Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta za *matematiko in fiziko*

Sferna trigonometrija

1. naloga pri Opazovalni Astrofiziki

Avtor: Marko Urbanč (28191096)
Predavatelj: prof. dr. Janez Kos

28.2.2022

Kazalo

1 Uvod

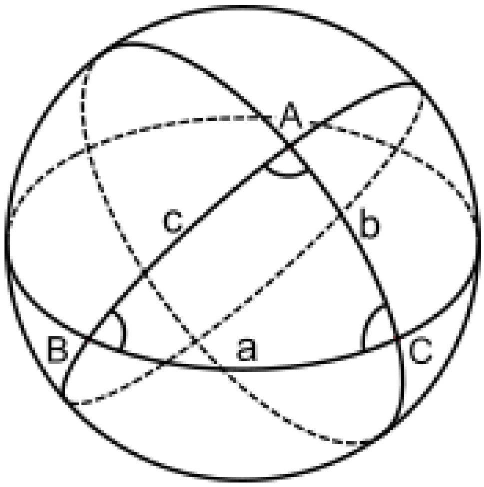
Sferična trigonometrija je veja geometrije, ki opisuje povezavo med trigonometričnimi funkcijami in stranicami in koti sferičnih likov. To je še posebaj pomembno za sferične trikotnike, ki jih definiramo z večimi velekrogi na sferi. Praktično vse lahko opišemo s pomočjo samo dveh zvez. Ti sta **kosinusni izrek**

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

in **sinusni izrek**

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} ,$$

kjer smo stranice trikotnika označili kot je prikazano na skici (Slika 1).



Slika 1: Sferični trikotnik

Uporaba sferične trigonometrije je ključna za astronomska opazovanja, kjer imamo več različnih koordinatnih sistemov v krogelnih koordinatah. Koordinate zvezd običajno podajamo kot rektascenzija α in deklinacija δ, saj sta ti najbolj konstantni skozi čas. Nista pa praktični za opazovanja. Takrat raje uporabimo azimut A in višino nad obzorjem h. Pri vajah smo izpeljali formule za pretvorbo. Če imamo podane koordinate zvezde lahko ob danem urnem kotu H pretvorimo kot

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H , \tag{1}$$

$$\cos A = \frac{\sin \delta - \sin \phi \sin h}{\cos \phi \cos h} , \tag{2}$$

kjer smo z ϕ označili geografsko širino opazovalca. Urni kot H dobimo kot

$$H = S - \alpha , \tag{3}$$

kjer je S zvezdni čas. Ta je odvisen od položaja opazovalca na Zemlji in datuma v letu. Teče nekoliko hitreje kot naše ure, ki so uravnane po soncu. Iz tabel preberemo $S(0^h\mathrm{UT})$, ki je zvezdni na Greenwichu ob 0 ur UT. Poznati moramo še opazevalčevo geografsko dolžino λ in lokalni čas t, ki ga popravimo z razliko od UT z t_0. Tako dobimo zvezdni čas kot

$$S = S(0^h\mathrm{UT}) + \lambda + (t - t_0)\frac{366.2422}{265.2422} \,. \tag{4}$$

Položaj Sonca na nebu se spreminja s časom, ker Zemlja potuje okoli Sonca. Spreminjanje koordinat lahko opišemo z

$$\sin\delta_\odot = \sin\varepsilon \sin L \,, \tag{5}$$

$$\tan\alpha_\odot = \cos\varepsilon \tan L \,, \tag{6}$$

kjer je $\varepsilon = 23.5°$ naklon ekliptike glede na ekvator, L pa je eklоptična dolžina sonca oz. kotna razdalja pomladišča, ki jo za znano število dni od zadnjega pomladanskega enakonočja Δt dobimo kot

