

Fizika Zvezd

Kaj je zvezda?

Nebesno telo / gmota plina, ki jo drži skupaj lastna gravitacija (sfera/sferoid) in da seva sevalno energijo, ki jo proizvaja notranji vir (jedrske reakcije ali pa npr. sesedajoča zvezda, ki oddaja grav. pot. en.)

Zvezde se razvijajo:

- Sprememba strukture / sestave
- Umiranje
- rojstvo zvezd

Osnovne hipoteze (za postavljanje modelov)

1. izolirani sistemi
2. Uniformna začetna sestava zvezde
3. Sferna simetrija

Zvezde so izolirani sistemi

razdalje med zvezdami \gg njihovi radiji

$$\frac{R_{\text{sun}}}{d_{\text{cent}}} = \frac{700\,000 \text{ km}}{4 \cdot 10^{13} \text{ km}} = 2 \cdot 10^{-8}$$

\Rightarrow Bliznje zvezde nimajo vpliva...

Obstajajo pa dvojne zvezde:

- Približno 75% zvezd ima spremljevalko
- Lahko vplivajo na razvoj in strukturo
- Zelo različne medsebojne razdalje

\rightarrow Večinoma dovolj namuzen, da ni vpliva na razvoj.

Uniformna sestava na Zacetku

Privzamemo uniformno zacetno sestavo z H, He in kovinami:

$$X = \frac{\rho_H}{\rho} \quad Y = \frac{\rho_{He}}{\rho} \quad Z = \frac{\rho_{metals}}{\rho} \quad ; \quad X+Y+Z=1$$

Na Zacetku te niso odvisne od r

Ko se jedrsko zlitje prične se sestava spremeni

Sama fotosfera brani zacetno sestavo

Sferna simetrija

Velja za izolirano, nevtrarno, nemagnetno, zvezdo.

Vsaka lastnost (T, ρ, S, \dots) je odvisna samo od r

Za sonce?:

rotacija

vs

gravitacija

gravitacijska
vezavna energija

rotacijska perioda

$$W_g \sim -\frac{GM^2}{R}$$

$$W_{rot} \sim M\omega^2 R^2 \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{t_0} \quad ; \quad t_0 = 27 \text{ dni}$$

$$\Rightarrow \frac{W_{rot}}{|W_g|} \sim 2 \cdot 10^{-5}$$

Torej lahko tudi za naše sonce zanemarimo ~~magnetno~~ rotacijo.

magnetno polje

vs

gravitacija

Privzamimo, da je mag.

polje povsod enako kot v regah

$$W_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad ; \quad B \approx 0,1 T$$

$$\frac{W_{mag}}{|W_g|} \sim 10^{-12}$$

Torej tudi magnetno brez problema zanemarimo

Sferna simetrija
za sonce velja!

Masa:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

Lahko pa tudi napišemo v odvisnosti od mase (masa M ni tako spremenljiva kot radij R v življenjskem obdobju zvezd)

Newtonova gravitacija

- Aproximacija Einsteinove splosne relativnosti
- Torej uporaba le za "navadne" zvezde (ne velja za npr. nevtronske)

Modeli vs opazovanja

- Modeli zvezdne strukture in notranjosti
- Opazovanja uporabimo za določanje robnih pogojev ter za test modelov

Osnovna opazovanja

j - navidezna svetlost (gostota svetlobnega toka)

Velikostni redi
so na ppt. tabeli

L - izsev

T_{eff} - površinska (efektivna \rightarrow black body equivalent) temperatura

Z - kemični sestav

M - masa

R - radij

} običajno lahko določimo za imamo dvojne zvezde
(obstajajo izjeme)

Mechanika in Termično Ravnovesje

Predpostavimo sferno simetrijo. Vse odvisno od r in t .

$$dm(r, t) = 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho v dt$$

↑
masni pretok
radialna hitrost
masne lupine



Ⓐ $\frac{\partial m}{\partial r} \Big|_t = 4\pi r^2 \rho$

Ⓑ $\frac{\partial m}{\partial t} \Big|_r = -4\pi r^2 \rho v$; $v > 0$ izgubljam maso
 $v < 0$ akrecija mase

$v = 0$ statična situacija $\Rightarrow \frac{\partial m}{\partial r} \rightarrow \frac{dm}{dr}$

Sprememba koordinat iz r v maso m

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial m}$$

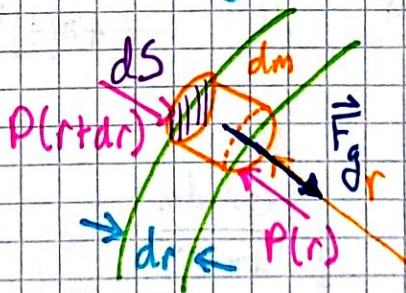
Ⓐ $\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$; ko je masni pretok enak nič

Gravitacijsko polje: $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$ v sfernem $\Rightarrow g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$

Enačba gibanja in hidrostatično ravnovesje:

$$dm = \rho dr ds$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm = -g dm + P(r) ds - P(r+dr) ds$$



• $P(r+dr) = P(r) + \frac{\partial P}{\partial r} dr$

↑ Definicija odvoda

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm = -g dm - \frac{\partial P}{\partial r} dr ds$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} dm = - \frac{Gm dm}{r^2} - \frac{\partial P}{\partial r} dr ds / : dm$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = - \frac{Gm}{r^2} - \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial r}$$

Gostoto lahko izrazimo iz ρ

~~$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = - \frac{Gm}{r^2} - \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial r}$$~~

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = - \frac{Gm}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m}$$

Enačba gibanja

V primeru ravnovesja je vsota vseh sil 0 $\Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial m} = - \frac{Gm}{4\pi r^2}$$

Enačba hidrostaticnega ravnovesja

$$\frac{\partial P}{\partial r} = - G \frac{mg}{r^2}$$

Enačba stanja ki ni od T odvisna: $p(\rho) \rightarrow$ Politropi
V splošnem: $p(\rho, T)$

Središnji tlak v soncu (Ocena): 0 na površju

$$\frac{dP}{dm} = - \frac{Gm}{4\pi r^2}$$

$$dP = P_{\text{površje}} - P_c = -P_c$$

Povprečna masa in radij

$$m = \frac{1}{2} M \quad r = \frac{1}{2} R$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dm} \sim \frac{-P_c}{M} \sim \frac{-GM}{4\pi (\frac{1}{2})^2 R^2} \Rightarrow \frac{2GM^2}{\pi R^4} = 7 \cdot 10^9 \text{ atm} = P_c$$

Sicer: 100x manjše kot naj bi bil res

$$= 7 \cdot 10^{14} \text{ N/m}^2$$

Drugi način:

$$P(M) - P(0) = - \int_0^M \frac{Gm dm}{4\pi r^2}$$

$$P_c = \int_0^M \frac{Gm dm}{4\pi r^2} > \int_0^M \frac{Gm dm}{4\pi R^2} = \frac{GM^2}{8\pi R^2} = 4,4 \cdot 10^{13} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R}\right)^4 \frac{10}{\text{m}^2}$$

Ocena pri fiksnem radiju (spodnja meja za središnji tlak)

Bolg realistični modeli daje za sonce: $\rho_c = 2,4 \cdot 10^{16} \frac{10}{m^3}$

Virialni teorem

$$\frac{dp}{dm} = - \frac{Gm}{4\pi r^2} \cdot \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \frac{dp}{dm} = - \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{Gm}{4\pi r^2} \int dm$$

$$\underbrace{\int_0^M \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{dp}{dm} dm}_{(*)} = - \underbrace{\frac{1}{3} \int_0^M \frac{Gm}{r} dm}_{\text{grav. pot. en.}}$$

$$(*) \Rightarrow \int_0^M \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{dp}{dm} dm = \int_{p_c}^{p_{\text{povr.}}} V dp = [V \cdot p] \Big|_{p_c}^{p_{\text{povr.}}} - \int_0^V p dV =$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 p_{\text{povr.}} - \int_0^V p dV = + \frac{1}{3} W_g$$

↓
Za zvezdo v celoti $p_{\text{povr.}} = 0 \Rightarrow - \int_0^V p dV = + \frac{1}{3} W_g$

Za notranjo zvezdo $\Rightarrow \frac{4}{3} \pi r^3 p(r) - \int_0^{V(r)} p dV = - \frac{1}{3} \int_0^{M(r)} \frac{Gm}{r} dm$

Splošna oblika V.T.

$$- \int_0^V p dV = \frac{1}{3} W_g$$

$$- 3 \int_0^V p dV = W_g$$

$$- 3 \int_0^M \frac{p}{g} dm = W_g$$

Povprečen tlak

$$\int_0^V p dV = -\frac{1}{3} \frac{W_g}{V}$$

Virialni teorem za idealni plin

$$p = nkT = \frac{\rho}{\mu m_p} kT \quad \frac{W_n}{\mu m_p} = u = \frac{3}{2} \frac{kT}{\mu m_p} = \frac{3}{2} \frac{p}{\rho}$$

$$W_u = \frac{3}{2} kT \int_0^M \frac{p}{\rho} dm = -2 \int_0^M u dm = -2W_n$$

$$\boxed{-2W_n = W_g}$$

Ocena ~~statistične~~ povprečne temperature:

$$W_g = -\alpha \frac{GM^2}{R}; \quad \alpha \sim 1$$

$$\bar{T} = \frac{\int T dm}{M}$$

$$W_n = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_p} \int_0^M T dm = \frac{3k}{2\mu m_p} M \bar{T}$$

Povprečna temperatura

$$+2 \frac{3}{2} \frac{k}{\mu m_p} M \bar{T} = + \frac{GM^2}{R}$$

$$\Rightarrow \bar{T} = \frac{GM}{3Rk \mu m_p} \sim 4 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Neka povprečna temp za Zvezdo/Sonce
ki ohranja HS.

za
Sonce

Kvečjemu spodnja meja za Srednjo
temperaturo.

Virialni teorem za splošno enačbo stanja

$$u = \hat{\phi} \frac{P}{\rho}$$

konst.

$\phi = \frac{3}{2}$ za idealni plin

$\phi = 3$ za relativistične delce/fotoni

$\phi < 3$ Zvezda je vezana

$$-3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = W_g$$

$$-\frac{3}{\phi} W_n = W_g$$

$$-3 \frac{\phi}{\phi} \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = W_g$$

$$\Rightarrow W_n = -\frac{\phi}{3} W_g$$

Celotna energija zvezde

Ne hitrosti delcev plina ampak "bulk motion" plina (recimo konvekcija)

$$W_{\text{tot}} = W_g + W_n + W_{\text{kin}}$$

Če ni notranjega vira proizvodnje (jedrske reakcije):

$$L = -\frac{dW_{\text{tot}}}{dt} > 0$$

Zvezda se pri izgubi energije zaradi virialnega teorema Segreva.

Uporabimo V.T

$$L = -\frac{1}{2} \frac{dW_g}{dt} \rightarrow \frac{dW_g}{dt} = -2L < 0$$

krčenje + segrevanje

$$L = \frac{dW_n}{dt} > 0$$

Če imamo notranji vir proizvodnje:

$$L = L_j = -\frac{dW_j}{dt}$$

termično ravnovesje (tisto kar balansira jedrske reakcije)

$$\frac{dW_{\text{tot}}}{dt} = 0$$

$$\frac{dW_n}{dt} = 0$$

$$\frac{dW_g}{dt} = 0$$

Časovne skale zvezdne evolucije

dinamična $\tau_d = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 0,02 \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^{3/2} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{1/2}$ dni

↳ perturbacija HS ravnovesja

(npr. čas da se zvezda sesede)

termična $\tau_t = \frac{W_n}{L} = \frac{|W_g|}{2L} \approx 1,5 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R}\right) \left(\frac{L_\odot}{L}\right)$ let

↳ perturbacija termičnega ravnovesja

jedrski $\tau_j = \frac{W_j}{L} = \frac{\eta f M c^2}{L} \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{L_\odot}{L}\right)$ let

f delci mase vključena v reakciji (10% za sonce)

⇒ Zvezda je večino življenja v HS in T ravnovesju. Jedrske reakcije so tiste, ki določajo hitrost zvezdne evolucije.

Lokalno termodinamično ravnovesje

$$l \ll d_{LTE} \ll R_*$$

↑
povprečna
razdalja
med delci

↑
radij
zvezde

Kolikšna je sprememba temperature (Sonce)?

$$l = \frac{1}{\alpha \rho} \left(= \frac{1}{\rho \kappa} \right)$$

↓
Koefficient neprozornosti $\frac{m^2}{kg}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} &= 1,4 \text{ g/cm}^3 \\ \kappa_{es} &= 0,4 \text{ cm}^2/\text{g} \end{aligned} \right\} l = 1 \text{ cm}$$

↑
electron scattering

$$\Delta T \sim \frac{dT}{dr} l \approx \frac{T_c}{R} l \approx \frac{10^7 \text{K}}{10^8 \cdot 7 \text{m}} 10^{-2} \text{m} \approx 10^{-4} \text{K}$$

LTDQ $T_{\text{gas}}(r) = T_{\text{rad}}(r) = T(r)$

TR $W_{\text{tot}} = \text{konst.}$

$$L = L_j$$

Enaiba stanja

$$P = P(g, T, \kappa_i)$$

a) idealen plin

$$n(p)dp = \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} \underbrace{4\pi p^2 dp}_{\text{Volumen}}$$

Tlak: $v = \frac{p}{m}$; p je gibalna

Tlak $\rightarrow P = \frac{1}{3} \frac{n}{(2\pi mkT)^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{p^2}{m} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} 4\pi p^2 dp = nkT$

$P = nkT$

b) Mešanica idealnega plina

$$P_{\text{gas}} = P_{\text{ion}} + P_{\text{electron}} =$$

$$= \sum_i P_i + P_e = \left(\sum_i n_i + n_e \right) kT$$

Po elementih
Znotraj
Zvezde

masni

delci?

$$n_i = \frac{X_i \rho}{A_i m_H}$$

$$(m_i = A_i m_H)$$

masna
števila
elementa

↑
atomska
masa

$$n_{\text{ion}} = \sum_i \frac{X_i \rho}{A_i m_H} = \frac{1}{\mu_{\text{ion}}} \frac{\rho}{m_H}$$

↑ Povprečna masa v atomskih
enotah mase

$$\Rightarrow P_{\text{ion}} = \frac{1}{\mu_{\text{ion}}} \frac{\rho kT}{m_H}$$

$$n_e = \sum_i z_i n_i = \sum_i \frac{z_i X_i}{A_i} \frac{\rho}{m_H} = \frac{1}{\mu_e} \frac{\rho}{m_H}$$

naboj $z_i e$

$$\Rightarrow P_e = \frac{1}{\mu_e} \frac{\rho kT}{m_H}$$

Primer: Zvezda iz H in He, ki je popolnoma ionizirana

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_i \frac{Z_i X_i g}{A_i m_H} =$$

$$H: Z_H = A_H = 1$$

$$He: A_{He} = 2Z_{He}$$

$$= X_H \cancel{m_H} + \frac{1}{2} X_{He} \cancel{m_H} = (*)$$

Običajno definiramo: $X_H \equiv X$ masni delci vodika

$X_{He} \equiv Y$ masni delci helija

$X_{...} \equiv Z$ masni delci preostalih

$$(*) = \left(X + \frac{1}{2}(1-X) \right) = \frac{1+X}{2}$$

Za Sonce: $X = 0,7 \Rightarrow \mu_e \approx 1,18$

Doma vaja:

Izpelji $\mu(X, Y, Z)$
popolnoma ion. plin

$$A_i \approx 2Z_i \approx 2(Z_i + 1)$$

V splošnem:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_{ion}} + \frac{1}{\mu_e} = \sum_i \frac{(1+Z_i)X_i}{A_i}$$

Heisenbergov princip nedoločnosti

1D: $\Delta x \Delta p_x \gg h$

Zanima nas povezava z

3D: $\Delta V \Delta p \gg h^3$

$\mathcal{N}(p) dp$

Upoštevati moramo število kvantnih stanj:

$$g(p) dp = \underbrace{g_s}_{\text{intrinzično št. stanja delcev}} \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp$$

intrinzično št. stanja delcev

Pauli

in moramo upoštevati vrste delcev (Heisenberg velja za fermione).

$\int d^3p$ to samo kot v 1D
in 2D

Za fermione:

$$f_F(\epsilon_p) = \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \tilde{\mu})/kT} + 1} \leq 1$$

↑
Energija

Porazdelitev po
gibalnih količinah

Za bozone pa ne velja Paulijevo načelo: $\tilde{\mu}$ je kemijski

$$f_B(\epsilon_p) = \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \tilde{\mu})/kT} - 1} > 1$$

Degeneracija elektronov

$$n(p)dp = \frac{2 \cdot 4\pi p^2 dp}{h^3} \cdot \frac{1}{e^{(\frac{p^2}{2mkT} - \frac{\tilde{\mu}}{kT})} + 1}$$

Očitno je res
Bohr-Sommerfeld da
lahko fazni prostor
integriramo kjub
diskretizaciji stanj
(Torej je to kvantni fazni
prostor)

Glej na ppt graf porazdelitve (črtana je Maxwell-Boltzmann, polna črta pa še kvantni efekti)

Pri visokih temperaturah je mang različna, pri nizkih temperaturah se pa porazdelitev po gibalnih količinah elektronov zelo spremeni.

V primeru $T=0$ pride do popolne degeneracije elektronov, kjer maksimalno gibalne količine označimo s p_F (Fermijeva gibalna količina). Razliho naredi

številska gostota.

Popolna degeneracija pri elektronih

$$p \leq p_F$$

$$n_e(p) = \frac{8\pi p^2}{h^3}; \quad p \leq p_F$$

$$n_e(p) = 0; \quad p > p_F$$

$$\int_0^{P_F} n_e(p) dp = n_e = \int_0^{P_F} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{P_F^3}{3}$$

Torej lahko izrazimo:

$$P_F = \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{1/3} h$$

Spomnimo se od prej za
tlačno velja:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} p v n(p) dp$$

a) Nerelativistična limita

$$v = \frac{p}{m_e}$$

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{P_F} \frac{p^2}{m_e} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp = \frac{1}{3} \frac{8\pi}{m_e h^3} \frac{P_F^5}{5} = \frac{1}{5 \cdot 3} \frac{8\pi}{m_e h^3} \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{5/3} h^5 =$$

$$= \frac{1}{5 \cdot 3} \frac{(8\pi)^{-2/3}}{m_e} \frac{2/3}{3} h^2 n_e^{5/3} = \frac{h^2}{20 m_e} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} n_e^{5/3} \quad ; \quad n_e = \frac{\rho}{\mu_{eM}}$$

Konst.

$$P_e = K_{NR} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}$$

Nonrelativistic

b) Relativistični primer

$$v = c$$

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{P_F} p \cdot c \cdot \frac{8\pi p^2}{h^3} dp = \frac{8\pi c}{3h^3} \cdot \frac{P_F^4}{4} = \frac{8\pi c}{3h^3} \left(\frac{3n_e}{8\pi} \right)^{4/3} \frac{h^4}{4} =$$

$$= \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} n_e^{4/3}$$

Konst.

$$P_e = K_R \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}$$

Relativistic

Sevalni tlak

V resnici je tlak v zvezdi: $P = P_{ion} + P_e + P_{rad}$

Fotoni so bozoni in su torej porazdeljeni po Bose-Einsteinovi porazdelitvi.

