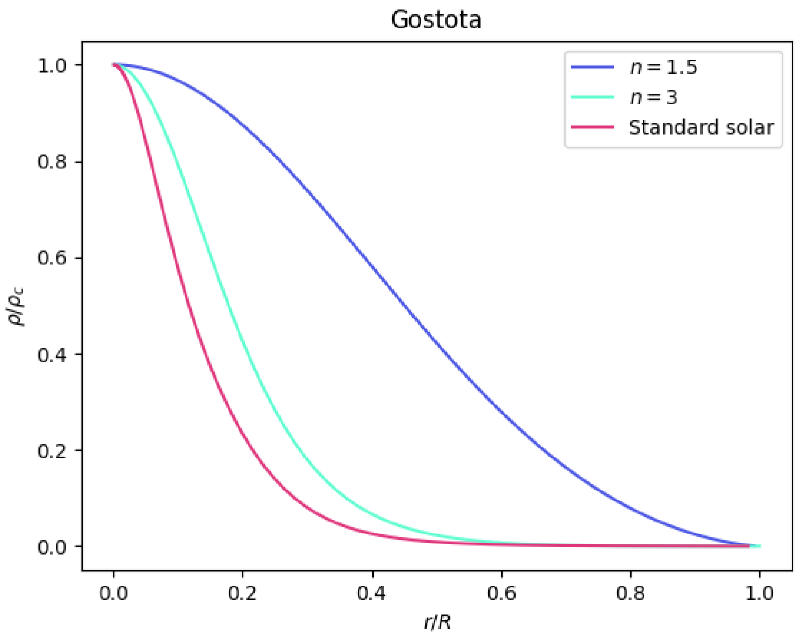
Slika 3: Graf odvodov rešitev za željene indekse



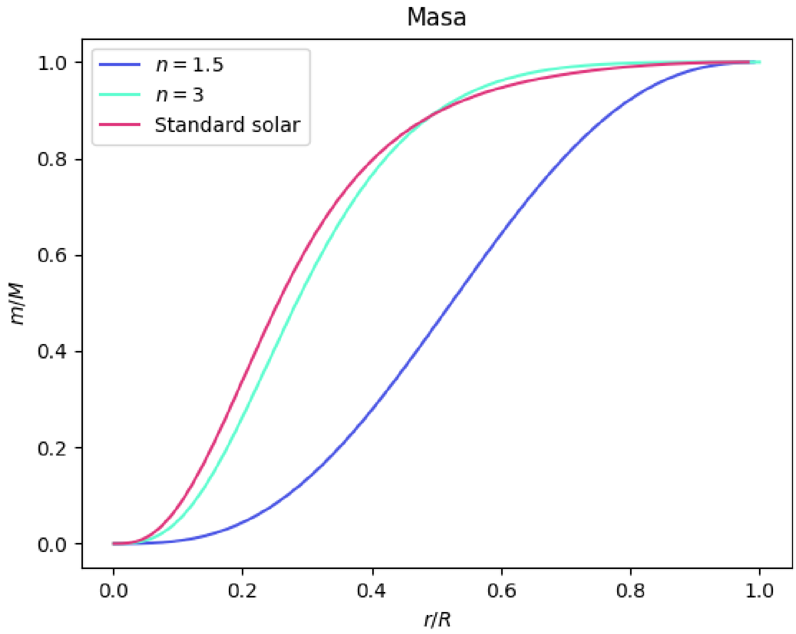
Slika 4: Za estetiko sem narisal še zvezen prikaz rešitev za različne vrednosti n