$$L = \frac{\Delta t}{365.2422} \cdot 2\pi \tag{7}$$

To je sicer približek, kjer se delamo, da je Zemljina orbita krožna. V resnici je rahlo elipsasta. To lahko nekoliko upoštevamo z boljšim približkom. Izračunamo srednjo anomalijo M Zemljine orbite ob julijanskem datumu J

$$M = (M_0 + M_1(J - J_{2000})) \mod 360° \,, \tag{8}$$

kjer je $J_{2000} = 2451545$, konstanti M_0, M_1 pa sta tabelirani. Ekliptično dolžino sonca lahko tako dobimo kot

$$L = M + \Pi + C + 180° \,, \tag{9}$$

kjer je Π ekliptična dolžina perihelija, C pa dobimo po formuli

$$C \approx C_1 \sin M + C_2 \sin 2M + C_3 \sin 3M + C_4 \sin 4M + C_5 \sin 5M + C_6 \sin 6M \,. \tag{10}$$

Konstante $\Pi, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5,$ in C_6 so tabelirane.
Zaradi vsega tega gibanja Sonce ne kulminira vsak dan opoldne, ampak ima lahko odstopanje z amplitudo do 15 minut. Razlika je podana pod imenom časovna enačba. Ta opiše razliko med pravim sončevim časom in srednjim sončevim časom. Če gledamo sonce vsak dan ob istem srednjem sončevem času, se njegova pozicija spreminja na nebu. Krivulja, ki jo dobimo se imenuje **analema**.

2 Naloga

Naloga od nas zahteva, da napišemo program za pretvorbo ekvatorialnih koordinat α, δ v azimut in višino nad obzorjem. Ko preverimo skladanje programa z pravimi izračuni, narišemo, kako potujeta po nebu zvezdi Procyon in Kochab, če bi ju tekom noči iz 19. na 20. februar opazivali iz AGO Golovec ($\lambda = 14.5277°$, $\phi = 46.0439°$). Nato narišemo analemo za oba približka ekliptične dolžine Sonca in ju primerjamo. Na koncu pa lahko narišemo še analemo za kak drug planet.

3 Opis reševanja

Problema sem se lotil v Pythonu, kjer sem si pomagal z knjižnicama `NumPy` za vso numeriko in `matplotlib` za risanje grafov.
Napisal sem funkcijo, ki za dane zemljske koordinate, ekvatorialne koordinate, Greenwichski zvezdni čas ob 0h UT in lokalni čas preračuna po prejšnjih formulah v azimut in višino nad obzorjem. Ujemanje sem preveril z digitalnima zvezdnima kartama *Stellarium* in *Cartes du Ciel*. Nekoliko pride do odstopanja nekaterih rezultatov. Kdaj tudi do nekaj kotnih minut. Koordinate za zvezde sem vzel iz kataloga SIMBAD [1] in so nekoliko drugačne, kot jih imata zapisane obe zvezdni karti. Recimo kot primer poglejmo zvezdo Rigel ob 18:50:05 na noč med 19. in 20. februarjem iz svojega programa dobim