Dodamo še ~~sevanje~~
tlak sevanja

$$n(p) dp = \frac{2}{h^3} 4\pi p^2 \frac{1}{e^{E_p/kT} - 1} dp$$

$$E_p = h\nu = pc$$

Planckova:

$$n(\nu) d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$n = \int_0^{\infty} n(p) dp = bT^3$$

$\hookrightarrow b = 20,3 \text{ cm}^{-3} \text{ K}^{-3}$

$$u_{rad} = \int_0^{\infty} E_p n(p) dp = \int_0^{\infty} p \cdot c n(p) dp = aT^4$$

\downarrow
gostota
sevalne
energije

Sevalna konstanta

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15 h^3 c^3}$$

$$\Rightarrow P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$$

In še od prej:

$$P_{ion} = \frac{\beta}{\mu_{ion} m_H} kT$$

$$P_e = \frac{\beta}{\mu_e m_H} kT$$

OZl.:

$$P_{e,NR} = K_{NR} \left(\frac{\beta}{\mu_e} \right)^{5/2}$$

$$P_{e,R} = K_R \left(\frac{\beta}{\mu_e} \right)^{4/2}$$

Pogosto se zapiše: $P = \underbrace{P_{ion} + P_e}_{P_{gas}} + P_{rad} = P_{gas} + P_{rad}$

$$P_{gas} = \beta P$$

β ... delci tlaka, ki ga prispeva plin

$$P_{rad} = (1 - \beta)P$$

Pri manjših (lahkih) zvezdah pride blizu $\beta \approx 1$, pri masivnih zvezdah pa postane nekoliko tlak višji.

Adiabatni eksponent

$$du + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

u ... notranja energija na enoto mase

$$u = \phi \frac{p}{\rho} \uparrow$$

$$\Rightarrow \phi \frac{1}{\rho} dp + \phi p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

$$\phi \frac{1}{\rho} dp + (1 + \phi) p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0$$

$$(1 + \phi) p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\phi \frac{1}{\rho} dp$$

$$\frac{(1 + \phi)}{-\phi} \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\frac{1}{\rho}} = \frac{dp}{p}$$

$$\frac{(1 + \phi)}{-\phi} d\left(\ln \frac{1}{\rho}\right) = d(\ln p)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{1}{\rho} \left(\frac{\phi + 1}{-\phi} \right) = \ln p + C$$

↑
obrnemo ln

Tako dobimo:

$$\ln \rho \left(\frac{\phi+1}{\phi} \right) = \ln p + C$$

$$p \propto \rho^{\frac{\phi+1}{\phi}} \text{ Adiabatsni eksponent } \gamma_a$$

Primeri:

$\gamma_a = 5/3$ nerelativistični idealni plin, popolnoma degeneriran plin

$\gamma_a = 4/3$ Sevanje, relativistični degeneriran plin

Sahova enačba

Z njeno pomočjo razvijemo gostoto ionov/neutralnih gradnikov.

n_0 (neutralni atomi)

Stopnja ionizacije X :

$$X = \frac{n_+}{n_0 + n_+}$$

Št. ioniziranih

vs. delci

n_+ (ioni)

n_e (prosti elektroni)

$$\frac{n_+ n_e}{n_0} = \frac{g}{h^3} (2\pi m_e kT)^{3/2} e^{-X/kT}$$

Sahova enačba

X ionizacijska energija
(en. da odstranimo elektron)

$$p = nkT = (n_0 + n_+ + n_e)kT = \left(\frac{n_0 + n_+}{n_0 + n_+} + \frac{n_e}{n_0 + n_+} \right) kT (n_0 + n_+) =$$

$$n_e = n_+ = \underline{\underline{(1+X)kT(n_0 + n_+) = p}}$$

Mogoče uporabno pri kalbi nalogi:

$$\frac{X^2}{1-X^2} = \frac{g}{h^3} (2\pi m_e)^{3/2} \frac{(kT)^{5/2}}{p} e^{-X/kT}$$

V primeru delne ionizacije:

$$\gamma \frac{n_+}{g} = \gamma \frac{n_+}{(n_0 + n_+) m_H} = \gamma \frac{x}{m_H}$$

$$u = \frac{3}{2} \frac{p}{g} + \gamma \frac{x}{m_H}$$

Zanima nas povezava med adiabatskim eksponentom in stopnjo ionizacije:

$$\frac{d+1}{d} \ln g \propto \ln p$$

$$\gamma_a \ln g \propto \ln p \Rightarrow \gamma_a \propto \frac{\ln p}{\ln g}$$

$$du + p d\left(\frac{1}{g}\right) = 0$$

Pri Zakon termodinamični (za adiabatske procese)

$$\frac{3}{2} \frac{1}{g} dp + \frac{3}{2} p d\left(\frac{1}{g}\right) + \frac{\gamma}{m_H} \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\gamma}{m_H} \frac{\partial x}{\partial g} dg + p d\left(\frac{1}{g}\right) = 0 \quad \left| \cdot \frac{g}{p} \right.$$

$$d\left(\frac{1}{g}\right) = -\frac{1}{g^2} dg$$

$$\frac{3}{2} \frac{dp}{p} + \frac{3}{2} g d\left(\frac{1}{g}\right) + \frac{\gamma}{m_H} g \frac{\partial x}{\partial p} \frac{dp}{p} + \frac{\gamma}{m_H} \frac{g^2}{p} \frac{\partial x}{\partial g} \frac{dg}{g} + g d\left(\frac{1}{g}\right) = 0$$

$$\left[\frac{3}{2} + \frac{\gamma}{m_H} g \frac{\partial x}{\partial p} \right] \frac{dp}{p} - \frac{3}{2} \frac{dg}{g} + \frac{\gamma}{m_H} \frac{g^2}{p} \frac{\partial x}{\partial g} \frac{dg}{g} - \frac{dp}{g} = 0$$

$$\left[\frac{3}{2} + \frac{\gamma}{m_H} g \frac{\partial x}{\partial p} \right] \frac{dp}{p} - \left[\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{m_H} \frac{g^2}{p} \frac{\partial x}{\partial g} \right] \frac{dg}{g} = 0 \quad (*)$$

Od prej: $p m_H = (1+x) (n_0 + n_+) g T m_H = (1+x) g g T$

$$\Rightarrow \frac{g}{m_H} = \frac{p}{(1+x) g T} \quad \frac{g}{p} = \frac{m_H}{(1+x) g T}$$

$$(*) \Rightarrow \left[\frac{3}{2} + \frac{\gamma}{(1+x) g T} \frac{\partial x}{\partial p} \right] \frac{dp}{p} = \left[\frac{5}{2} - \frac{\gamma}{(1+x) g T} \frac{\partial x}{\partial g} \right] \frac{dg}{g} \quad \gamma_a \propto \frac{\ln p}{\ln g}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{d(\ln p)} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{d(\ln g)}$

↓ se lahko polazi

$$\gamma_a(x) = \frac{5 + \left(\frac{5}{2} + \frac{\gamma}{g T}\right)^2 x(1-x)}{3 + \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\gamma}{g T}\right)^2\right] x(1-x)}$$

Malo primeri:

$$x=0 \quad \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right\} \gamma_a = \frac{5}{3}$$

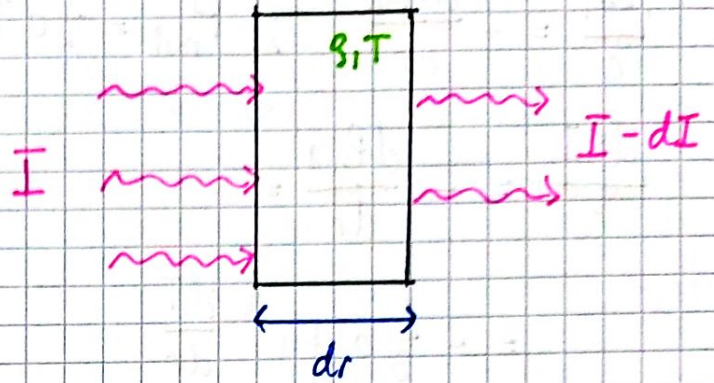
$$\gamma_{a, \min} = 0,5$$

$$\frac{\gamma}{g T} = 1 \rightarrow 1,63$$

$$\frac{\gamma}{g T} = 10 \rightarrow 1,21$$

Sevalni prenos

I ... intenziteta $[I] = \frac{\text{Energija}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$



$$dI = -\sigma I_0 dr$$

↳ Koefficient neprozornosti

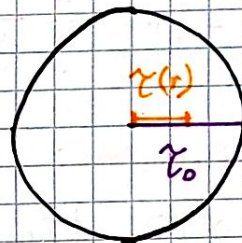
$$\frac{dI}{I} = -\sigma dr \Rightarrow \underline{I(r) = I_0 e^{-\sigma r}} \quad \underline{\sigma = \sigma_0 g^a T^b}$$

$\frac{1}{\sigma g}$ = karakteristična dolžina absorpcije/sipanja

Optična globina

$$d\tau = -\sigma g dr$$

$$I(r) = I_0 e^{-(\tau_0 - \tau(r))}; \quad \tau_0 > \tau(r)$$



Na palugi optične globine določamo tudi zvezdni radij (kjer je meja):

$$-\int_0^R \sigma g dr \approx \underline{1} \quad (\text{snov izven zvezde je prozorna})$$

Oblež rodika

Interakcije:

- Sipanje elektronov
 - abs. prosto-prosto
 - fotoionizacija
 - abs. vezano-vezano
- Compton, Thomson
- Dominantni znotraj zvezd
- $$\sigma \approx \frac{1}{2} \sigma_0 (1 + X)$$
- $$\sigma \approx \frac{1}{2} \sigma_0 (1 + X) \left\langle \frac{Z^2}{A} \right\rangle g^T^{-7/2}$$

$$\frac{|dT|}{c} = -\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} \quad ; \quad P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4$$

$$\frac{\kappa_B I}{c} = -\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} =$$

$$= -\frac{1}{3} a 4 T^3 \frac{dT}{dr}$$

$$I = -\frac{c a 4 T^3}{\kappa_B 3} \frac{dT}{dr}$$

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{4}{3} \frac{a c T^3}{\kappa_B} \frac{dT}{dr}$$

Izsev pri nekem
radiju

$$L(r) = -4\pi r^2 \frac{4}{3} \frac{a c T^3}{\kappa_B} \frac{dT}{dr}$$

Zanima nas opis temperature:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa_B}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}$$

Oz. ker smo rekli, da bi gledali na enoto mase:

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa_B}{T^3} \frac{L}{(4\pi r^2)^2}$$

Če ostane:

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 g} \quad \frac{dp}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad \frac{dL}{dm} = q$$

Če dodamo še neklo
enacbo

$$p \propto g^x$$

lahko rešimo ločeno

Politropni modeli

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} / \cdot \frac{r^2}{\rho} \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -G \frac{dm}{dr}$$

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} = -Gm$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -G 4\pi r^2 \rho / : r^2$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (*)$$

Politropna enačba stanja:

$$P = K \cdot \rho^\gamma$$

Politropni indeks n : → konstanta.

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}$$

Tako je:

$$\frac{dp}{dr} = K \rho^\gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr}$$

$$n: \quad (*) \Rightarrow K \rho \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^2}{\rho} \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho$$

$$\cancel{K} \frac{1}{r^2} K \frac{1+n}{n} \frac{1}{r^2} \left(r^2 \rho^{-1} \rho^{1/n} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho$$

Politropni zvezdni modeli (znova/ponovno prejšnje vse)

Povežemo kontinuitetno in hidrostatično enačbo.

Dodamo še enačbo stanja.

Torej:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho \frac{Gm}{r^2} / \cdot \frac{r^2}{\rho}$$

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} = -Gm \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -G \frac{dm}{dr}$$

Politropni indeks n :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}$$

deg. plin et. $\gamma = 5/3$ (nerel.)

$\gamma = 4/3$ (relativističen)

$$P = K \rho^\gamma \quad (\text{ni odvisnosti od temperature})$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{g} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dp}{dr} = k \gamma g^{\gamma-1} \frac{dg}{dr}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{g} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi \rho$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{g} k \gamma g^{\gamma-1} \frac{dg}{dr} \right) = -4\pi \rho$$

$$K \left(\frac{1+\gamma}{\gamma} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 g^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{dg}{dr} \right) = -4\pi G \rho$$

$$K \left(\frac{1+\gamma}{\gamma} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{g^{\frac{n-1}{n}}} \frac{dg}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (*)$$

Rešitev $\rho(r)$ in li bo veljala na območju $0 \leq r \leq R$ imenujemo Politrop.
Potrebujemo še dva robna pogoja:

$$\bullet r = R \rightarrow \rho(R) = 0$$

$$\bullet r = 0 \rightarrow \frac{d\rho}{dr} = 0$$

Novi spremenljivki:

$$\rho = \rho_c \theta^n; \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\rho^{\frac{n-1}{n}} = \rho_c^{\frac{n-1}{n}} \theta^{n-1} \quad \text{in} \quad \frac{d\rho}{dr} = \rho_c n \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr}$$

$$(*) \Rightarrow K \left(\frac{1+\gamma}{\gamma} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho_c^{\frac{n-1}{n}} \theta^{n-1}} \rho_c n \theta^{n-1} \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G \rho_c \theta^n$$

$$\frac{(n+1)K}{r^2 \rho_c^{\frac{n-1}{n}}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -4\pi G \theta^n$$

Novi spremenljivki:

$$r = \alpha \xi$$

$$dr = \alpha d\xi$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)K}{4\pi G \rho_c^{\frac{n-1}{n}}} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right) = -\theta^n$$

$$\frac{1}{\alpha^2 \rho_c^2} \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\alpha^2 \xi^2}{\alpha} \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

Dobimo:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

Lank-Emdenova enačba
za politropni indeks n

• $\theta = 1$ pri $r = 0$

• $\frac{d\theta}{d\xi} = 0$ pri $\xi = 0$

Analično je možno rešiti za $n = 0, 1, 5$

Ostale numerično

$n = 5 \rightarrow$ nestacionarna zvezda

$$R = \alpha \xi_1$$

Prva ničla določene funkcije

Masa politropne zvezde

Uporabimo L-E enačbo.

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr = \int_0^{\xi_1} 4\pi \alpha^2 \xi^2 \rho_c \theta^n \alpha d\xi =$$

$$= - \int_0^{\xi_1} 4\pi \alpha^3 \rho_c \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) d\xi =$$

$$= - 4\pi \alpha^3 \rho_c \left[\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right]_{\xi=\xi_1}$$

Povezave med lastnostmi

~~Središčna / in / povprečna / gostota~~

• Središčna in povprečna gostota

$$\rho_c = \bar{\rho} = \rho_n \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}; \quad \rho_n = - \left[\frac{3}{\xi_1} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right) \right]_{\xi=\xi_1}^{-1}$$

• Masa in radij

$$\frac{M}{-\xi_1^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi_1}} = - 4\pi \rho_c \left(\frac{R}{\xi_1} \right)^3$$

$$\frac{R^2}{\xi_1^2} = \frac{\alpha^2 \xi_1^2}{(n+1)k} = \frac{4\pi G \rho_c R^2}{(n+1)k}$$

$$\rho_c = \left[\frac{(n+1)k}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{\xi_1}{R} \right)^{\frac{2n}{n-1}}$$

$$\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{n-1} \left(\frac{R}{R_n}\right)^{3-n} = \frac{[(n+1)K]^n}{4\pi G} ; \quad \mu_n = -\xi_1^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) \Big|_{\xi_1}$$

$$R_n = \xi_1$$

Pri $n=3$:

$$M = 4\pi M_3 \left(\frac{K}{\pi G}\right)^{3/2}$$

Pri $n=1$

$$R = R_1 \left(\frac{K}{2\pi G}\right)^{1/2}$$

Za $1 < n < 3$:

$$R^{3-n} \propto \frac{1}{M^{n-1}}$$

Primer bele ptičarke (nerelativistični degenerirani elektroni)

$$\gamma = 5/3 \rightarrow n = 1,5 \Rightarrow R \propto M^{-1/3}$$

Ponovitev od zadnje [Politropni modeli]

① Središnja gostota - povprečna gostota

② masa - radij

$$\left(\frac{GM}{M_n}\right)^{n-1} \left(\frac{R}{R_n}\right)^{3-n} = \frac{[(n+1)K]^n}{4\pi G} ; \quad \mu_n = -\xi_1^2 \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right) \Big|_{\xi_1}$$

$$R_n = \xi_1$$

$n=3$ M

$n=1$ R

$1 < n < 3$ $R^{3-n} \propto \frac{1}{M^{n-1}}$

③ ~~Središnji tlak in središnja gostota~~

Naziv:

Središnji tlak in Središčna gostota

$$P_c = \frac{(4\pi G)^{1/n}}{n+1} \left(\frac{GM}{M_n} \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{R}{R_n} \right)^{\frac{3-n}{n}} \rho_c^{\frac{n+1}{n}}$$

Izrazimo R z enačbo od prej. Vse kar imo indeks n spravimo v konstanto

$B_n \Rightarrow$

$$P_c = (4\pi)^{1/3} B_n G M^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

Pimer: [Nalmerelativističnih elektronov v Beli patliharli]

$$P_{e,NR} = K_1 \rho^{5/3} \quad \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow n = 1,5 \quad \Rightarrow R \propto M^{-1/3}$$

$$\bar{\rho} \propto M^2$$

Masa se veča, ko se radij manjša. Dokler ne rotajo elektroni relativistični, takrat se spremeni enačba stanja v $\propto \rho^{4/3}$ in imamo ravnino $n=3$. Takrat lahko izračunamo maso. Maso, ki jo izračunamo je Chandrasekharjeva masa!

$$M_{ch} = \frac{M_\odot \sqrt{1,5}}{4\pi} \left(\frac{hc}{G m_H^{4/3}} \right)^{3/2} \mu_e^{-2}$$

$$= 5,83 \mu_e^{-2} M_\odot \xrightarrow{\mu_e = 2 \text{ (elektroni)}} M_{ch} = 1,46 M_\odot$$

Eddingtonov izsev

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3}{4ac} \frac{\rho \beta}{T^3} \frac{L}{4\pi r^2} \quad P_{rad} = \frac{1}{3} a T^4$$

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = \frac{4}{3} a T^3 \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4aT^3} \frac{dP_{rad}}{dr} = - \frac{3\rho\beta}{4acT^3} \frac{L}{4\pi r^2} \Rightarrow \frac{dP_{rad}}{dr} = - \frac{\rho\beta}{c} \frac{L}{4\pi r^2}$$

Uporabimo še enačbo hidrostatičnega ravnovesja: $\frac{dP}{dr} = - \frac{Gm\beta}{r^2}$

To lahko zdelimo in zapišemo:

$$\Rightarrow \frac{dP_{\text{rad}}}{dP} = \frac{\kappa L(m)}{4\pi Gmc} < 1$$

Oboje pada, ko gremo h večjemu radiju

Tako dobimo pogoj za seravno ravnovesje:

$$\kappa L < 4\pi Gmc$$

V bližini zvezdnega središča nastaja energija:

$$\frac{dL}{dm} = \left[\begin{array}{c} q \\ \downarrow \\ q_c \end{array} \right]$$
$$\frac{L}{m} \rightarrow q_c$$

Specificna energija, tvorjena na enoto mase.