4 Model zvezde

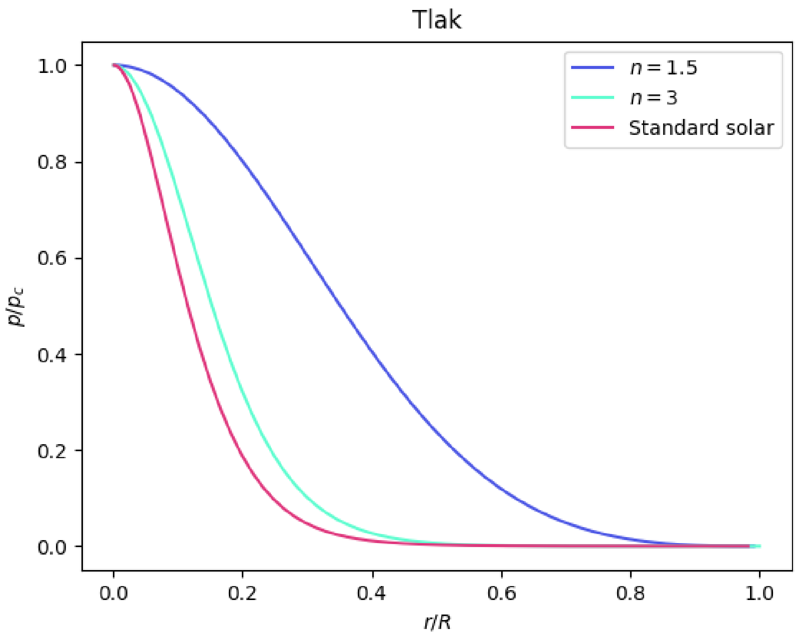
Za modela $n = 1.5$ (ki opisuje enoatomni plin) in $n = 3$ (ki opisuje degeneriran relativističen plin) naloga od nas zahteva, da narišemo grafe za gostoto, maso, tlak in temperaturo v odvisnosti od radija. Tudi to sem implementiral v Pythonu. Dodal sem še podatke za standardni solarni model, ki sem jih tudi ustrezno normiral.



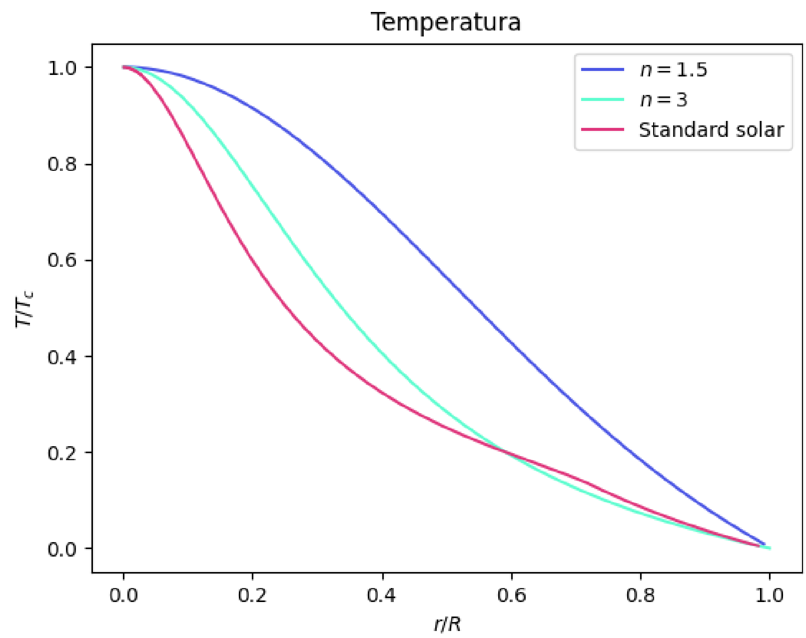
Slika 5: "Normiran" graf gostote v odvisnosti od radija



Slika 6: "Normiran" graf mase v odvisnosti od radija



Slika 7: "Normiran" graf tlaka v odvisnosti od radija



Slika 8: "Normiran" graf temperature v odvisnosti od radija

5 Primerjava z standardnim solarnim modelom

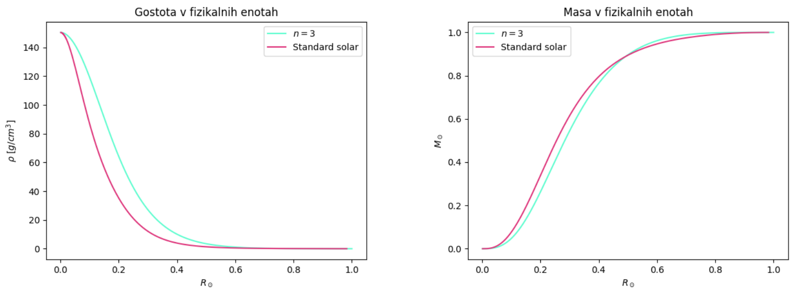
Naloga od nas zahteva, da primerjamo standardni solarni model in politrop z indeksom $n = 3$. Narisal sem ju v enotah ρ_c, P_c, T_c za Sonce.