$$A = 171°33'14.5'' \qquad h = 35°23'56.7''$$

iz zvezne karte Stellarium pa

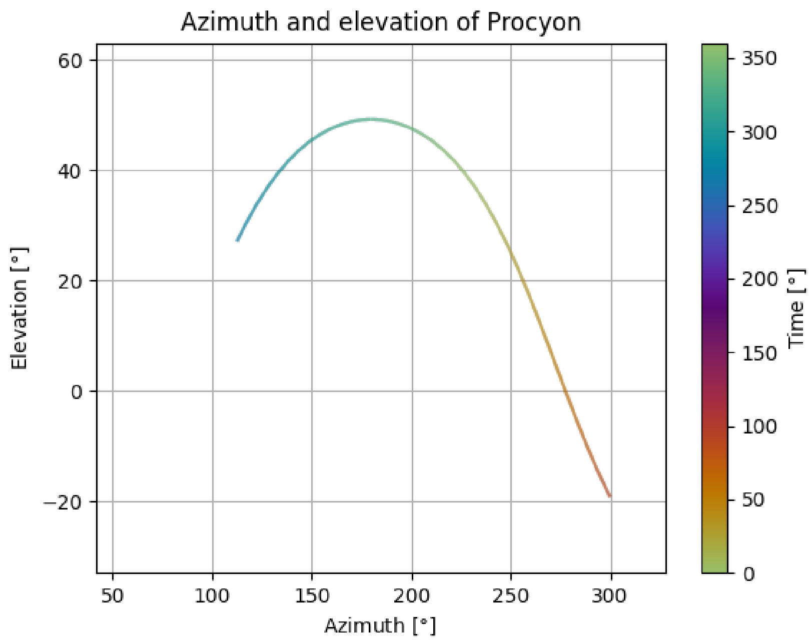
$$A = 171°13'6.3'' \qquad h = 35°24'11.8''$$

Nevem kaj bi lahko še naredil, da bi izboljšal natančnost, ampak recimo, da je *good enough*.

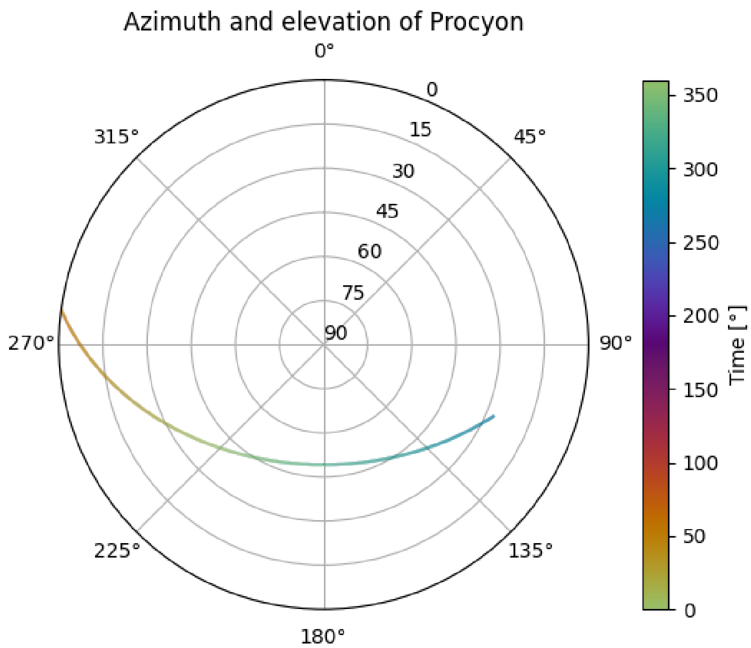
4 Rezultati

4.1 Sledenje dvema zvezdama

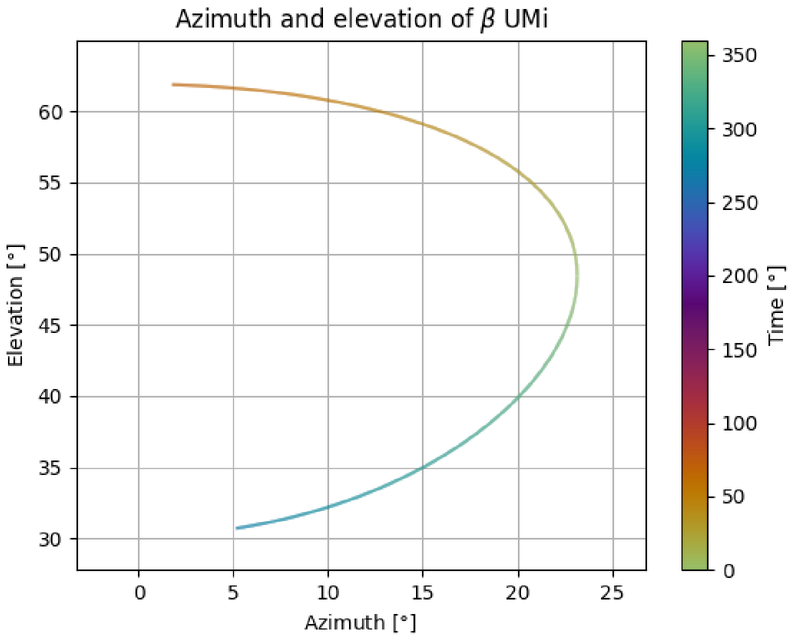
Po prepričanju, da moja koda vsaj za prvo silo okay deluje, sem se lotil risanja grafov poti zvezd po nebu, ko naj bi opazovali. Nisem se uspel odločiti, kateri način prikaza podatkov je bolj prakitčen, torej sem se odločil podati oba. Barva pa ustreza različnim uram, ki so podane v stopinjah.