Tako lahko pogoj zapišemo še na drug način:

$$\frac{L}{m} < \frac{4\pi cG}{\kappa}$$

↓

$$q_c < \frac{4\pi cG}{\kappa}$$

Omejitev za specifično energijo. Določa največji možen nastanek energije na enoto mase, da bo zvezda v seravnem ravnovesju (prenaša energijo s sevanjem)

Če velja seravno ravnovesje tudi na površju pri $L(M) = L$ lahko

zapišemo:

$$L < \underbrace{\frac{4\pi cGM}{\kappa}}_{L_{\text{edd}}}$$

Electron Scattering

$$L_{\text{edd}} = 3,2 \cdot 10^4 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{\kappa_{\text{es}}}{\kappa} \right) L_{\odot}$$

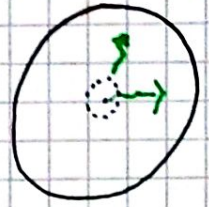
Standardni model (Eddingtonov model)

$L = \text{konst.}$

bolje definiramo:

$$\frac{L(m)}{m} = \eta \frac{L}{M}$$

$$\eta = 1 \quad (m = M)$$



$$\Rightarrow L(m) = \eta m \left(\frac{L}{M} \right)$$

η se veča, ko se m manjša

η se veča, ko gremo razven

razmerje bomo lahko zapisali kot:

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dP} = \frac{L}{4\pi c GM} \approx \eta$$

Predpostavimo; da se kompenzirata:

$$\eta = \text{konst.} = \kappa_s$$

Prozornost na površju
($\kappa_s = \text{standard}$)

$$\Rightarrow P_{\text{rad}} = \frac{L}{4\pi c GM} \kappa_s P$$

Vidimo, da se ubistvu razmerje tlakov ohranja: $\frac{P_{\text{rad}}}{P} = \beta + 1 = 1 - \beta$; $\beta = \frac{P_{\text{gas}}}{P}$

Zapišimo še izsev:

$$L = \frac{4\pi c GM}{\kappa_s} (1 - \beta) = L_{\text{Edd}} (1 - \beta)$$

$$L = L_{\text{Edd}} (1 - \beta)$$

$$\frac{P_{\text{rad}}}{1 - \beta} = P = \frac{P_{\text{gas}}}{\beta} \Rightarrow \frac{1}{3} \frac{dT^4}{(1 - \beta)} = \frac{g \kappa_T}{\beta \mu m_H}$$

$$\Rightarrow T = \left[\frac{4\beta^3 (1 - \beta)}{\beta \mu m_H a} \right]^{1/3} g^{1/3}; \quad P \propto g T^4 \quad \frac{4}{3} \Rightarrow n = 3$$

~~Ket/ij~~

$$\Rightarrow P = K g^{4/3}$$

$$L \rightarrow K = \left[\frac{3 \kappa_B^4}{a (\mu m_H)^4 \beta^4 (1 - \beta)} \right]^{1/3}$$

$n = 3$

$$1 - \beta = 0,003 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^2 \mu^4 \beta^4$$

Polinom 4. stopnje za β

Masa se zjeda preprosto
kot m_\odot .

Torej če zapišemo $(1-\beta)$ in damo v relacijo za izsev:

$$\frac{L}{L_{\text{Edd}}} = 0,003 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \mu^4 \beta^4$$

Če vstavimo L_{Edd} dobimo Mass-Luminosity relation za zvezde glavne

veje:

Če bi imeli samo
Sveto prenos!
(kar ni res)

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{4\pi G c}{\kappa} \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} 0,003 \mu^4 \beta^4 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} \propto \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3$$

Prispava L
v vspečnosti
glavne veje HR.

$$\frac{L}{L_{\odot}} \propto \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\alpha}$$

$\alpha \in [3, 3.5]$

Hitrost jedrskih reakcij

Sipalna paršina
delca

← σ

v →

Hitrost delca, ki
bojo interagirali

(Ubitstvo relativna hitrost
in potem in redukcija mas)

↳ Maxwell-Boltzmann distribution

$$\propto e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Razdalja na katero se lahko zblizata nabita delca (dobljeno iz el. pot.
in energije in kinetične) je:

$$d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_i Z_j e^2}{\frac{1}{2} m v^2}$$

Druga verjetnost za potek spajanja v odvisnosti od v pa je izračun Gamov

$$\propto e^{-\frac{D Z_i Z_j e^2}{\epsilon_0 h v}}$$

Narediti moramo produkt teh dveh porazdelitev. Zanima nas pravzaprav odvisnost
od temperature. grat na ppt

$$q = q_0 g T^n$$

nastanek energije
na enoti mase

Verige p-p ← Izgorevanje vodika

pp I pp II

pp III

$$Q_{pp} = 26,73 \text{ MeV}$$

Potrebuje: $(1,3 \text{ do } 2) \cdot 10^7 \text{ K}$

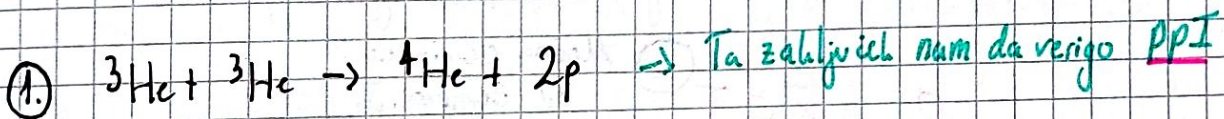
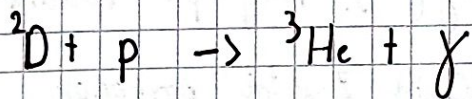
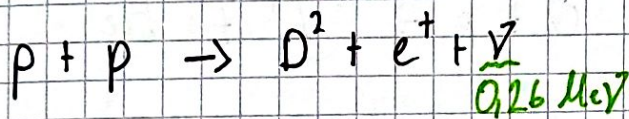
$> 3 \cdot 10^7 \text{ K}$

↑ Energija sproščena pri tvorbi
energije ${}^4\text{He}$ ($4p \rightarrow {}^4\text{He}$)

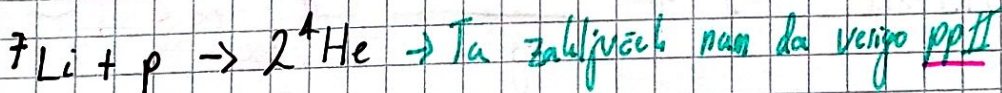
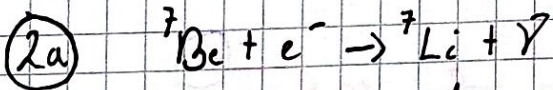
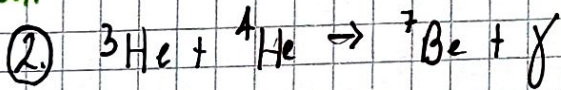
Ololi 2%.
tega odnesejo nevtrini

$$\Rightarrow q = 6 \cdot 10^{14} \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

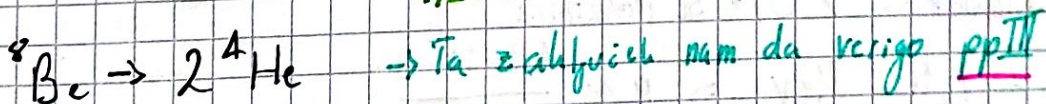
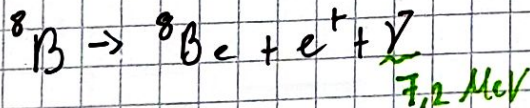
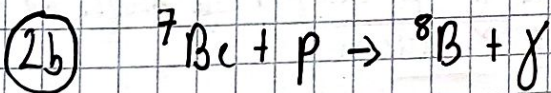
$$q_{pp} \propto \rho T^4$$



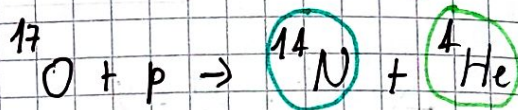
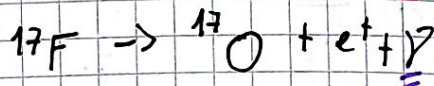
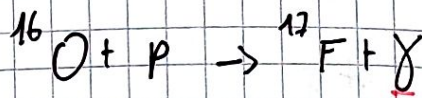
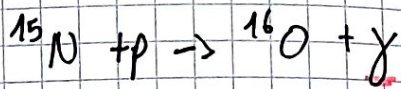
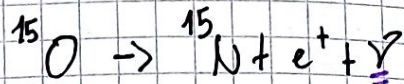
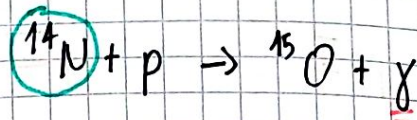
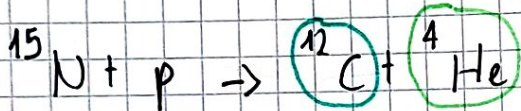
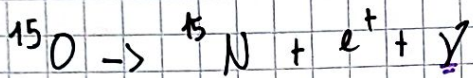
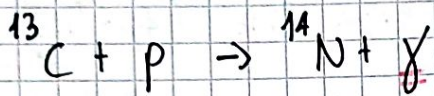
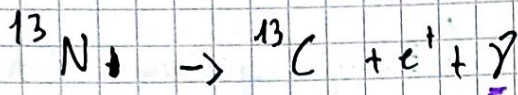
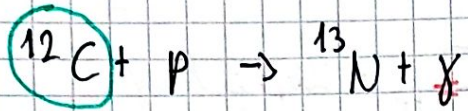
ali



ali



• CNO cikel



Beta razpadi so neodvisni od T (zunanjih pogojev). Torej pri velikih T beta razpadi narekujejo hitrost reakcij, sicer pa zajetje protonov.

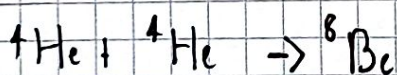
$$q_{\text{CNO}} \propto gT^{16}$$

Močna odvisnost od temperature

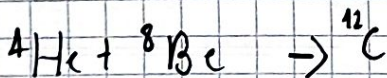
Gorenje Helija (Trojni alfa proces)

$$\Delta E = 7,275 \text{ MeV} \Rightarrow q \sim \frac{5,8 \cdot 10^{13} \text{ J}}{\lg}$$

$$q_{3\alpha} \propto g^2 T^{40}$$

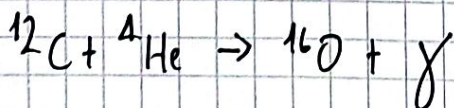


$\tau =$ zelo kratel a pri dovolj T je manjši od τ_{α} za tla $Z \propto$ delcem



Če še (~~12C~~ C \rightarrow O) + še dodatnih:

$$\Delta E = 7,162 \text{ MeV} \Rightarrow q \sim \frac{4,3 \cdot 10^{13} \text{ J}}{\lg}$$



Proces je lahko še dalje:

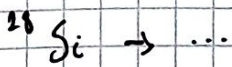
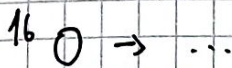
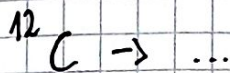
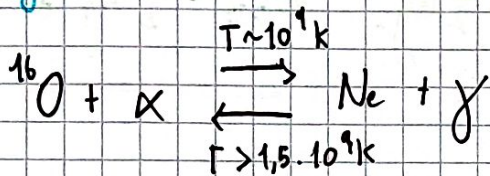


Foto desintegracija:



Stabilni na fotodesintegracijo so Fe, Co, Ni. Obratni proces (t.j. z γ in desintegracijo) se zgodi šele pri zelo visokih $T \geq 7 \cdot 10^9 \text{ K}$.

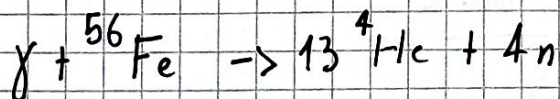
Nastanek parov $e^- e^+$

Šele pri ~~visokih~~ $T \sim 1,2 \cdot 10^{10} \text{ K}$ (oz. prej ampak manj verjetno).

Možen je tudi obraten proces $e^- + e^+ \rightarrow \gamma$

Razpad jeter železa

Se zgodi, ko pride do fotodesintegracije. Moramo dovesti energijo (γ) da se to izvede:



$T > 7 \cdot 10^9 \text{ K} \rightarrow$ Postane helij celo bolj zastopan v domaćih nastanku železa.

Zgornja in spodnja meja

$$T > 10^6 \text{ K}$$

$$T < 10^9 \text{ K}$$

Stabilnost zvezd

Termična stabilnost

Virialni teorem: $3 \int \frac{P}{\rho} dm = -W_g$

• Če zanemarimo sevalni tlak:

$$u_{\text{gas}} = \frac{3}{2} \frac{P_{\text{gas}}}{\rho} \quad W_n = -\frac{1}{2} W_g \quad W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} W_g = -W_n$$

• Ne zanemarimo sevalni tlak:

$$u_{\text{gas}} = \frac{3}{2} \frac{P_{\text{gas}}}{\rho} \quad u_{\text{rad}} = 3 \frac{P_{\text{rad}}}{\rho} \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{P_{\text{gas}}}{\rho} + \frac{P_{\text{rad}}}{\rho} = \frac{2}{3} u_{\text{gas}} + \frac{1}{3} u_{\text{rad}}$$

$$W_n = -\frac{1}{2} (W_g + W_{\text{rad}})$$

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{2} (W_g + W_{\text{rad}}) = -W_n$$

Tlak sevanja zmanjša gravitacijski privlek

Efektivna gravitacijska

potencialna energija

$$\frac{dW_{\text{tot}}}{dt} = L_{\text{jedro}} - L$$

Pogoj za termično ravnovesje (za id. plin?)

V termičnem ravnovesju: $L_{\text{jedro}} = L$; $\frac{dW_{\text{tot}}}{dt} = 0$

Kaj se zgodi če pride do perturbacije $L_{\text{jedro}} > L$?

$$\frac{dW_{\text{tot}}}{dt} > 0 \Rightarrow -\frac{dW_n}{dt} > 0 \quad \frac{dW_n}{dt} < 0$$

Radius se poveča, povp. temp. se zmanjša.
Hitrost reakcij se zmanjša \rightarrow L_{jedro} manjše

Nestabilnost za degeneriran plin (Fukui odnosi od Terman od 1)

- Nove (eksplozije na površju belih patliharh)

$$\frac{dP_c}{P_c} = \frac{4}{3} \frac{d\rho_c}{\rho_c}$$

Pri politropnih enačbah:

$$P_c = (4\pi)^{1/3} B_n G M^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

V splošnem:

$$\frac{dP_c}{P_c} = a \frac{d\rho_c}{\rho_c} + b \frac{dT_c}{T_c}; \quad a, b \geq 0$$

(ideal gas $a=b=1$)

$$\left(\frac{4}{3} - a\right) \frac{d\rho_c}{\rho_c} = b \frac{dT_c}{T_c}$$

• $a < \frac{4}{3}$ redčenje spremlja hlajenje

~~zgoščevanje spremlja segrevanje~~

• $a > \frac{4}{3}$ in $0 < b \leq 1$
(degeneriran plin)

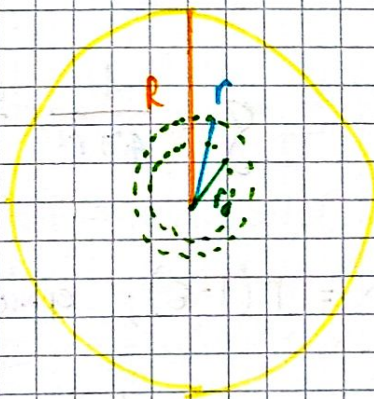
redčenje spremlja segrevanje
to povzroča L_p dro \Rightarrow eksplozija
(odvisno od b) \downarrow

V resnici se dodatne kompleksnosti

Nestabilnost tanke lupine

$\Delta m, T, \beta$

debelina lupine: $l = r - r_0 \ll R$



Potekajo
je določa
reakcije

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \beta q, \quad \frac{dL}{dm} = q$$

V HS ravnovesju:

$$\frac{dP}{dr} = -\beta \frac{Gm}{r^2}, \quad \frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \Rightarrow \frac{dP}{dm} \propto \frac{1}{r^4}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{\rho} = -4 \frac{dr}{r}$$

$$\Delta m = 4\pi r_0^2 L \rho$$

$$\frac{dg}{g} = - \frac{dl}{l} = - \frac{dr}{r} \frac{r}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \frac{dr}{r} = \frac{l}{r} \frac{dg}{g}$$

$$\frac{dp}{p} = 4 \frac{l}{r} \frac{dg}{g}$$

$$\frac{dp}{p} = a \frac{dg}{g} + b \frac{dT}{T} \rightarrow \left(\frac{4l}{r} - a \right) \frac{dg}{g} = b \frac{dT}{T}$$

- Stabilnost $a < \frac{4l}{r}$
 Če je lupina zelo tanka $\frac{l}{r} \rightarrow 0$ in ρ more ohraniti ravnovesje \Rightarrow eksploziji (tako so lahko nove na površju).