Zdi se mi dovolj varno rečti, da se modela od okoli $0.5\frac{r}{R}$ obnašata skoraj enako. To je sicer nekoliko varljiv stavek, saj sta recimo v primeru tlaka in gostote oba modela od tam naprej praktično na 0. Ampak v splošnem naš model precej dobro opiše pravo zvezdo. Strmejši grafi ustrezajo višjim indeksom n iz česar se da sklepati, da sonce opisje bolje model z politropnim indeksom $n > 3$. Za odstopanje je verjetno odgovorno to, da je Sonce tudi iz drugih elementov in ne samo vodika. Verjetno prispevajo tudi različne ionizacije teh gradnikov.

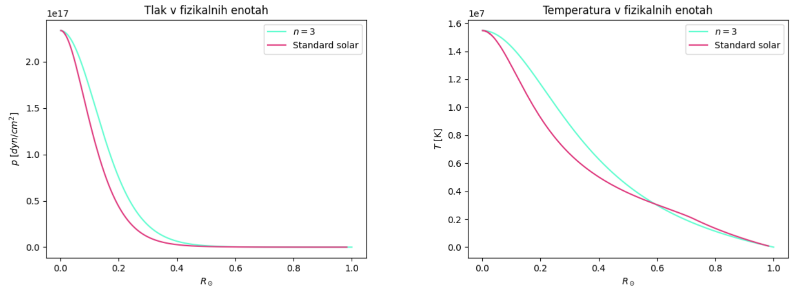
6 Gravitacijska energija zvezde

Naloga od nas zahteva, da izpeljemo enačbo za gravitacijsko energijo zvezde, ki jo opišemo z politropnim modelom z indeksom n. Pokazati moramo da velja relacija:

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{1+n}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\rho}\right) \tag{16}$$



(a) Odvisnost gostote od radija (b) Odvisnost mase od radija



(a) Odvisnost tlaka od radija (b) Odvisnost temperature od radija

6.1 Dokaz relacije (16)

Vemo, da za naš politropni model velja enačba stanja $p = K\rho^{\frac{n+1}{n}}$. Tako lahko torej zapišemo:

$$\frac{p}{\rho} = K\rho^{\frac{n+1}{n}-1} \tag{17}$$

Iz česar lahko izračunamo odvoda:

$$\mathrm{d}p = K\left(\frac{n+1}{n}\right)\rho^{\frac{n+1}{n}-1}\mathrm{d}\rho \tag{18}$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right) = K\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\rho^{\frac{n+1}{n}-2}\mathrm{d}\rho \tag{19}$$

Izračunamo lahko kvocient med njima:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right)}{\mathrm{d}p} = \frac{K\left(\frac{n+1}{n}-1\right)\rho^{\frac{n+1}{n}-2}\mathrm{d}\rho}{K\left(\frac{n+1}{n}\right)\rho^{\frac{n+1}{n}-1}\mathrm{d}\rho} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}}\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\rho} \tag{20}$$

Iz tega pa sledi željena zveza (16).