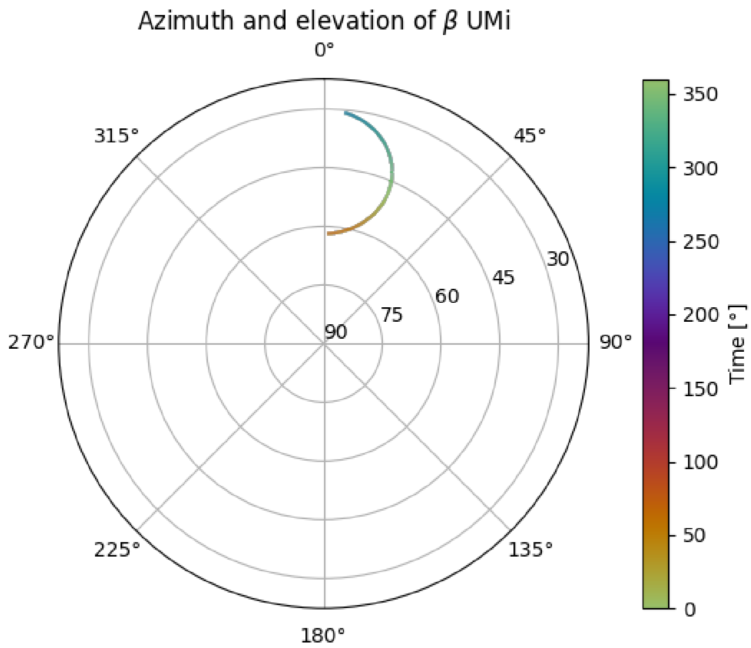
Slika 2: Premik Procyon po nebu iz noči 19.2.22 na 20.2.22



Slika 3: Polarni prikaz Procyon po nebu iz noči 19.2.22 na 20.2.22



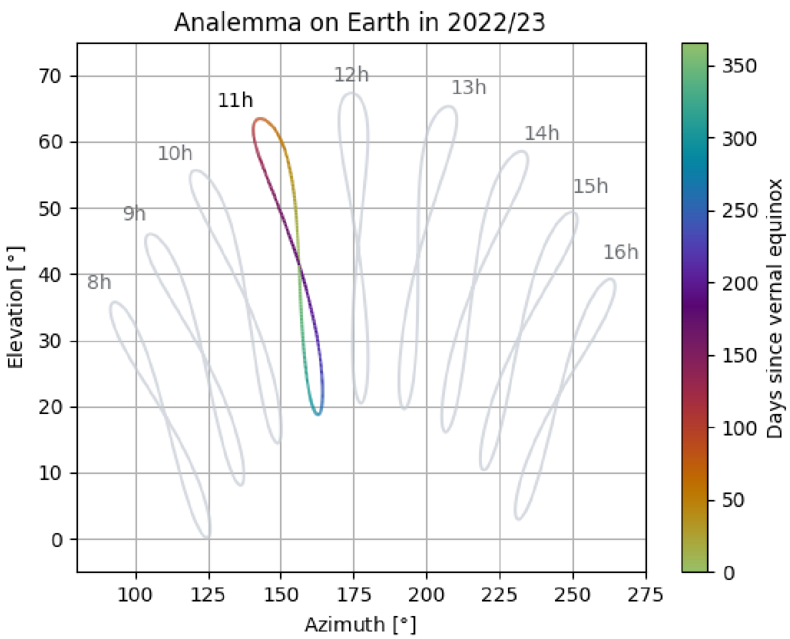
Slika 4: Premik Kochab po nebu iz noči 19.2.22 na 20.2.22