Dinamična stabilnost

$$\frac{dp}{dm} = - \frac{Gm}{4\pi r^4}; \quad r(m)$$

$$P(m) = \int_m^M \frac{Gm}{4\pi r^4} dm \quad g = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dm}{dr}$$

radialno
kretanje

(perturbacija)

$$r' = r - \epsilon r = r(1 - \epsilon); \quad \text{epsilon je majhen } \epsilon \ll 1$$

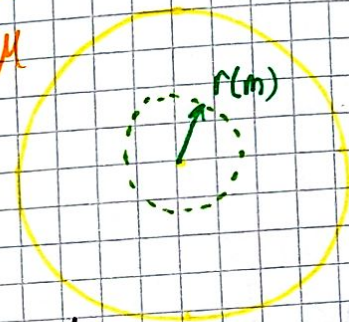
$$g' = \frac{1}{4\pi r^2 (1 - \epsilon)^2} \frac{dm}{dr} \frac{dr}{dr'} = \frac{g}{(1 - \epsilon)^2} \frac{dr}{dr'}$$

$$= \frac{g}{(1 - \epsilon)^3} \approx g(1 + 3\epsilon)$$

Upoštevamo, da je kretanje adiabatno in zanemarljivo sevalni tlak:

$$p \propto g \gamma_a \rightarrow p'_{\text{nov}} = p(1 + 3\epsilon) \gamma_a \approx p(1 + 3\epsilon \gamma_a)$$

$$(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$$



$$P'_h = \int_M^M \frac{Gm \, dm}{4\pi r^2 (1-\epsilon)^2} \approx \rho(1+4\epsilon) \quad \text{hidrostatsko ravn.}$$

Da se povrne v ravnovesje: $P' > P'_h$

$$\rho(1+3\epsilon\gamma_a) > \rho(1+4\epsilon)$$

Pogoj za dinamično stabilnost: $\gamma_a > \frac{4}{3}$

• Če ima zvezda povsod $\gamma_a > \frac{4}{3}$ je dinamično stabilna.

• Če ima zvezda kje $\gamma_a \leq \frac{4}{3}$ je dinamično nestabilna ko je

$$\int (\gamma_a - \frac{4}{3}) \frac{\rho}{g} \, dm < 0$$

• Če ima zvezda v dovolj širokem jedru $\gamma_a < \frac{4}{3}$ je dinamično nestabilna (ρ/g je velik)

• Če ima zvezda $\gamma_a < \frac{4}{3}$ v ovojnici je zvezda lahko še dinamično stabilna.

• Nestabilnost pri rel. deg. plinu elektronov

$\rho \propto g^{4/3}$ smo ravno na meji stabilnosti

• Nestabilnost pri zvezdah s prevlado srebrnega tlaka

$$\beta = \frac{P_{\text{gas}}}{P} \quad \text{kot } \beta \rightarrow 0 \quad \text{g.e. } \gamma_a \rightarrow \frac{4}{3}$$

$$U_{\text{gas}} = \frac{3}{2} \frac{P_{\text{gas}}}{g}$$

$$U_{\text{rad}} = 3 \frac{P_{\text{rad}}}{g} \rightarrow 3 \int_0^M \frac{P}{g} \, dm = -W_g = W_{\text{rad}}$$

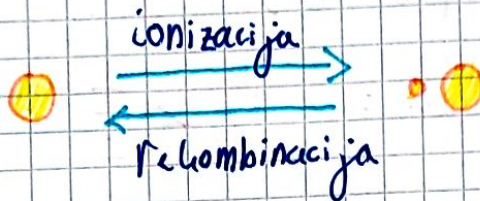
$$\int U_{\text{rad}} \, dm = W_{\text{rad}}$$

$$W_{\text{tot}} = W_g + W_{\text{rad}} = 0$$

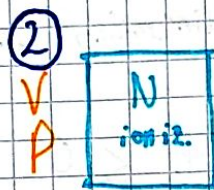
Zvezda ni vezana!!

Primeri dinamične nestabilnosti: $\gamma_a \leq \frac{4}{3}$

- relativistični degeneriran plin elektronov
- V zvezdi prevlada sončni tlak
- procesi ionizacije



Kaj se dogaja z γ_a ?



• idealni plin $P \propto \frac{N}{V}$

Kaj se zgodi ko zmanjšamo volumen $V' < V$?

① tlak se poveča $\frac{N}{V'} > \frac{N}{V}$

② $N' < N \Rightarrow \frac{N'}{V'} < \frac{N}{V}$
sist. ① sist. ②

$P = K \rho \gamma_a$

Spomnimo se: $X = \text{stopnja ionizacije} = \frac{n_+}{n_0 + n_+}$

$$\gamma_a(X) = \frac{5 + \left(\frac{5}{2} + \frac{X}{uT}\right) X(1-X)}{3 + \left[\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{X}{uT}\right)^2\right] X(1-X)}$$

Za popolnoma ioniziran plin:

$uT \approx 10X$

$\gamma_a < \frac{4}{3}$ za $0.05 - 0.95$

Ionizacijska
energija

interval za X

V teh primerih dinamična nestabilnost

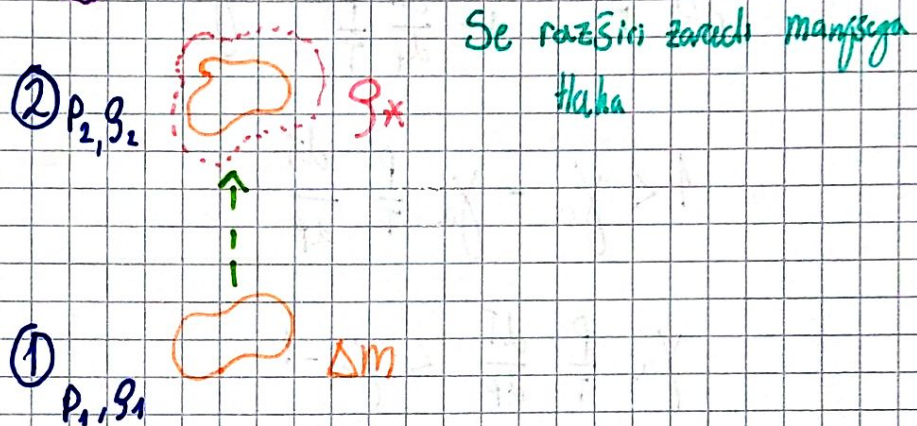
Konvekcija

Izraz za Eddington

$$\kappa L(r) < 4\pi G c m(r)$$

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3}{4ac} \frac{\kappa g}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 g \rho \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Proizvodnja energije} \\ \text{pri jedrskih reakcijah} \end{array}$$



$\rho_x > \rho_2$: Se vrne v začetno lego (1) (stabilna situacija)

$\rho_x < \rho_2$: Oblak lahko potuje naprej (nestabilna situacija / konvektivno gibanje)

Pogoj konvektivne stabilnosti $\left(\frac{d\rho}{dS}\right)_{\text{zvezda}} < \left(\frac{d\rho}{dS}\right)_a \quad \Big| \cdot \frac{\rho}{P}$

adiabatsko

$$P = K \rho^\gamma$$

$$\frac{dP}{dS} = \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dS} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

$$\frac{\rho}{P} \left(\frac{d\rho}{dS}\right)_{\text{zvezda}} < \frac{\rho}{P} \left(\frac{d\rho}{dS}\right)_a = \gamma_a$$

$\Rightarrow \gamma < \gamma_a$ pogoj za stabilnost

Predpostavimo za idealni plin (brez sevalnega tlaka):

$$\frac{dp}{p} = \frac{dg}{g} + \frac{dT}{T} \quad /: \frac{dp}{p}$$

$$1 = \frac{dg}{dp} \frac{p}{g} + \frac{dT}{dp} \frac{p}{T}$$

$$\frac{dp}{dg} \frac{g}{p} = \frac{1}{1 - \frac{dT}{dp} \frac{p}{T}} < \gamma_a$$

$$1 < \gamma_a - \gamma_a \frac{p}{T} \frac{dT}{dp}$$

$$\gamma_a \frac{p}{T} \frac{dT}{dp} < \gamma_a^{-1}$$

$$\left(\frac{dT}{dp} \right) < \frac{T}{p} \frac{\gamma_a^{-1}}{\gamma_a} \quad (*)$$

Oz. raje imamo dT/dr :

$$\cancel{\left| \frac{dT}{dr} \right|} \quad \left| \frac{dT}{dr} \right| < \frac{\gamma_a^{-1}}{\gamma_a} \frac{T}{p} \left| \frac{dp}{dr} \right|$$

↓
Zgornja meja za grad. T preden
se začne konvekcija

Od prej imamo:

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3}{4ac} \frac{\partial g}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}$$

$$\frac{dp}{dr} = - g \frac{6m}{r^2}$$

To želimo vstaviti v enačbo (*)

$$\Rightarrow \left(\frac{dT}{dr} \frac{dr}{dp} \right) \cdot \frac{P}{T} < \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a}$$

$$- \frac{3}{4ac} \frac{\partial \beta}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \left(- \frac{r^2}{\beta Gm} \right) \cdot \frac{P}{T} < \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a}$$

$$L(r) < \left(\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} \right) \frac{4a \cdot T^4}{3\rho} 4\pi c Gm$$

$$\beta = \frac{P_{\text{gas}}}{P}$$

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P} = 1 - \beta$$

$$L(r) < \left(\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} \right) 4 \frac{P_{\text{rad}}}{P} 4\pi c Gm$$

$$L(r) < \left[\left(\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a} \right) 4 (1 - \beta) \right] 4\pi c Gm$$

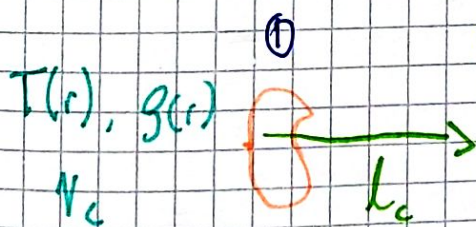
< 1

$$< 4\pi c Gm$$

~~Konduktivni prenos energije (mixing length)~~

Konduktivni prenos energije (dolžina mešanja / mixing length)

Količina pot prepotuje obkrah plina, predno se poravnava z okolščino.



$$\delta p = 0$$

$$\delta T = \left(\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{vezde}} - \left| \frac{dT}{dr} \right|_a \right) l_c$$

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_a = \frac{T}{P} \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_a \frac{dp}{dr}$$

$$= \frac{T}{P} \frac{dT}{T} \frac{P}{dp} \frac{dp}{dr}$$

$$\Rightarrow \delta T = \frac{T}{p} \left[\left(\frac{d \ln T}{d \ln p} \right)_{\text{zvezde}} - \left(\frac{d \ln T}{d \ln p} \right)_a \right] \frac{dp}{dr} l_c$$

Parameter dolzine mcsanya:

$$\alpha = \frac{l_c}{p / (dp/dr)} = \frac{l_c}{\rho / \rho_0 g} \quad \frac{dp}{dr} = -\rho g$$

Karakteristična dolzina

Konvektivni toplotni tok:

$$H_c = v_c c_p \rho \delta T$$

$$v_c = \sqrt{g' l_c} = \sqrt{g \left| \frac{\delta \rho}{\rho} \right| l_c}$$

$$= \sqrt{\alpha \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) l_c}$$

$$\Rightarrow H_c = \rho c_p T \left[\left(\frac{d \ln T}{d \ln p} \right)_{\text{zvezde}} - \left(\frac{d \ln T}{d \ln p} \right)_a \right]^{\frac{3}{2}} \alpha^2 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

Atmosfera zvezd

Specifična intenziteta

Prostorski: kot $d\Omega = d\theta d\phi \sin\theta$

Specifična energija:

$$E_\lambda = \frac{\partial E}{\partial \lambda}$$

Energija:

$$E_\lambda d\lambda$$

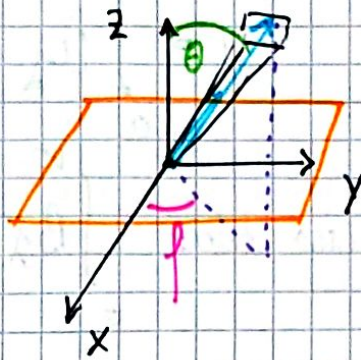
$$I_\lambda = \frac{E_\lambda d\lambda}{d\lambda dt dA \cos\theta d\Omega}$$

površina v smeri poharja žarke

$$[I_\lambda] = \frac{W}{m^2 sr}$$

steradian

$$[I_\nu] = \frac{W}{m^2 Hz sr}$$



Prosječna intenziteta

$$\langle I_\lambda \rangle = \frac{1}{4\pi} \int I_\lambda d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\lambda \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\frac{dt}{c} = \frac{dL}{c \cos\theta}$$

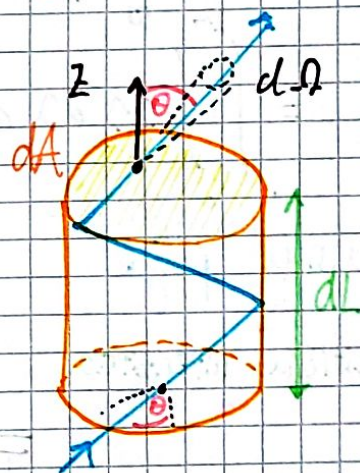
$$E_\lambda d\lambda = I_\lambda dt d\lambda dA \cos\theta d\Omega = I_\lambda d\lambda \frac{dL dA}{c \cos\theta} d\Omega \cos\theta$$

Specifična gostota energije

$$\Rightarrow \frac{E_\lambda d\lambda}{dL dA} = \frac{I_\lambda d\lambda d\Omega}{c}$$

$$u_\lambda d\lambda = \frac{I_\lambda}{c} d\lambda d\Omega = \frac{1}{c} \int I_\lambda d\lambda d\Omega = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I_\lambda \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow u_\lambda d\lambda = \frac{1}{c} \langle I_\lambda \rangle 4\pi d\lambda = \frac{4\pi}{c} \langle I_\lambda \rangle d\lambda$$



$$u = \int_0^{\infty} u_{\lambda} d\lambda$$

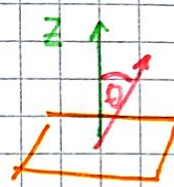
Za črno telo: $\int_0^{\infty} B_{\lambda} d\lambda = \frac{\sigma T^4}{\pi}$

Za črno telo:

$$u = \frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} B_{\lambda} d\lambda = \frac{4\pi}{c} \frac{\sigma T^4}{\pi} = \left(\frac{4\sigma}{c}\right) T^4 = a T^4$$

Specifični sevalni tok F_{λ}

Tok samo v pravokotni smeri



Sevalna konstanta

$$[F_{\lambda}] = \frac{W}{m^2}$$

$$F_{\lambda} d\lambda = \int_{\Omega} I_{\lambda} d\lambda \cos\theta d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_{\lambda} d\lambda \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi$$

Opis sevalnega polja

I_{λ} specifična intenziteta

$$E_{\lambda} d\lambda = I_{\lambda} d\lambda dt dA \cos\theta d\Omega$$

$$\bar{I}_{\lambda} = \frac{E_{\lambda} d\lambda}{d\lambda dt dA \cos\theta d\Omega} \quad [I_{\lambda}] = \frac{W}{m^2 m sr}$$

1. Poseben primer spec intenzitete: Planckova funkcija B_{λ}
2. I_{λ} ostaja konstantna vzdolž žarke

$\langle I_{\lambda} \rangle$ povprečna intenziteta

Povprečimo po vseh smereh

$$\langle I_{\lambda} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int I_{\lambda} d\Omega$$

1. V primeru izotropnega sevalnega polja: $\langle I_{\lambda} \rangle = I_{\lambda}$

u_λ Specifična gostota energije

$$u_\lambda d\lambda = \frac{4\pi}{c} \langle I_\lambda \rangle d\lambda$$

$$[u_\lambda] = \frac{J}{m^3 m}$$

1. Za izotropno sevalno polje bo: $u_\lambda d\lambda = \frac{4\pi}{c} I_\lambda d\lambda$

↑
Valovna dolžina
($\lambda \sim \lambda d\lambda$)

u gostota energije $[u] = \frac{J}{m^3}$ (energija na volumen)

$$u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda$$

1. Za primer črnega telesa:

$$u = \frac{4\sigma T^4}{c}$$

$$\text{Velja: } \int_0^\infty B_\lambda d\lambda = \frac{\sigma T^4}{\pi}$$

F_λ Specifični sevalni tok

F Sevalni tok

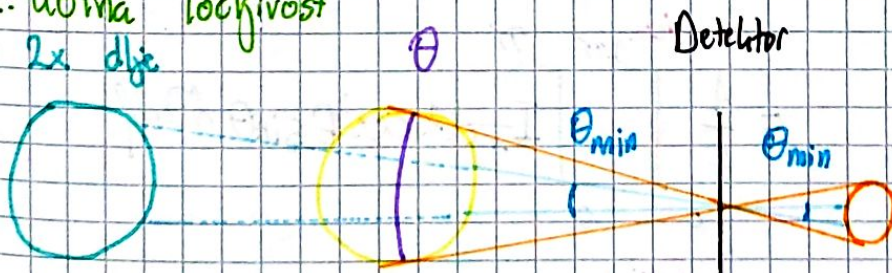
$$F_\lambda d\lambda = \int I_\lambda d\lambda \cos\theta d\Omega$$

$$[F] = \frac{W}{m^2}$$

1. V primeru izotropnega sevanja: $F_\lambda = 0$

Kaj merimo je odvisno od kotne ločljivosti.

θ_{min} ... kotna ločljivost
Isti objekt 2x dlje



V primeru $\theta > \theta_{min}$ merimo specifično intenziteto.

2x večja razdalja

$$j \propto \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4r_0^2}$$

$$d\Omega \propto 4 d\Omega_0$$

Večja razdalja
ampak zaobjemamo
tudi večji kot

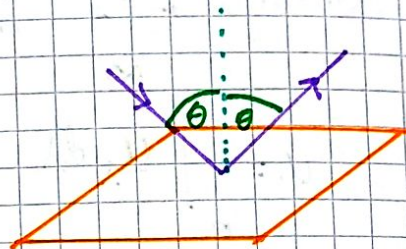
Specifična intenz
je konstantna

V primeru $\theta < \theta_{\min}$ pa merimo **Sevalni tok**.



V tem primeru smo zajeli vsa svetlobo iz objekta (ne moremo vzeti še večje površine) in zato sevalni tok res pada s kvadratom razdalje.