6.2 Izpeljava gravitacijske energije

Prikladne izpeljave za brezdimenzijsko gravitacijko se lahko najdejo na internetu [2], tako da sem jih vzel za zgled. Začnemo z izrazom za gravitacijski potencial zaradi sferične masne lupine:

$$dU = -\frac{GM_r dM_r}{r} \tag{21}$$

Ker lahko z uporabo *per partes* integracije prepišemo v obliko

$$dU = d\left(-\frac{GM_r^2}{2r}\right) - \frac{GM_r^2}{2r^2}dr \tag{22}$$

Tu lahko drugi člen izrazimo iz enačbe za hidrostatično ravnovesje, ki se glasi

$$\frac{dP}{dr} = -\left(\frac{GM_r^2}{r^2}\right)\rho \tag{23}$$

Tako lahko prejšnji izraz prepišemo v novo obliko

$$dU = d\left(-\frac{GM_r^2}{2r}\right) + \frac{M_r}{2}\frac{dP}{\rho} \tag{24}$$

Sedaj uporabimo prej dokazano relacijo (16) in prepišemo v

$$dU = d\left(-\frac{GM_r^2}{2r}\right) + \frac{n+1}{2}M_r d\left(\frac{P}{\rho}\right) \tag{25}$$

Maso lahko nesemo v diferencial in dodamo še člen za odvod produkta

$$dU = d\left(-\frac{GM_r^2}{2r}\right) + \frac{n+1}{2}d\left(\frac{PM_r}{\rho}\right) - \frac{n+1}{2}\frac{P}{\rho}dM_r \tag{26}$$

Tu si pomagamo še z virialnim teoremom iz katerega dobimo zvezo:

$$3\frac{P}{\rho}dM_r - 3d\left(P\frac{4}{3}\pi r^3\right) + dU = 0 \tag{27}$$

S tem nadomestimo pridelani člen zaradi odvoda produkta v (26) in dobimo:

$$dU = \frac{3}{5-n}\left[d\left(-\frac{GM_r^2}{r}\right) + (n+1)d\left(\frac{M_r P}{\rho}\right) - (n+1)d\left(P\frac{4}{3}\pi r^3\right)\right] \tag{28}$$

To lahko integriramo po r od 0 do R. Zadnja dva člena odpadeta in preostane nam samo:

$$U = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R} \tag{29}$$

Rezultat je smiselen in sila podoben izrazu za gravitacijsko potencialno energijo homogene zvezde. Pri $n = 5$ izraz divergira in bi dobili neskončno energijo, kar pa res ustreza neskončni zvezdi.

Do tega rezultata bi lahko prišli tudi numerično, tako da bi potencial zapisan kot:

$$U = -\frac{16\pi^2 G\rho_c^2 R^5}{\xi_1^5}\int_0^{\xi 1}\theta^n(\xi)\xi\left[\int_0^{\xi}\theta^n(\xi')\xi'^2 d\xi'\right]d\xi \tag{30}$$

pretovorili v brezdimenzijsko obliko. Do izraza (30) sem sam prišel zelo hitro, ampak nisem vedel, kako ga ustrezno pretvoriti v brezdimenzijsko obliko. Tudi ta postopek je povzet v članku [2].

7 Celotna energija zvezde

Naloga od nas zahteva še, da napišemo splošen izraz za celotno energijo zvezde. Slednjega lahko dobimo preprosto iz virialnega teorema, ki pravi:

$$E = \frac{1}{2}U\,, \tag{31}$$

kjer je E celotna energija zvezde. Tako se ta izraz glasi kar:

$$E = \frac{3}{2(5-n)}\frac{GM^2}{R} \tag{32}$$

V primeru $n = 3$ dobimo torej:

$$E = \frac{3}{4}\frac{GM^2}{R} \tag{33}$$

8 Komentarji

Zdi se mi, da sem že sproti ustrezno pokomentiral dobljene rezultate. Najdaljši del naloge mi je pravzaprav vzelo to, da sem ugotovil, kako se pravilno izpelje izraz za gravitacijsko energijo. Numerični del je šel skozi presenetiljivo brez težav. Mogoče sem se res nekaj naučil pri mafijskem praktikumu. Overall se mi je naloga zdela precej zanimiva. Sploh to kako lahko z dokaj preprosim modelom, kar okay opišemo lastnosti našega Sonca.

Slika 11: A funny za zaključek

Literatura

[1] Wikipedia. Lane–Emden equation — Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Lane%E2%80%93Emden%20equation&oldid=1054690298, 2021. [Online; accessed 29-December-2021].

[2] Saul Rappaport. Polytropic models for stars - mit opencourseware, 2006.