Slika 5: Polarni prikaz Kochab po nebu iz noči 19.2.22 na 20.2.22

4.2 Analema pri krožni orbiti

Spisal sem program, ki ustrezno upošteva spreminjanje sončevih koordinat. Z spletnim orodjem Narodnega Astronomskega Observatorija Japonske [2] sem ustvaril tabelo z potrebnimi zvezdnimi časi. Začel sem leto na 20.3, kar je pomladansko enakonočje in je s tem bilo olajšano računanje, ker je indeks vrstice predstavljal dneve od enakonočja. Narisal sem nekaj analem za različne opazovalne čase, če bi jih opazovali iz AGO Golovec. Barva ustreza številu dni od pomladanskega enakonočja.

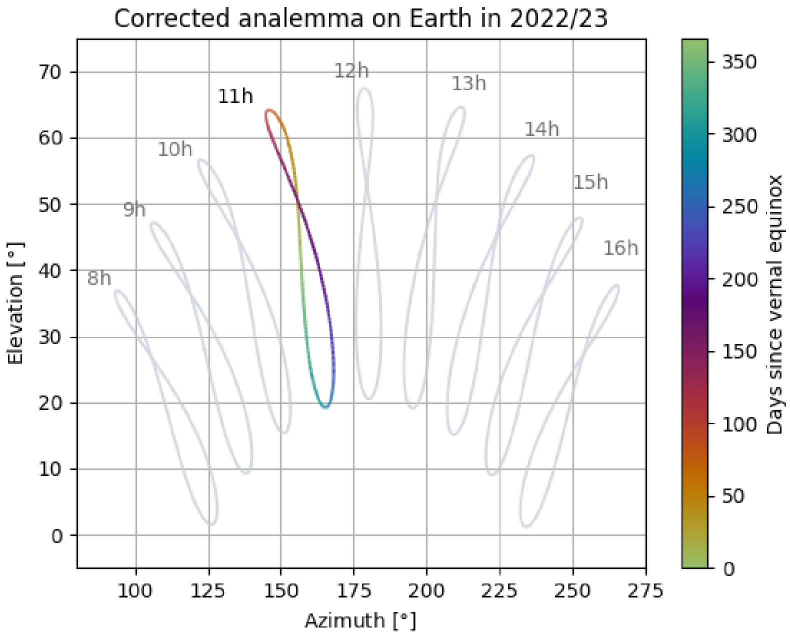


Slika 6: Analema (krožna orbita) gledana iz AGO Golovec v letu 2022/23

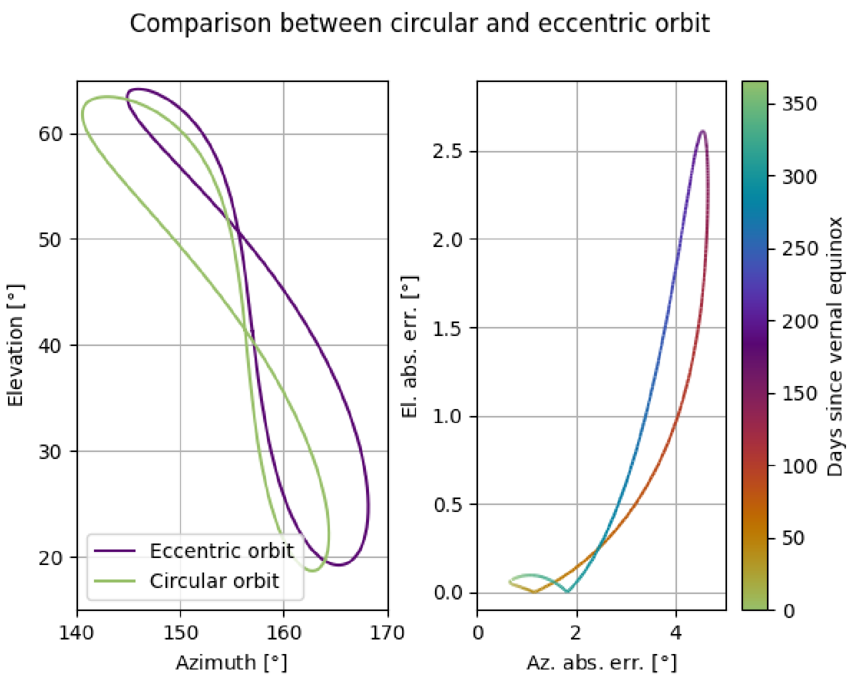
Prva stvari, ki jo takoj opazimo je, da je nagnjenost analeme odvisna od časa opazovanja. Pri nas deluje skoraj kot nekakšen urin kazalec. Dobimo poznano obliko osmice, kjer pa zgledata loka dokaj enaka. To je posledica tega, da smo privzeli krožno orbito. Posledično je tudi presečišče ravno na sredini.