$P_{\text{rad}, \lambda}$ ^{specifični} sevalni tok



$$P_{\lambda} = \frac{E_{\lambda}}{c}$$

$$E_{\lambda} d\lambda = I_{\lambda} d\lambda dA \cos^2 \theta d\Omega$$

$$[P_{\lambda, u} - P_{\lambda, z}] d\lambda = \Delta P_{\lambda} d\lambda =$$

$$= \left[\frac{E_{\lambda}}{c} \cos \theta - \left(-\frac{E_{\lambda}}{c} \cos \theta \right) \right] = \frac{2 E_{\lambda} d\lambda \cos \theta}{c} =$$

$$= \frac{2}{c} I_{\lambda} d\lambda dt dA \cos^2 \theta d\Omega$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P_{\lambda} d\lambda}{dt dA} \Rightarrow P_{\text{rad}, \lambda} d\lambda = \frac{2}{c} \int I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta d\Omega$$

1. Za izotropno sevanje (gre v vse smeri enako) velja:

$$1. \quad P_{\text{rad}, \lambda} d\lambda = \frac{1}{c} \int I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta d\Omega =$$

$$2. \quad = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_{\lambda} d\lambda \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

$$1. \quad \Rightarrow P_{\text{rad}, \lambda} d\lambda = \frac{4\pi}{3c} I_{\lambda} d\lambda$$

Prad

Sevalna tlaka

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{\infty} P_{\text{rad},\lambda} d\lambda$$

1. Za črno telo velja:

$$P_{\text{rad}} = \int_0^{\infty} \frac{4\pi}{3c} I_{\lambda} d\lambda = \frac{4\pi}{3c} \int_0^{\infty} B_{\lambda} d\lambda = \frac{4\pi}{3c} \cdot \frac{3T^4}{\pi}$$

$$\Rightarrow P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} \left(\frac{4\sigma}{c}\right) T^4 = \frac{1}{3} a T^4$$

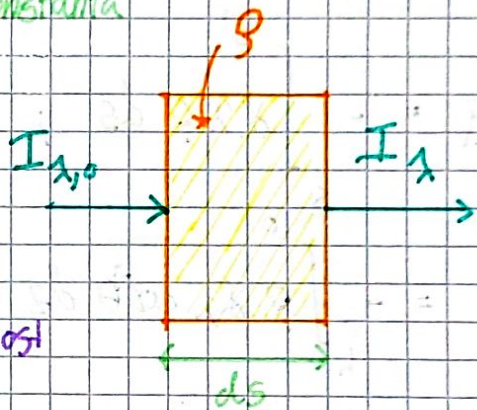
Stefanova konstanta

Neprozornost

$$dI_{\lambda} = -\kappa_{\lambda} \rho I_{\lambda} ds$$

κ_{λ} absorpcijski koeficient/neprozornost (monokromatska)

$$[\kappa_{\lambda}] = \frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$$



Optična globina

$$\tau = \frac{1}{\kappa_{\lambda} \rho} = \frac{1}{n \beta_{\lambda}}$$

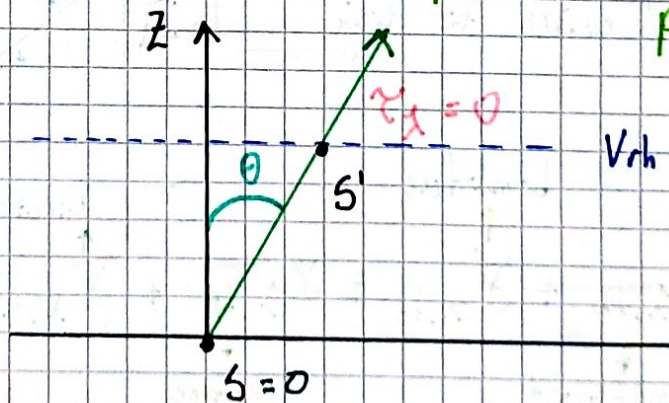
porpčna pot fotona

$$d\tau_{\lambda} = -\kappa_{\lambda} \rho ds$$

opazovalec

razdalja vzdolž poti fotona

1.) Zračni zvezde



Vrh atmosfere zvezde

$$\Delta\tau_{\lambda} = \tau_{\lambda,0} - \tau_{\lambda,z} =$$

$$= \int_0^{s'} -\kappa_{\lambda} \rho ds$$

$$\Rightarrow \tau_{\lambda,z} = \int_0^{s'} \kappa_{\lambda} \rho ds; I_{\lambda} = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda}}$$

$\gamma_\lambda \gg 1$ Optično gost plin
 $\gamma_\lambda \ll 1$ Optično redek plin

Odvisno od λ
 (lahko redek za optično in gost za X-ray kot zemljina atmosfera)

2.) Zemljina atmosfera

$I_\lambda \xrightarrow{0} I_{\lambda,0}$

$d\tau_\lambda = -\alpha_\lambda g ds$

$\int_{\tau_\lambda}^0 d\tau_\lambda = - \int_s^{s'} \alpha_\lambda g ds ; -ds = -\cos\theta dz$

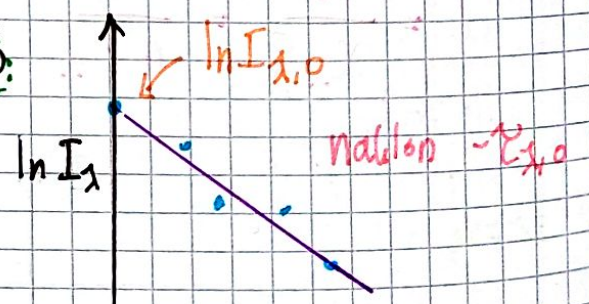
$= - \int_h^0 g \alpha_\lambda \cos\theta dz = \int_0^h \alpha_\lambda g \cos\theta dz = \tau_{\lambda,0} \frac{1}{\cos\theta}$
 pri $\theta = 0^\circ$

$I_\lambda = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda,0} \frac{1}{\cos\theta}}$

↳ iz poznane amplitude lahko pogledamo pri dveh različnih θ .

$\ln I_\lambda = \ln I_{\lambda,0} - \tau_{\lambda,0} \frac{1}{\cos\theta}$

Merimo to dvojje



Neproznosti

$\alpha_\lambda = \alpha_{\lambda,bb} + \alpha_{\lambda,bf} + \alpha_{\lambda,ff} + \alpha_{\lambda,es} + \alpha_{\lambda,H^-}$
 (bound-bound) (bound-free) (free-free) (electron scattering) (hydrogen ion)

free-free (kontinuum spektra)

Pogleda v vročih zvezdah

hladne zvezde

Rosselandova povprečna neprozornost

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa} \frac{\partial B}{\partial T} dV}{\int_0^\infty \frac{\partial B}{\partial T} dV}$$

$$\bar{\kappa}_{bf} \propto g T^{-3.5}$$

Kramerjev zakon
(Boltzmannov zakon (varnostne neprozornosti))

$$\bar{\kappa}_H \propto g^{1/2} T^9$$

$\log \kappa$

ionizacija
H in He

$$\propto g g T^{-3.5}$$

visji g

el. sipanje

$$\vec{d} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \dots$$

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = \sum_{i,j=1}^N \vec{l}_i \cdot \vec{l}_j$$

$$d^2 = N l^2 + l^2 [\underbrace{\cos \Theta_{12} + \dots}_{N \gg 1 \rightarrow 0}]$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{N} l$$

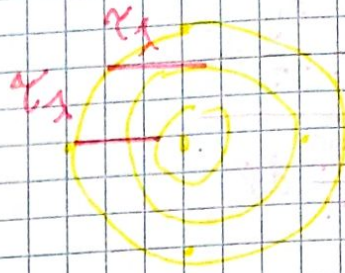
$$d = \tau_{\lambda} l = \sqrt{N} l \Rightarrow N = \frac{\tau_{\lambda}^2}{l^2}$$

Optična globina za foton, ki začne svojo potovanje iz zvezde $\tau_{\lambda} \approx \frac{2}{3}$ $\tau_{\lambda} \approx 1$
Območje s katerega gledamo fotone

Definicija
Zvezdne
fotosfere $\tau_{\lambda} \approx \frac{2}{3}$

Primer 1: Ravná zatemiť

Debelina listov: 0.1%. R_{zvezde}



2. Primer: absorpcijska črta

$$\tau_x = \int \kappa_\lambda \rho ds$$

$\kappa_\lambda \uparrow$ $s \downarrow$ } hladnejša območja

→ absorpcijska črta

$$\frac{dP_{rad}}{dr} = - \frac{\kappa_\lambda \rho}{c} P_{rad}$$

Enačba sevalnega prenosa

$$dI_\lambda = - \kappa_\lambda \rho ds I_\lambda \quad ; \quad \text{abs koeficient} \quad \text{emijix} \quad L_j I = \frac{M}{s^3 sr}$$

$$dI_\lambda = \underbrace{j_\lambda(\lambda)} \rho ds \quad \neq 0$$

$$dI_\lambda = \kappa_\lambda \rho I_\lambda ds + j_\lambda \rho ds \quad / \quad (- \kappa_\lambda \rho ds)$$

$$- \frac{dI_\lambda}{ds \kappa_\lambda \rho} = I_\lambda = - \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda} \quad \text{source function } S_\lambda \quad \text{(funkcija izvora)}$$

Enačba sevalni opis]

$$\rightarrow - \frac{dI_\lambda}{ds \kappa_\lambda \rho} = I_\lambda - \frac{j_\lambda}{\kappa_\lambda}$$

$$I_\lambda - S_\lambda > 0$$

$$I_\lambda - S_\lambda < 0$$

$$\frac{dI_\lambda}{ds} < 0$$

$$\frac{dI_\lambda}{ds} > 0$$

$$\Rightarrow I_\lambda = B_\lambda = S_\lambda$$

TDR (črna telesa)

Primer:

$$T_{ext} \rho = 0$$

$$B, S_1, K_L$$

$g = \text{const}$

$\frac{dI_1}{ds}$

$$\frac{dI_1}{ds} \frac{1}{\omega_1 s} = I_1 - I_1 \quad \rightarrow \quad -\frac{dI_1}{ds} \frac{1}{\omega_1 s} = L \cdot x$$

$$\frac{dI_1}{ds} = -\frac{1}{\omega_1 s} (I_1 - S_1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \omega_1 s ds \quad \Rightarrow \quad \ln(x)(s) \quad | \quad \ln(x-s) = -\omega_1 s$$

~~$\ln(x) \ln(x-s)$~~

$$x = I_1 \cdot S_1$$

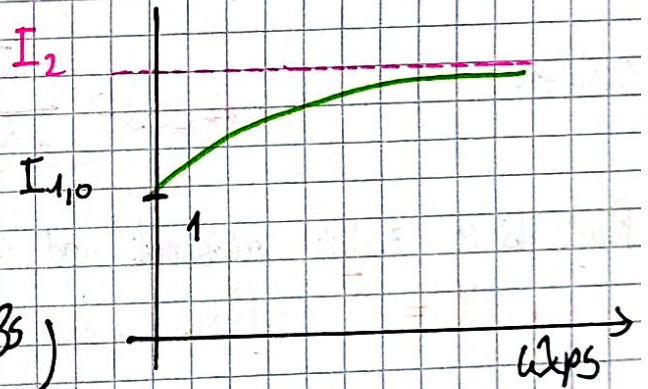
$$dx = dI_1 \cdot S_1$$

$$\frac{x(s)}{x(s=0)} = e^{-\omega_1 s}$$

$$\Rightarrow I_1 - S_1 (I_{1,0} - S_1) e^{-\omega_1 s}$$

$$I_1 = S_1 (I_{1,0} + S_1) e^{-\omega_1 s} + S_1$$

$$I_1 = I_{1,0} e^{-\omega_1 s} + S_1 (1 - e^{-\omega_1 s})$$



Enačba sevalnega prenosa

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda$$

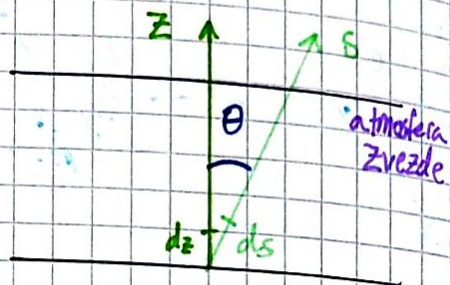
Funkcija izvora
(source function)

$$S_\lambda = \frac{j_\lambda}{k_\lambda}$$

Vertikalna optična globina

$$\tau_{\lambda, v} = \int_z^0 k_\lambda \rho ds$$

(for fotona)



$$dz = \cos\theta ds$$

$$\tau_\lambda > \tau_{\lambda, v}$$

$$\tau_\lambda = \frac{\tau_{\lambda, v}}{\cos\theta}$$

Tako lahko enačbo sevalnega prenosa prepisemo v novo ekvivalentno

Obliko:

$$\cos\theta \frac{dI_\lambda}{d\tau_{\lambda, v}} = I_\lambda - S_\lambda$$

Radi bi se znebili odvisnosti od λ . Privzamemo:

- $k = \bar{k}$ (Rosselandova neprozornost)

Siva atmosfera

- $\tau_{\lambda, v} \rightarrow \tau_v$ (se ne spreminja bistveno z λ)

- Pointegriramo specifično intenziteto $I_\lambda \rightarrow I = \int I_\lambda d\lambda$

- Enako za funkcijo izvora $S_\lambda \rightarrow S = \int S_\lambda d\lambda$

Tem privzetkom parimo Siva atmosfera, ker ni odvisnosti od barve.

1.) Primer 1: Integriramo po celotnem prostorslem kotu

Neodvisna od
kota
↑

$$\cos\theta \frac{dI}{d\Omega} = I - S$$

$$\frac{d}{d\Omega} \int I \cos\theta d\Omega = \int I d\Omega - \int S d\Omega$$

$$F_{\text{rad}} = \langle I \rangle 4\pi - S \cdot 4\pi = 4\pi(\langle I \rangle - S)$$

$$\Rightarrow \frac{dF_{\text{rad}}}{d\Omega} = 4\pi(\langle I \rangle - S)$$

2.) Primer 2: Mnozimo z $\cos\theta$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{d}{d\Omega} \int I \cos^2\theta d\Omega = \int I \cos\theta d\Omega - S \int \cos\theta d\Omega$$

$c \cdot P_{\text{rad}}$

F_{rad}

$$\Rightarrow \frac{dP_{\text{rad}}}{d\Omega} = \frac{F_{\text{rad}}}{c}$$

V sfernih koordinatah se ta enacba glasi: $\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\bar{\kappa} \rho}{c} F_{\text{rad}}$

Ravnovesje med absorpcijo in emisijo

$$F_{\text{rad}} = \text{konst.} = \bar{\kappa} T_{\text{eff}}^4$$

gostota sevalnega toka
na površju

$$\{ \text{1. en.} \} \Rightarrow \frac{dF_{\text{rad}}}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\langle I \rangle = S}}$$

2. en) \Rightarrow Lahko pointegriramo in dobimo:

$$P_{\text{rad}} = \frac{F_{\text{rad}}}{c} \tilde{u}_\nu + C$$

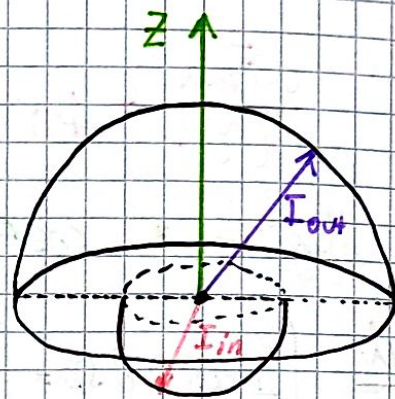
Eddingtonova aproksimacija

Privzamemo:

- Siva atmosfera
- Vzporedni sloji (debelina atmos. $\ll R$ zvezde)
- Kotna odvisnost intenzitete

Robni pogoji na vrhu atmosfere:

$$I_{\text{in}} = 0, \quad \tilde{u}_\nu = 0$$



$$\langle I \rangle = \frac{1}{4\pi} \int I \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \underbrace{(I_{\text{out}} + I_{\text{in}})}_{\substack{\text{Enalho v vse} \\ \text{smerni} \\ \text{(absolutna velikost je to)}}} \sin\theta d\theta d\phi = \frac{(I_{\text{out}} + I_{\text{in}})}{4\pi} \int \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{1}{4\pi} (I_{\text{out}} + I_{\text{in}}) 2\pi \Rightarrow \langle I \rangle = \frac{1}{2} (I_{\text{out}} + I_{\text{in}})$$

Podobno lahko iz definicije sevalnega toka dobimo:

$$F_{\text{rad}} = \pi (I_{\text{out}} - I_{\text{in}})$$

in še za sevalni tlak:

$$P_{\text{rad}} = \frac{2\pi}{3c} (I_{\text{out}} + I_{\text{in}}) = \frac{4\pi}{3c} \langle I \rangle$$

Dodatno predpostavimo, da imamo ravnovesje:

$$\frac{4\pi}{3c} \langle I \rangle = P_{\text{rad}} = \frac{1}{c} F_{\text{rad}} \tilde{\nu}_N + C$$

↑
PoinTEGRIRANA
2. en)

Določimo iz
tobnih pogojev

Na vrhu atmosfere bo veljalo:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} I_{\text{out}} = \frac{F_{\text{rad}}}{2\pi}$$

$$F_{\text{rad}} = \pi I_{\text{out}}$$

Hladi pa na vrhu atmosfere $\tilde{\nu}_N = 0$ in:

$$\frac{4\pi}{3c} \langle I \rangle = \frac{4\pi}{3c} \frac{F_{\text{rad}}}{2\pi} = C \Rightarrow C = \frac{2 F_{\text{rad}}}{3c}$$

Celotna enačba se torej glasi:

$$\frac{4\pi}{3c} \langle I \rangle = \frac{1}{c} F_{\text{rad}} \tilde{\nu}_r + \frac{2}{3} F_{\text{rad}} / c$$

$$\frac{4\pi}{3} \langle I \rangle = F_{\text{rad}} \left(\tilde{\nu}_r + \frac{2}{3} \right)$$

$$F_{\text{rad}} = \text{konst.} = \delta T_{\text{eff}}^4$$

Torej je:

$$\frac{4\pi}{3} \langle I \rangle = \delta T_{\text{eff}}^4 \left(\tilde{\nu}_r + \frac{2}{3} \right)$$

$$\langle I \rangle = \frac{3\delta}{4\pi} T_{\text{eff}}^4 \left(\tilde{\nu}_r + \frac{2}{3} \right)$$

To pa lahko izrazimo iz lokalnega
termodinamičnega ravnovesja, kjer je
funkcija izvora Planckova funkcija

$$\frac{\delta T^4}{\pi} = \Rightarrow \langle I \rangle = S = B$$

Tako lahko dobimo odvisnost temperature od globine

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\gamma + \frac{2}{3} \right)$$

Kdaj $T = T_{\text{eff}}$?

$$\Rightarrow \text{Ko je } \underline{\underline{\gamma = \frac{2}{3}}}$$

Torej v povprečju vidimo v zvezdo do $\gamma = 2/3$.

Robna zatemnitev

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} = I_\lambda - S_\lambda / e^{-\tau_\lambda}$$

$$\frac{dI_\lambda}{d\tau_\lambda} e^{-\tau_\lambda} - I_\lambda e^{-\tau_\lambda} = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda}$$

$$\frac{d}{d\tau_\lambda} (I_\lambda e^{-\tau_\lambda}) = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda}$$

$$\tau_{\lambda,0} : I_\lambda = I_{\lambda,0}$$

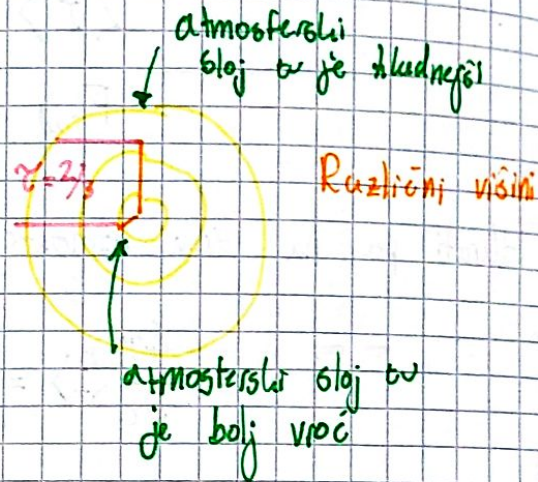
$$\tau_\lambda = 0 : I_\lambda = I_\lambda(0)$$

$$\Rightarrow d(I_\lambda e^{-\tau_\lambda}) = -S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

$$I_\lambda(0) = I_{\lambda,0} e^{-\tau_{\lambda,0}} - \int_{\tau_{\lambda,0}}^0 S_\lambda e^{-\tau_\lambda} d\tau_\lambda$$

Zapišemo τ raje kot:

$$\tau_\lambda \rightarrow \frac{\tau_{\lambda,v}}{\cos \theta}$$



$$\Rightarrow I_{\lambda}(0) = I_{\lambda,0} e^{-\frac{\chi_{\lambda,v,0}}{\cos\theta}} - \int_{\frac{\chi_{\lambda,0}}{\cos\theta}}^0 \frac{S_{\lambda}}{\cos\theta} e^{-\frac{\chi_{\lambda,v}}{\cos\theta}} d\chi_{\lambda,v}$$

Prepostavimo za source function:

$$S_{\lambda} = \underbrace{a_{\lambda}}_{\text{Koefficienta}} + \underbrace{b_{\lambda}}_{\text{Koefficienta}} \chi_{\lambda,v} \quad \text{Linearna odvisnost}$$

Rezultat integrala:

$$I_{\lambda}(0) = a_{\lambda} + b_{\lambda} \cos\theta$$

Robna zatemnitev Sonca

Poglejmo če in kako dobro velja Edingtonove aproksimacija. Prij smo zapisali:

$$\langle I \rangle = S = \frac{\delta T^4}{4\pi} \quad T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\chi_{\lambda} + \frac{2}{3} \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{3\delta}{4\pi} T_{\text{eff}}^4 \left(\chi_{\lambda} + \frac{2}{3} \right)$$

Naj bi veljelo $S = a + b \chi_{\lambda} \Rightarrow a = \frac{\delta}{2\pi} T_{\text{eff}}^4 ; b = \frac{3\delta T_{\text{eff}}^4}{4\pi}$

Tako je rezultat integrala:

$$I(\theta) = a + b \cos\theta$$

To lahko preverimo z razmerjem intenzitet:

$$\frac{I(\theta)}{I(\theta=0^\circ)} = \frac{\frac{\delta}{2\pi} T_{\text{eff}}^4 + \frac{3\delta}{4\pi} T_{\text{eff}}^4 \cos\theta}{\frac{\delta}{2\pi} T_{\text{eff}}^4 + \frac{3\delta}{4\pi} T_{\text{eff}}^4} = \frac{1 + \frac{3}{2} \cos\theta}{5/2} =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cos\theta$$

} Na to so fiteli mentve in se se kar dobro prilegajo

Spektralne črte

Procesi razširitev spektralnih črt

1) Naravna razširitev črt

Heisenbergovo načelo nedoločnosti: $\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t}$

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\text{FWHM: } (\Delta\lambda_{1/2}) \approx \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t_0}$$

Če pogledamo majhno spremembo λ :

$$\Delta E_\gamma = \left| -\frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda \right|$$

$$E_\gamma = E_2 - E_1 \quad \text{napake se seštevajo} \quad \rightarrow \quad \frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda = \frac{h}{2\pi} \left(\frac{1}{\Delta t_f} + \frac{1}{\Delta t_i} \right)$$

$$\Delta E_\gamma = \Delta E_2 \oplus \Delta E_1$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{1}{\Delta t_{fi}} + \frac{1}{\Delta t_{oi}} \right) \quad \begin{array}{l} f \dots \text{final} \\ i \dots \text{initial} \end{array}$$

[Primer H α]

$$\Delta t \approx 10^{-8} \text{ s}$$

elektron v 1. ali 2. vzbujenem stanju vodik

$$\text{H}\alpha: \Delta\lambda = 4,57 \cdot 10^{-5} \text{ nm}$$

$$\lambda = 656,3 \text{ nm}$$

2) Dopplerjeva razširitev črt

$$\text{Dopplerjev pojav: } \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\pm |v_r|}{c}$$

Dobimo
Gaussov profil

$$\text{Razširitev črte: } \Delta\lambda \approx \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \text{masa enega atoma plina}$$

Če luč $\sqrt{m_2}$ za FWHM

[Primer H α]

$$T = 5777 \text{ K}$$

$$\text{H}\alpha: \Delta\lambda = 0,0427 \text{ nm}$$

1000x več kot naravna širina

3) Razširitev črt zaradi tlaka/trki

Dobimo Lorentzov profil

Povprečni čas med trkoma:

$$\Delta t_0 \approx \frac{1}{N} = \frac{1}{n_0 \sqrt{2kT/m}}$$

Razširitev črte:

$$\Delta \lambda \approx \frac{\lambda^2}{c} \frac{1}{\pi \Delta t_0} \approx \frac{\lambda^2}{c} \frac{n_0}{\pi} \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Skupaj te dve razširitvi dajo Voigtov profil.

Ekvivalentna širina

Meri moč
Spektralne
črte

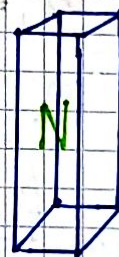
$$EW = \int \frac{F_c - F_a}{F_c} d\lambda = \int \left(1 - \frac{F_a}{F_c}\right) d\lambda$$

F_c - svetlobni tok kontinuuma (torej svetlobni tok brez absorpcije)

Druge definicija: Širina črte na polovični globini (FWHM) $\Delta \lambda_{1/2}$

Stolpčna gostota $N [m^{-2}]$

Število atomov v stolpcu zvezdine
atmosfere, ki ima osnovno ploskev m^2



Število absorberjev N_a

Število atomov, ki absorbirajo fotone

f ... Oscilatorna moč (eff. verjetnost za prehod elektrona)

$f N_a$... efektivno št. atomov, ki povzročijo spektralno črto

EW se spreminja z N_a

Krivulja rasti

- Optično tanki plin: $E W \propto N_A$
- Optično gost plin v središču in črta postane saturirana, v kritih A se počasi niza: $E W \propto \sqrt{\ln N_A}$
- V kritih postaja črta globlja: $E W \propto \sqrt{N_A}$

Določanje N :

- Uporabimo krivuljo rasti
- Izmerimo ekvivalentno širino W
- Določimo N_A
- Uporabimo Boltzmannovo in Schorovo enačbo

Generična krivulja rasti je enotna krivulja rasti za več različnih spektralnih črt, do katerih pride ob prehodu iz istega začetnega stanja.

[Primer: Staljna gostota N_A v soncu] *glej ppt*

$$T = 5800 \text{ K}$$

$$P_e = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$N_a = N_{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$N_{Na} = ?$$

$$\lambda_1 = 330.238 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 588.997 \text{ nm}$$

$$\log_{10} \frac{f N_a \lambda_1}{500 \text{ nm}} = 17.2$$

$$\log_{10} \frac{f N_a \lambda_2}{500 \text{ nm}} = 18.8$$

$$\log_{10} N_a = \log_{10} \left(\frac{f N_a \lambda}{500 \text{ nm}} \right) - \log_{10} \left(\frac{f \lambda}{500 \text{ nm}} \right)$$

$$(\lambda_1) \approx 19$$

$$(\lambda_2) \approx 18.92$$

$$\Rightarrow \log_{10} N_a = 18.96$$

Vzamemo average

To pomeni da v fotosferi na m^2 najdemo 10^{19} NaI (v
 ostanem stanju).

Boltzmannova enačba:
$$e^{-\frac{(E_b - E_a)}{kT}} = e^{-\frac{hc}{\lambda kT}} = \begin{cases} 5,45 \cdot 10^{-14}; \lambda = \lambda_1 \\ 1,48 \cdot 10^{-2}; \lambda = \lambda_2 \end{cases}$$

Sahova enačba:

$$\frac{N_{II}}{N_I} = \frac{2kT Z_{II}}{P_e Z_I} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_I/kT} = 2,43 \cdot 10^3$$

$$Z_I = 2,4 \quad Z_{II} = 1 \quad \chi_I = 5,14 \text{ eV}$$

$$N = N_I + N_{II} = 2431 N_I = 2,43 \cdot 10^{22} m^{-2}$$

$$M_{Na} = 3,82 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Tako imamo, če pogledamo maso

$$\frac{M_{Na}}{m^2} = 9,3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{m^2}$$

$$\frac{M_H}{m^2} = 11 \frac{\text{kg}}{m^2}$$

Vodika je izredno
 več kot Natrija.

✓ primejuro

Razvoj Zvezd

Hayashijeva črta in prepovedano območje

Zaznamuji tisti del HR diagrama, kjer zvezde ne bomo našli. Tam zvezde ne obstajajo. Meja je definirana z hipotetičnim razvojem popolnoma konverzivne zvezde (**hayashijeva meja**). Desno od črte torej je prepovedano območje.

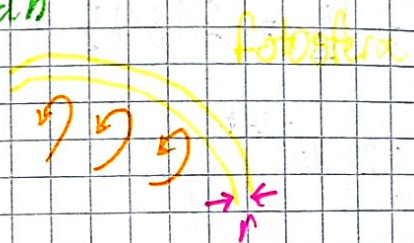
Upoštevajmo, da imamo zvezdo z maso M , ki je popolnoma konverzivna. (Zadnji sloj atmosfere pa seve bevedla).

M , opisemo z politopom; $P = K \rho^{1 + \frac{1}{n}}$; $n = \frac{1}{\gamma_a - 1}$

$$K^n = C_n G^n M^{n-1} R^{3-n}; \quad C_n = \frac{4\pi}{(n+1)^n} \frac{R_n^{n-3}}{M_n^{n-1}}; \quad R_n = \frac{R}{M_n}; \quad M_n = -\frac{dM}{dR}$$

Konstanta odvisna od n

$$\frac{dp}{dr} \approx -G \frac{\rho M}{R^2}$$



$$\Rightarrow P_R = \frac{GM}{R^2} \int_R^\infty \rho dr$$

To bi radi spremenili v integral po neprozornosti:

$$\left(\frac{2}{3}\right) = \tau = \int_R^\infty \kappa \rho dr = \bar{\kappa} \int_R^\infty \rho dr = \kappa_0 \rho R T_{\text{eff}}^b \int_R^\infty \rho dr \approx 1$$

Optična globina fotostere

Rosselandova povprečna neprozornost

Po definiciji (Le rač. veličnosti)

Tako lahko izrazimo integral in dobimo:

$$P_R = \frac{GM}{R^2} \frac{\rho_R^{-a} T_{\text{eff}}^{-b}}{\kappa_0}$$

Po drugi strani lahko zapišemo tako kot:

$$P_R = \frac{S_R}{\mu_{MH}} \mu T_{\text{eff}} \quad L = 4\pi R^2 \beta T_{\text{eff}}^4$$

Praktično je zapisati to z log:

$$\log P_R = \log M - 2 \log R - a \log S_R - b \log T_{\text{eff}} + \text{konst.}$$

$$\log P_R = \log S_R + \log T_{\text{eff}} + \text{konst.}$$

$$\log L = 2 \log R + 4 \log T_{\text{eff}} + \text{konst.}$$

$$n \log R = (n-1) \log M + (3-n) \log R + (n+1) \log S_R + \text{konst.}$$

Te tri lahko izrazimo in potem povzamemo izsev, efektivno temperaturo in maso.

$$\log L = A \log T_{\text{eff}} + B \log M + \text{konst.}$$

$$A = \frac{(7-n)(a+1) - 4 - a + b}{\frac{1}{2}(3-n)(a+1) - 1}$$

$$B = - \frac{(n-1)(a+1) + 1}{\frac{1}{2}(3-n)(a+1) - 1}$$

V primeru $a=1$, $b>0$:

$$A = \frac{9-2n+b}{2-n} \quad B = - \frac{2n-1}{2-n}$$

$$\gamma_n = \frac{5}{3} \quad n = 1,5$$

$$\gamma_n = \frac{4}{3} \quad n = 3$$

$\gamma_n > \frac{4}{3}$, da je zvezda dinamično stabilna

$$1,5 \leq n < 3$$

Glej grafe na .ppt

Če izračunamo povprečen eksponent:

$$\bar{\gamma} = \frac{d \ln P}{d \ln g} ; P \propto g^\gamma \quad n = \frac{1}{\gamma - 1}$$

Popolnoma konvergenca: $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_a$

Za zvezde z
širalnimi območji: $\gamma < \gamma_a \rightarrow n > n_a$
(če v tistih območjih)

V primeru $\gamma > \gamma_a$ je zvezda nestabilna. To pomeni, da je:

Prepovedano
območje $n < n_a$

Torej desno od Hayashijeve črte.

Razvoj zvezd pred glavo veje

1. kolaps oblaka plina
2. $\rho \uparrow T \uparrow \rightarrow \gamma \uparrow$
3. mejna plast $\rho \sim 10^{-10} / 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $T \approx 100 \text{ K} \rightarrow$ Molekularni H_2
4. časovna skala krčenja $t \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}}$
5. $T \uparrow \rightarrow$ ionizacija
6. Nastanek protorzvezda

$$\frac{\alpha GM^2}{R_{pz}} = \frac{M}{m_H} \left(\frac{X}{2} \chi_{\text{H}_2} + X \chi_{\text{H}} + \frac{Y}{4} \chi_{\text{He}} \right) ; \begin{aligned} \chi_{\text{H}_2} &= 4,5 \text{ eV} \\ \chi_{\text{H}} &= 13,6 \text{ eV} \\ \chi_{\text{He}} &= 79 \text{ eV} \end{aligned}$$

Dobimo izraz za začetni radij protozvezde ($\alpha \approx 1/2$ in $Y = 1 - X$):

$$\frac{R_{pz}}{R_{\odot}} \approx \frac{50}{1 - 0,2X} \frac{M}{M_{\odot}}$$

Ker je protozvezda v hidrostatičnem ravnovesju lahko ocenimo temperaturo:

Virialni teorem

$$W_n = \frac{1}{2} \alpha \frac{GM^2}{R} = \frac{3}{2} kT \frac{M}{m_H}$$

$$T = \frac{\alpha}{3k} \frac{GMm_H}{R_{pz}} \approx 6 \cdot 10^4 \text{ K}$$

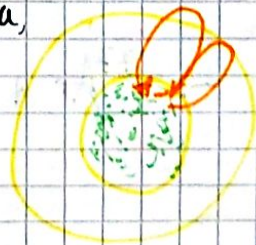
\downarrow
 $X = 0,7$

Zvezde T-Tauri

- 1945 - razred zvezd tipa T-Tauri
 - aktivne in spremenljive mlade zvezde
 - $M < 3M_{\text{sun}}$, starost < 10 milijonov let
 - nizke T_c (ni izgorovanja vodika)
 - energija zaradi gravitacijskega lučenja
 - do glavne veje v 100 milijonih let
 - polovica jih ima protoplanetarni disk
- Vmesna faza med protozvezdo in zvezdo glavne veje
(Aimajo vse ~~te~~ zvezde da konča v razvoju, le majhne mlade)

Dredge-Up

Konvektivna območja lahko prispevajo k temu, da se v njih elementi pomešajo. Če rotacijska zunanja plast konvektivna, lahko pridejo te elementi na površje.



Izguba mase

Zvezde izgubljajo maso preko vetrov ipd.

Sonce

$$\sim 10^{-14} M_{\odot}/\text{yr}$$

Čas, ki ga zvezda preživi na glavni veji

Zvezde z višjo maso

$$\alpha = \frac{\log(\tau_{\text{ms}}/\tau_{\text{ms},10})}{\log(M/M_{\odot})}$$

Solarni nevtrini

• 1967 - Raymond Davis, teoretično izračuni John Bahcall

• Nevtrini s sonca (potrditev jedrskih reakcij v jedru)

$$p-p: N \sim 2 \cdot 10^{38} \text{ nevtrini/s} \quad (\text{za celo sonce od pp})$$

• Težava:

- nizke sipalnosti presk nevtrinov

- moteni kozmični delci

• Detektor:

- 1500 m pod zemljo

- 380 m³ tetrakloretilena C₂Cl₄

$$p+p \rightarrow {}^2\text{D} + e^+ + \gamma \quad 6 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$E_{\gamma} \leq 0,42 \text{ MeV}$$

$${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma \quad 4,9 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$0,8 \text{ MeV}$$

$${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \gamma \quad 5,7 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$7,2 \text{ MeV}$$

Zaluz C₂Cl₄?



Superkamionande

- rudnik Kamioka Mozumi (Japonska)

- 2700m pod zemljo

• Posoda: 40 m premera, 40m globine

• 50 000 m³ vode

• Sipanje nevtrinov in elektronov (Sprožilo Cherenkov svetlobe) → ⁷B nevtrini

Naslednja eksperimenta SAGE in GALLEX namenjena zaznavanju p+p nevtrini.



Zaznajo le 65% Nevtrinov, ki bi jih morali zaznati.

Rešitev prinosi Sudbury Neutrino Observatory (stera z težko vodo in fotopomnovalnik)
Prispeval k odkritju, da Nevtrini oscilirajo.

Prispejke (ki so izmerili k 1/3 točka) so bili občutljivi samo elektronske.

Vemo pa da se nevtrini tčkom potovanja spreminjajo.

Homologne Relacije

• Modeli zvezd na glavni veji (za glavno vejo velja $L \propto M^3$)

• homologno luženje

dve
zvezdi M_1, M_2
 R_1, R_2

$$X = \frac{m}{M}$$

homologne masne
lupine

$$X = \frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}$$

Zdi se mi
da tu X in
ne X

Dva modela sta homologna / primerljiva:

To pomeni samo to, da
je ena last. veji/masice
vezi, druga

$$\frac{r_1(x)}{R_1} = \frac{r_2(x)}{R_2} \rightarrow \frac{r_1(x)}{r_2(x)} = \frac{R_1}{R_2} \text{ za vsaki } X$$

Kontinuitetna enačba:

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

Uporabimo relativno maso kot koordinato:

$$\frac{dr_1}{dx} = \frac{M_1}{4\pi r_1^2 g_1}$$

$$\frac{dr_2}{dx} = \frac{dr_1}{dx} \frac{R_2}{R_1} = \frac{M_1}{4\pi r_1^2 g_1} \frac{R_2}{R_1} \quad / \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2} \cdot \frac{g_2}{g_2} \cdot \frac{M_2}{M_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr_2}{dx} = \frac{M_2}{4\pi r_2^2 g_2} \left[\frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{M_1}{M_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} \right]$$

= 1 (da sta zvezdi homologni)

$$\frac{g_2(x)}{g_1(x)} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-3}$$

$\Rightarrow g(x) \propto g_c \propto \bar{g}$

Katerikoli zvezdi li imata isti poltropni indeks n , sta med sabo podobni.