4.3 Analema pri eliptični orbiti

Z upoštevanjem boljšega približka, sem na podoben način izračunal še analeme, kjer upoštevamo eliptičnost zemljine orbite.
Tu se oblika znatno spremeni. Vidimo, da zdaj posamična loka nista več enako velika, ampak je en bistveno večji in drugi manjši. Manjši lok osmice ustreza poletnemu času (vsaj nam na severni hemisferi). Zemlja je takrat najdlje stran od Sonca in se giblje počasneje, zato opiše manjši lok na nebu. Nasprotno je najhitrejša pozimi, ko je najbližje Soncu in takrat lahko opiše večji lok.



Slika 7: Analema (eliptična orbita) gledana iz AGO Golovec v letu 2022/23

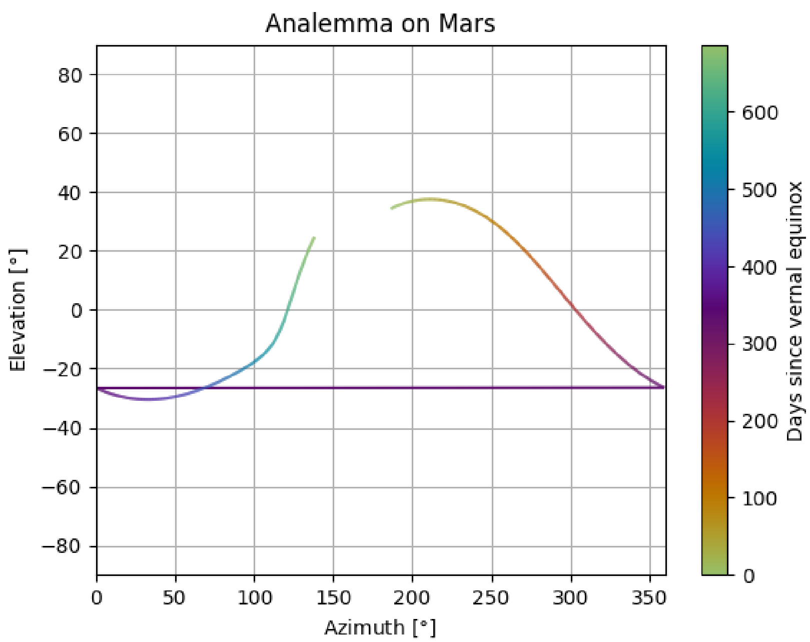


Slika 8: Primerjava analeme za krožno in eliptično orbito

Analema se tudi nekoliko zamakne, ampak to pa nisem ravno prepričan zakaj. Še vedno pa vsekakor velja, da je njena nagnjenost odvisna od ure v dnevu, ko vsak dan opazujemo Sonce. Za dodatno primerjavo sem narisal tudi absolutno odstopanje obeh krivulj.