Hydrostatično ravnovesje

$$\frac{dp}{dm} = - \frac{Gm}{4\pi r^4} \cdot M_1 \cdot \frac{M_1}{M_1}$$

Podobno kot prej uporabimo isti trik:

$$\frac{dp_1}{dx} = - \frac{GM_1^2 x}{4\pi r_1^4} ; r_1 = r_2 \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{dp_{21}}{dx} = \frac{GM_2^2 x}{4\pi r_2^4} \left[\frac{R_2^4}{R_1^4} \frac{M_1^2}{M_2^2} \right] = \frac{dp_2}{dx} \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \right]$$

Integriramo po masni spremembi:

Robni pogoji:

$$\Rightarrow P_1(x) = C P_2(x) + \text{konst.}$$

i) 0

$$i) p(x \rightarrow 1) = 0$$

Torej je:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = C = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2$$

$$p(x) \propto \rho_c \propto \frac{\mu^2}{R^4}$$

Če izrazimo radije iz gostote dobimo:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{2/3} \left(\frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)}\right)^{4/3}$$

Dodatno predpostavke • Temperatura

• temperatura: idealni plin $P = \frac{\rho}{\mu M} k T$

• sestava zvezd homogena (a to vseeno lahko $\mu_1 \neq \mu_2$)

Za lupine je enačba idealnega plina:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{\rho_1(x)}{\rho_2(x)} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{T_1(x)}{T_2(x)}$$

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{T_1(x)}{T_2(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1(x)}{T_2(x)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \quad T \propto \frac{\mu \mu}{R}$$

• IZSEV

Predpostavimo: Zvezdi sta v seralnem ravnovesju

Uporabimo Crammerjev zakon za drugi primer, prej $\mathcal{L} = \text{konst.}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \rho^a T^b; \quad a=1 \\ b=-3,5$$

Napišimo dT/dm :

koordinata, ki približuje izsev
znotraj neke lupine

$$\frac{dT}{dm} = -\frac{3}{4ac} \frac{\mathcal{L}}{T^3} \frac{1}{(4\pi r^2)^2}$$

$$4T^3 \frac{dT}{dm} = \frac{d(T^4)}{dm} = -\frac{3\mathcal{L}\mathcal{L}}{ac \cdot 16\pi^2 r^4} \quad / \cdot \frac{M}{M}$$

$$\frac{dT^4}{dx} = -\frac{3\mathcal{L}M\mathcal{L}}{16\pi^2 ac r^4}$$

Ob upoštevanju da to velja tudi na robovih (kot prej), dobimo:

$$\left(\frac{T_2(x)}{T_1(x)}\right)^4 = \frac{L_2(x)}{L_1(x)} \frac{M_2}{M_1} \frac{\mathcal{L}_2}{\mathcal{L}_1} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4$$

Temperature lahko izrazimo od prej:

$$\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^4 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^3 = \frac{L_2(x)}{L_1(x)} \frac{M_2}{M_1} \frac{\mathcal{L}_2}{\mathcal{L}_1} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4$$

⇒

$$\frac{L_2(x)}{L_1(x)} = \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^4 \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^3 \left(\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2}\right); \quad \underline{\underline{L \propto M^3}}$$

Za $X=1$:

$$L \propto M^3 \frac{M^4}{\mathcal{L}}$$

Homogena zvezda
 $\mathcal{L} = \text{konst.}$
idealni plin

Pišimo neprozornost s Cramarjevimi zakonomi:

$$\frac{L_2(x)}{L_1(x)} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^4 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^3 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3,5} =$$

$$= \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^4 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^3 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-3} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{3,5} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3,5} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{3,5} =$$

$$= \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{7,5} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{0,5}$$

$$L \propto \frac{\mu^{7,5} \mu^{5,5}}{R^{0,5}}$$

Tu pa $\mu \neq \text{konst.}$

Energija na enoto mase q

$$\frac{dF}{dm} = q \quad ; \quad q = q_0 \cdot g T^\gamma$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{dF}{dx} = q M = q_0 \cdot g T^\gamma M$$

Ovisno od:

μ
 μ
 μ

μ
 μ
 R

Predpostavimo zvezda:

- idealni plin
- homogena zvezda (μ)
- $\mu = \text{konst.}$

$$\Rightarrow R \propto \mu^{\frac{\gamma-4}{\gamma+3}} M^{\frac{\gamma-1}{\gamma+3}}$$

Example:

pp cikel: $\gamma = 4$

$$R \propto M^{0,43}, \quad T_c \propto \mu M^{0,57}, \quad \rho_c \propto M^{-0,3}$$

CNO: $\gamma = 18$

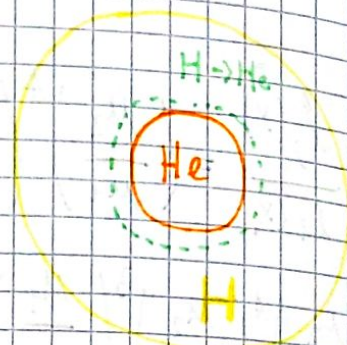
$$R \propto \mu^{2/3} M^{0,81}, \quad T_c \propto \mu^{1/3} M^{0,19}, \quad \rho_c \propto \mu^{-2} M^{-1,4}$$

(*) Ob zahľujicho glarne

Faza rdece Orjalinje

(*) Schönberg-Chandrasekharjeva meja

Jedro postane izotermno. Obstaja v primeru izotermnega jedra (za katerega velja id. plin) Obstaja meja za relativno maso jedra.



To je meja ko traja jedro lakta da drži maso ovojnice

Masa jedra

$$\frac{M_c}{M}$$

Za jedro poznamo T_c, V_c, μ_c, T_c . Zapisali bomo splošni virialni teorem

$$\int_0^{V_c} p \cdot dV = P_s V_c + \frac{1}{3} \alpha \frac{GM_c^2}{R_c}$$

Surface lupine oz V_c

Privzeli smo, da imamo izotermni idealni plin:

$$\int_0^{V_c} p \cdot dV = \int_0^{V_c} \frac{8}{\mu m_H} k T_c dV = \frac{k T_c}{\mu m_H} \int_0^{V_c} 8 dV = \frac{k T_c M_c}{\mu m_H}$$

Homogeno izotermno

Torej:

$$\frac{k T_c}{\mu m_H} M_c = P_s V_c + \frac{1}{3} \alpha \frac{GM_c^2}{R_c} \quad /: V_c$$

$$P_s(R_c) = \frac{k T_c M_c}{\mu m_H V_c} - \frac{1}{3} \alpha \frac{GM_c^2}{R_c V_c} \quad ; \quad V_c = \frac{4}{3} \pi R_c^3$$

$$P_s(R_c) = \frac{3 k T_c M_c}{4 \pi \mu m_H R^3} - \frac{1}{3} \alpha \frac{GM_c^2}{4 \pi R_c^4}$$

$$P_s(R_c) = \frac{3}{4 \pi} \frac{k T_c M_c}{\mu m_H R^3} - \frac{\alpha GM_c^2}{4 \pi R_c^4}$$

Iščemo ekstrem $\frac{dP_s}{dR_c} = 0$

$$\frac{dP_s}{dR_c} = -\frac{3}{R_c^2} \frac{36T_c M_c}{4\pi\mu_c m_H} + 4R_c^{-3} \frac{\alpha G M_c^2}{4\pi} = 0$$

$$\frac{4\alpha G M_c^2}{4\pi R_c^3} = \frac{96T_c M_c}{4\pi\mu_c m_H R_c^2}$$

$$\Rightarrow R_c = \frac{\alpha G M_c \cdot 4\mu_c m_H}{96T_c}$$

Taj je $P_{s,max}$:

$$P_{s,max} \propto \frac{T_c M_c T_c^3}{\mu_c M_c^3 \mu_c^3} = \frac{M_c^2 T_c^4}{M_c^4 \mu_c^4}$$

$$P_{s,max}(M_c) \propto \frac{T_c^4}{M_c^2 \mu_c^4}$$

$R_c \ll R$ (celotna zvezda)

$$P_{env} > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$$

(envelope)

$$P_{s,max}(M_c) = \text{const.} \frac{T_c^4}{M_c^2 \mu_c^4} \gg \frac{GM^2}{8\pi R^4}$$

Za temperaturo uporabimo homologno relacijo

$$T_c \propto \frac{\mu_{env} G M_{MH}}{4 R}$$

To lahko vstavimo v enačbo od prej:

$$\frac{\mu_{env} G^4 M^4 M_{MH}^4}{4^4 R^4 \mu_c^2 \mu_c^4} \gg \frac{G M^2}{8 \pi R^4}$$

Dobimo Chandrasekharjevo mejo:

$$\frac{M_c}{M} \leq \text{const.} \left(\frac{\mu_{env}}{\mu_c} \right)^2$$

konst. = 0,37

sunčkaste zvezde $\Rightarrow \frac{M_c}{M} \leq 0,13$ $\mu_c = 1$
 $\mu_{env} \approx 0,6$

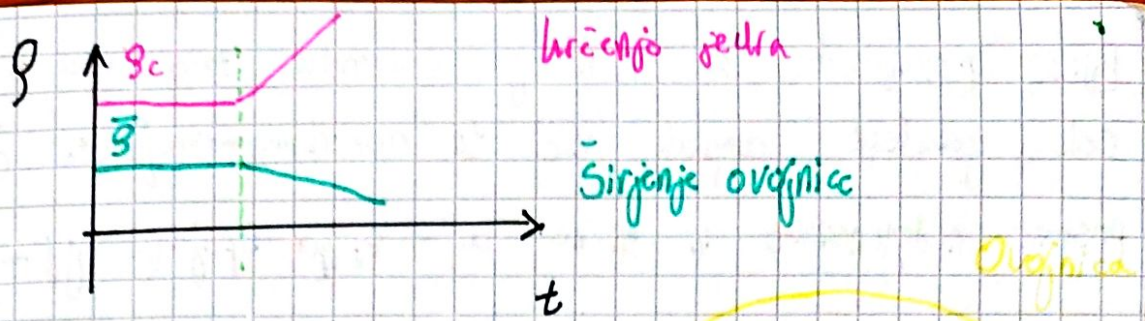
Zato je približno 10% zvezdine mase vključene v jedrske reakcije

Nad to mejo se jedro začne krčiti.

• Zvezde glavne veje, $M > 2 M_\odot$

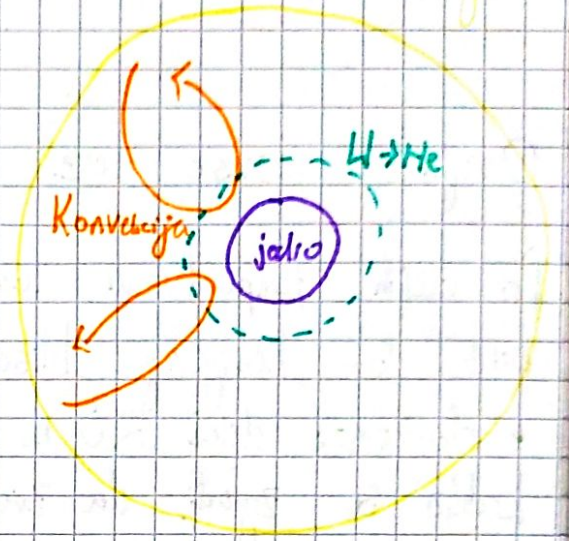
Njihovo jedro (homogeno in konvektivno) preseže S.C. mejo. Zavstavi se zlivanja vodika v helij. Konvekcija se ustavi in rava izotermna. Začne se krčiti. Nastane gradient temperature, ki dalje povzroča krčenje. To se dogaja na K.H. časovni skali za krčenje jedra.



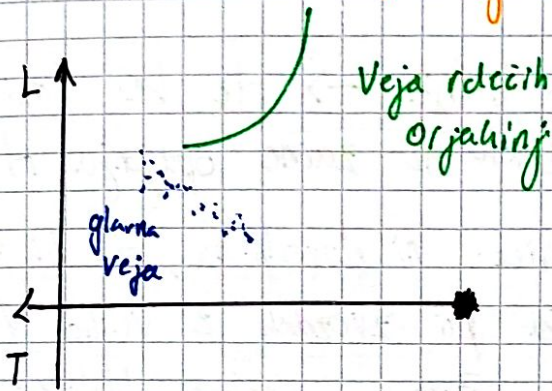


Naša zvezda postane rdeča orjalinja.

Prinese produkte nukleosinteze v višje sloje



HR diagram:



• dodatno:

V ~~naš~~ jedru zvezde je plin degeneriran

Tudi če je $M_c > M_c$ (za s.c. mejo) se zvezda ne lrci Marci

preživi.

pogoj:
$$P_{s,max}(M_c) \lesssim K_1 \left(\frac{M_c}{\frac{4\pi}{3} \rho_c^3} \right)^{5/3} \quad (\text{na površini jedra})$$
 Samo za $M < 2M_\odot$

Torej tudi v primeru $M < 2M_\odot$ imamo lahko postopen prehod v rdečo orjalinjo. Ta prehod traja nekoliko dlje, kot za $M > 2M_\odot$.

Zaradi degeneracije imamo vžig helija v degeneriranem jedru:

Helijev blišč pri $M_c \approx 0,5 M_\odot$

Bl: ši pomeni, da se v nekef behundah začne spajati helij. Ima izsev
 cele galaksije ampak vsa to absorbira ovofnica. Jedro se razširi
 postane nedege nerirano in začne se ~~spajati~~ spujanje ogljika v iz helija.

$L \sim 10^{41} L_{\odot}$ absorbira ovofnica

Ovofnico raznese oz. razpihne.

Pri večjih temperaturah lahko rata gorjenje $H \rightarrow He$ stabilno in ne
 pride do helijevega blišča.

• dodatno: delček RO ne vzgejo helija $\rightarrow He$ bele pritlikavke

Lahko se zgodi, da zvezda sploh ne začne spujanja $H \rightarrow He$. Kombinacija
 krčenja jedra in širjenja ovofnice ni dovolj črna, da bi se jedro segreti
 za vzig $H \rightarrow He$. To se dogaja pri zvezdah z veliko vetrov, ki hitro
 izgubljajo maso ~~in~~ ovofnice. Zvezda postane Helijeva bela pritlikavka.

Faza rdece orjalinje se zaključuje, ko imamo gorjenje $He \rightarrow C$ v jedru.

Gorjenje Helija v jedru ($He \rightarrow C, O$)

Faza kufja:

+ še vedno v masni lupini tega jedra prisotna
 reakcija $H \rightarrow He$

i) $1/10$ energije / kg glede na $H \rightarrow He$
 (hitreje se porabi ves helij)

(čebufasta struktura)

ii) Izsev je višji, da ohrani stabilnost porabi več
 energije.

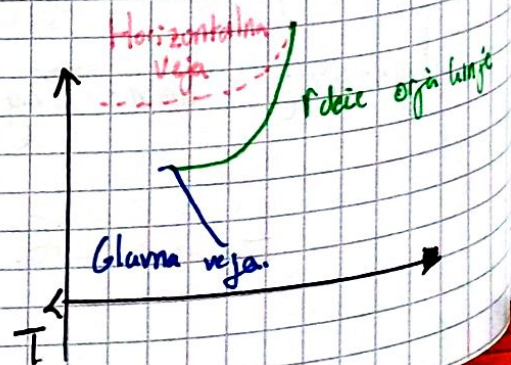
a) Zvezde z masami ($0,7 - 2 M_{\odot}$)

Zvezde se pomalujejo na Horizontalno vejo

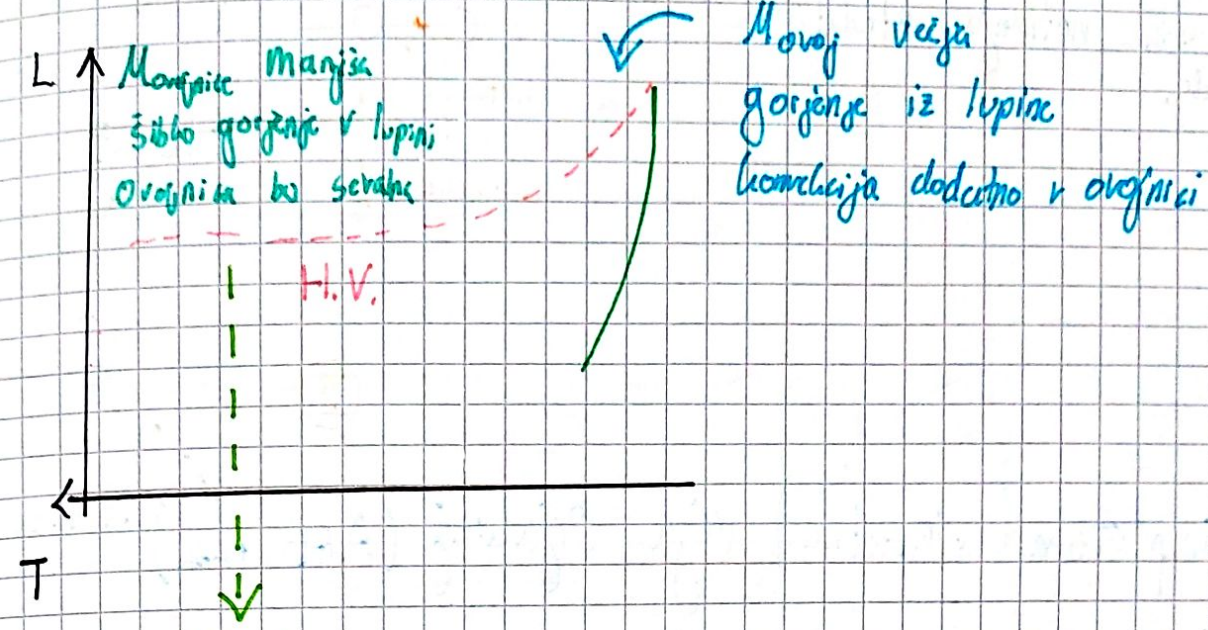
$L \sim 50 - 100 L_{\odot}$

$t \sim 10^8$ let

$M_c \sim 0,5 M_{\odot}$



Vse začnejo z isto M_c torej je za porazdelitev po veji odvisna od mase ovojnice (ki je še ostala, po razpihanju)



RR Lyrae

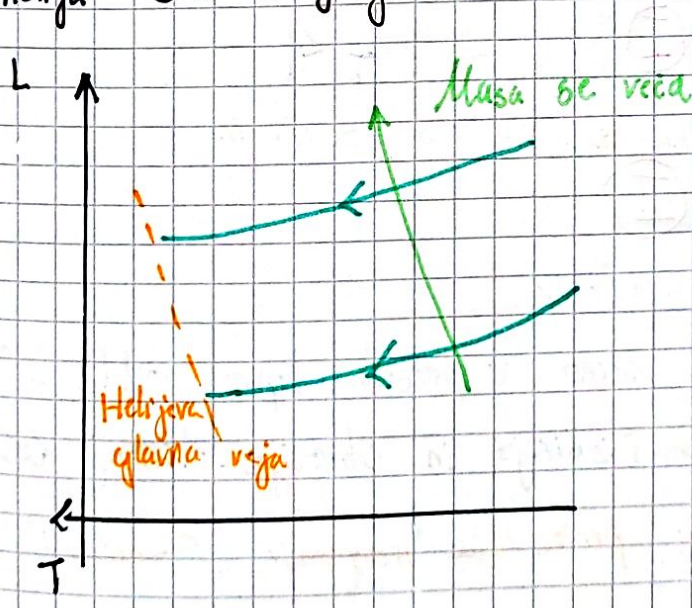
Pride do nestabilnosti v ovojnici, ki povzroči širjenje in lučanje ovojnice, kar vidimo kot spremembiv izsev.

$$\Delta t \sim \text{nehaj } \mu$$

b) Zvezde srednjih mas (2-10 M_{\odot})

Gorjenje ~~Helijevega blišča~~

Gorenje helija brez helijevega blišča.