4.4 Poskus analem za druge planete

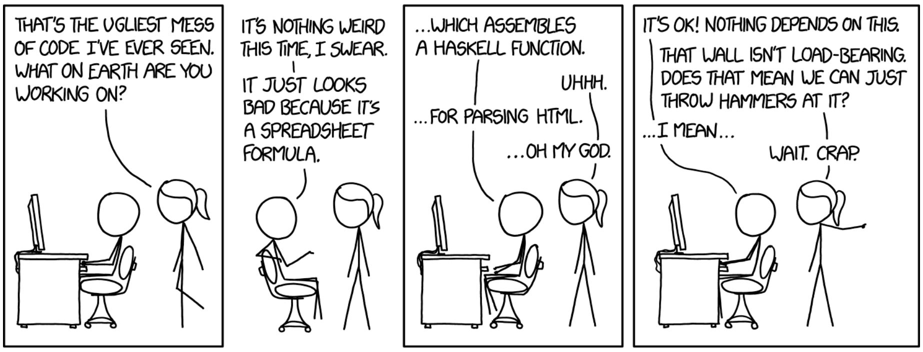
Poskusil sem narisati analemo še za Mars, ampak sem nekoliko naletel na težave. Nisem prepričan, kako ravno naj bi upošteval, da je leto na Marsu dolgo 687 zemeljskih dni. Poskusil sem kar eksplicitno samo gledati za toliko zemeljskih dni, ampak sem dobil nekaj, kar ne znam ustrezno preslikati, da bi prišlo lepo zvezno (zaradi definicij kotnih funkcij je potrebo kdaj popraviti točke na roko, za wrap around). Zaradi preobremenjenosti z drugim delom, žal nisem uspel več časa posvetiti temu. Bi pa zelo rad nekoč narisal analeme za vse planete, čisto iz radovednosti, kako bi bilo, če bi živel tam.



Slika 9: Pričakoval bi obliko solze, kar pa tole ni ravno

5 Komentarji in izboljšave

Zdi se mi, da sem večino stvari že sproti ustrezno pokomentiral. Verjetno bi bilo dobro ugotoviti, zakaj pride do opaznega odstopanja med programom in zvezdno karto. Dolgo časa sem gledal, kje bi se lahko kaj zmotil in nisem uspel najti napake. Mogoče upoštevajo oni še kakšne dodatne popravke, recimo za atmosferski lom in aberacijo svetlobe, ki jih mi tukaj nismo. Zanimivo mi je tudi to, da so si koordinate za isto zvezdo med katalogi nekoliko različne. Sicer pa mi je bila naloga na sploh všeč, enkrat ko koda vse deluje. Zelo dolgo časa sem porabil, da sem ugotovil, kako popraviti nekaj nevšečnosti, kar se tiče cikličnosti kotnih funkcij.



Slika 10: Relevantno mojim pretvorbam enot DMS, deg, HMS, ...

Literatura

[1] M. Wenger, F. Ochsenbein, D. Egret, P. Dubois, F. Bonnarel, S. Borde, F. Genova, G. Jasniewicz, S. Laloë, S. Lesteven, and R. Monier. The SIMBAD astronomical database. The CDS reference database for astronomical objects. , 143:9–22, April 2000.

[2] Greenwich sidereal time, dostopno na `https://eco.mtk.nao.ac.jp/cgi-bin/koyomi/cande/gst_en.cgi`.