Nestabilnosti v ovojnici

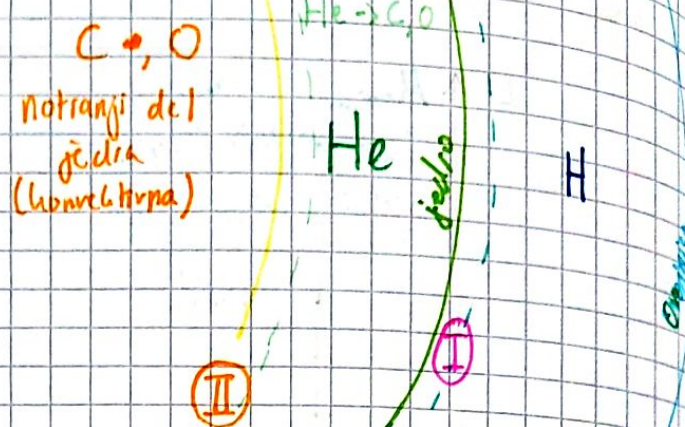
Kefeide

(povezava med periodo utripanja in povprečnemu razsvet - Standardni svetilnik)

$$\Delta t \sim \text{nehaj dni/mesec}$$

Notranja struktura zvezde

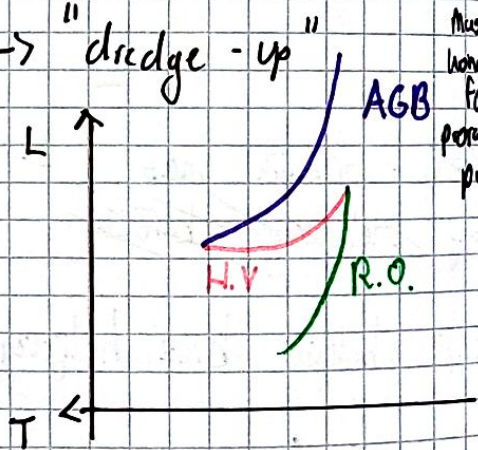
Čebulasta notranja struktura zvezde.



Asimptotska (asimptotna) veja orjalinij (AGB faza) $H \rightarrow He$

- jedro je popolnoma iz C, O + ovornica
Ne vzdržuje ga več jedrska reakcija \rightarrow krčenje jedra + razširjanje ovornice
- V ovornici se vzpostavi konvekcija \rightarrow "dredge-up"
- Zvezde postanejo nadorjalnice

Količina mase jedra
konar AGB
faze delni
preostanek
po AGB



a) Pride do termičnega utripanja:

- 1.) $H \rightarrow He$ večino časa v **I**
 - 2.) Masa He se zveča, lupina iz He se stisne in temperatura se poveča v **II**
 - 3.) $He \rightarrow C, O$ termično nestabilna
Ni He fuzija ampak se vseeno v prostale lupine odda $L \sim 10^8 L_0$.
Lupine to absorbirajo se razširijo in ohladijo. ~~Helij se izhladi~~
 - 4.) Helij v lupini se porabi, proizvaja neutronov (S-procesi)
- To se ponavlja in to je utripanje (termično).

b) M_c določa izsev zvezde

$M_c > 0,5 M_\odot$ privzamemo

$$\frac{L}{L_\odot} \sim 6 \cdot 10^4 \left(\frac{M_c}{M_\odot} - 0,5 \right) \quad (\text{red velikosti } L_{\text{Edd}})$$

c) Močan zvezdni veter

V zvezdah z res zelo razpekimi orfnicam nastajajo tudi molekule in prašni delci.

$$\dot{M}_{\text{wind}} = 10^{-9} \text{ do } 10^{-4} \frac{M_\odot}{\text{year}}$$

Empirična formula Riemersova formula

$$\dot{M} \approx 10^{-3} \frac{L}{L_\odot} \frac{R}{R_\odot} M_\odot / \text{year}$$

Abb: faza: Koliko časa trajajo gorenje v dveh lupinah?

$$q \sim 5 \cdot 10^{14} \text{ J/kg}$$

$$\dot{M}_c = \frac{L}{q} = 1,2 \cdot 10^{-11} \frac{L}{L_\odot} \frac{M_\odot}{\text{year}}$$

$$\frac{\frac{dM_c}{dt}}{1,2 \cdot 10^{-11}} = 6 \cdot 10^4 \left(\frac{M_c}{M_\odot} - 0,5 \right) \frac{M_\odot}{\text{year}}$$

$$\frac{dM_c}{\left(\frac{M_c}{M_\odot} - 0,5 \right)} = 7,2 \cdot 10^7 \frac{dt}{\text{year}}$$

$$\tau_{AGB} = \int_0^{\tau_{AGB}} dt \leq 1,38 \cdot 10^6 \text{ year} \left[\frac{dM_c}{M_c - 0,5M_{\odot}} \right]_{M_{c,0}}^{M_{ch} \text{ Chandrasekhar}} =$$

$$= 1,38 \cdot 10^6 \text{ year} \ln \left(\frac{M_{ch} - 0,5M_{\odot}}{M_{c,0} - 0,5M_{\odot}} \right)$$

$M_{c,0} \approx 0,5M_{\odot}$

$$M_{c,0} \approx a + b M_{\odot}$$

↓
Začetna masa jedra

↳ Začetna masa Zvezde

d) Zvezde z močnimi vetrovi

Masa jedra na koncu faze asimptotskih orjelijev

$$1M_{\odot} < M_0 < 9M_{\odot} \rightarrow 0,6M_{\odot} < M_c < 1,1M_{\odot} \rightarrow \text{Bela pritlikarica}$$

↑ Začetna masa

$$M_c(AGB) \rightarrow M + \Delta M_{0,1M_{\odot}}$$

↓
Iz c in o

$$\dot{M}_{wind} = 10^{-4} \frac{M_{\odot}}{\text{year}}$$

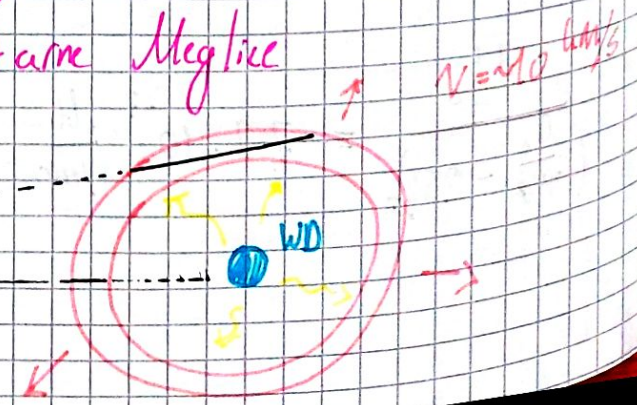
(super vetrovi)

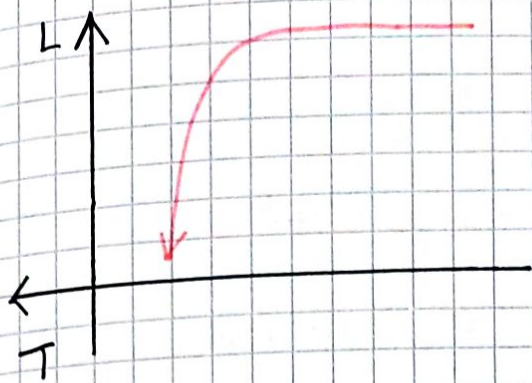
$T \sim 30000\text{K}$ (→ ionizacija snov drog zvezde
Fluorescena materiala drog zvezde)

Planetarna meglica je kratkoživca

↓
Planetarne Meglice

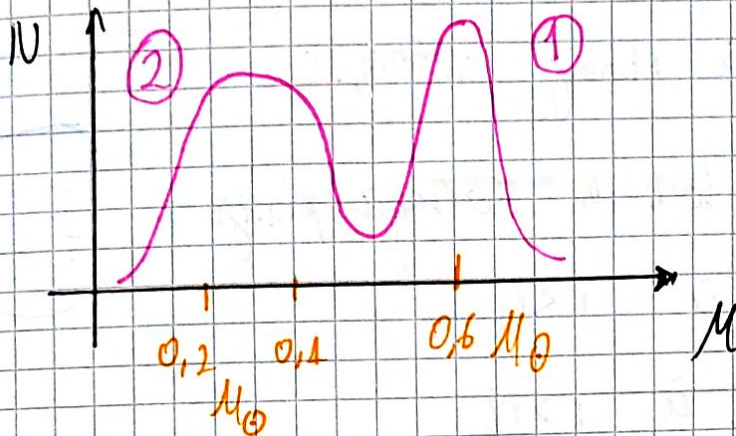
$t_{p.n} \sim 10^4 - 10^5 \text{ let}$
Čas, da "ugasne"





Tako se premahne zvezda lo
pride v fazo bele pritilavke.

Porazdelitev po masah: (bele pritilavke za zvezde $M_0 < 10 M_\odot$)



Razlog za (1):

1-10 M_\odot Zaietna masa

M_c iz C in O (+ deg. elektroni)

↳ Zunanji del zvezde iz vodika ali

helija (odvisno od faze utripanja)

Bele pritilavke ločujemo po prisotnosti H črt v spektru.

Razlog za (2):

0,7 - 1 M_\odot Zaietna masa

Niloi ne dosežejo dovolj visokih temperatur, da bi vžgale helij

Torej so pretizno Helija (iz faze R. O. izgubijo svojico in
postajajo bele pritilavke).

Bele pritlikarke

Razvoj

a) Notranj: tlak vzdržujejo degenerirani elektroni.

b) Notranja energija je termična energija v ionih.

c) V zvezdi se potekajo jedrske reakcije.

- Notranja temperatura je skoraj uniformna.

r_b ... meja med deg. delom in zunanjo plastjo

$$T = T_c \quad \text{če } r < r_b$$

$$L = \text{const.} \quad \text{če } r > r_b$$

Večina mase je zbrana v jedru. Za zunanjo plast:

$$\textcircled{1} \quad \frac{dp}{dr} = -\beta \frac{GM}{r^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\beta L}{T^3} \frac{L}{4\pi r^2}$$

Upoštevamo Kramerjev zakon za neprozornost:

$$\beta = \beta_0 \beta T^{-7/2}$$

Za idealni plin velja:

$$p = \frac{\beta h T}{\mu m_H} \rightarrow \beta = \frac{p \mu m_H}{h T}$$

To sestavimo skupaj:

$$\beta = \beta_0 \frac{p \mu m_H}{h} \beta T^{-9/2}$$

e^- niso deg.

↑
degenerirani
elektroni



$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = - \frac{3}{4ac} \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\partial \mathcal{B}}{T^3} =$$

$$= - \frac{3}{4ac} \epsilon_0 \frac{\rho \mu_{MH}}{a} T^{-15/2} \frac{L}{4\pi r^2}$$

Naredimo ① : ② =

$$\frac{\frac{dp}{dr}}{\frac{dT}{dr}} = \frac{+\mathcal{B} \frac{GM}{r^2}}{\frac{3}{4ac} \epsilon_0 \frac{\rho \mu_{MH}}{a} T^{-15/2} \frac{L}{4\pi r^2}} =$$

$$\Rightarrow p dp = \frac{Gac \cdot 16\pi h}{3 \epsilon_0 \mu_{MH}} \frac{M}{L} T^{15/2} dT$$

Integral od središča do površine, kjer $\rho=0$ in $T=0$.

$$p(T) = \left(\frac{64\pi ac h G}{51 \epsilon_0 \mu_{MH}} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{L} \right)^{1/2} T^{13/4}$$

Radiative zero
solution

Za gostoto velja:

$$\rho(T) = \left(\frac{64\pi ac h G \mu_{MH}}{51 h \epsilon_0} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{L} \right)^{1/2} T^{13/4}$$

Plak na robu ($r=r_b$) \Rightarrow gledamo elektrone
 $\bar{v}=T_e$

$$P_{deg, e} = P_e (\text{idealni plin})$$

$$K_1 \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \Big|_{r=r_b} = \frac{h T \mathcal{B}}{\mu_e M_H} \Big|_{r=r_b}$$

$$g = \left(\frac{\mu_c}{k_1} \frac{\hbar T_c}{\mu_c m_H} \right)^{3/2} \mu_c$$

Izenučimo oba izraza za gostoto in dobimo:

$$\left(\frac{\hbar T_c}{k_1 m_H} \right)^{3/2} \mu_c = \left(\frac{64\pi a c G \mu m_H}{51 \hbar \alpha_0} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{L} \right)^{1/2} T_c^{13/4} \quad / \cdot ()^2$$

$$\frac{L}{M} = \frac{k_1^3 m_H^3}{\hbar^3 T_c^3 \mu_c^2} \frac{64\pi a c G \mu m_H}{51 \hbar \alpha_0} T_c^{13/2}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{M} = \frac{64\pi a c G k_1^3 \mu m_H^4}{51 \hbar^4 \alpha_0 \mu_c^2} T_c^{7/2}$$

Za belo pritlikavo $\frac{1}{2} C + \frac{1}{2} O$:

$$\frac{L/L_0}{M/M_0} \approx 6,8 \cdot 10^{-3} \left(\frac{T_c}{10^7 K} \right)^{7/2}$$

$$T_c \approx 4 \cdot 10^7 \left(\frac{L/L_0}{M/M_0} \right)^{2/7} K$$

Notranja energija je v ionih:

$$W_{n,I} = \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\mu_I m_H} M T_c$$

$$L = - \frac{dW_{n,I}}{dt} = - \frac{3}{2} \frac{\hbar}{\mu_I m_H} M \frac{dT_c}{dt} = - \frac{3}{7} \frac{\hbar M}{\mu_I m_H} \frac{T_c}{L} \frac{dL}{dt}$$

$$\Rightarrow - \frac{dL}{dt} \propto \frac{L^2}{M T_c} \propto \frac{M^2 T_c^7}{M T_c} \propto M T_c^6$$

Torej se b.p. hladi relativno precisi. Manjša (manj masivna) se bo ohlajala
 Počasneje

Ohlajanje od T_c' (začetna) do $\frac{T_c}{L}$ (končna):

$$\tau \sim 0,6 \frac{L}{\mu_I m_H} M \left(\frac{T_c}{L} - \frac{T_c'}{L'} \right)$$

če je $T_c' \gg T_c$ in $T_c'/L' \ll T_c/L$

$$\Rightarrow \tau \sim 2,5 \cdot 10^6 \left(\frac{M/M_\odot}{L/L_\odot} \right)^{5/7} \text{ let}$$

Čas ohlajanja bele
 pritlikavke

~~MMH~~

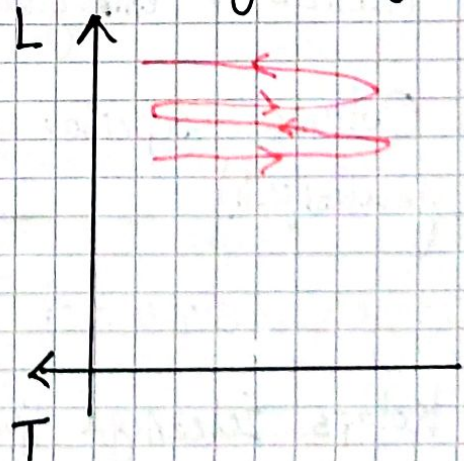
$1 L_\odot$, padec na $10^4 L_\odot$ $\tau \sim 2 \cdot 10^9 \text{ let}$

p.m. $10^4 L_\odot$ do $0,1 L_\odot$ $\tau \sim 10^7 \text{ let}$

Evolucija masivnih zvezd

Zvezde z maso (začetno) $M_0 > 10 M_\odot$:

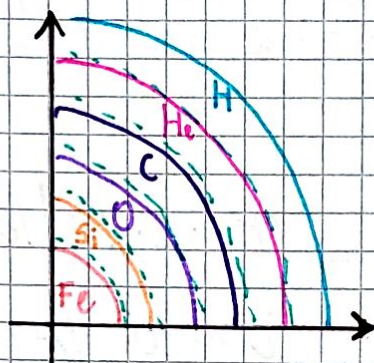
- degenerirani elektroni v jedru v končnih fazah (jedro iz železa)
- izguba mase
- izsev je blizu Eddingtonovega izseva (če L_0 so na glavni veji)



$$M_0 > 30 M_\odot$$

- izredno visoki zvezdni vetrovi
- Svetle in bice vodilna: Wolf-Rayetove zvezde ($5-10 M_\odot$)
- Vidimo na površju produkte nukleosinteze
- Ovojnico vodilna ta zvezda odvrže
- npr. Eta Carinae ($\sim M_\odot = 120 M_\odot$)

Struktura masivnih zvezd je "čebulasta" tik pred supernovo:



Eksplozivne zvezde

a) Supernova

Supernova = eksplozija zvezde

- Izsev primerljiv z izsevom galaksije, v katerih so
- Trajanje nekaj mesec / let
- Približno v eni galaksiji opazimo 1 supernovo na 10 let.
- Ostanke supernov pa lahko vidimo še 10000 let (v naši oz. sosednji galaksijah)

Nastanek supernov:

- Kolaps železnega jedra (pri masivnih zvezdah) tip II
- Kolaps bele pritlikavke, ki preloži Chandrasekharjevo mejo tip I

tip I

X

✓

✓

tip II

✓

X

✓

Vodikove
črte

starejše
populacije

disk in
gal. ki so
bogate s plinom

c) Supernove tipa II

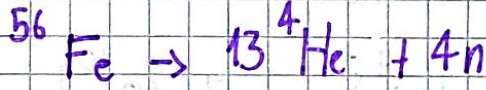
Masivne zvezde

- jedro iz železa → nič več jedrskih reakcij → krčenje jedra
- elektroni deg. → deg. jedro z $M_c > M_{ch}$

Ove nestabilnosti:

- ① jedra elementov zajamejo elektrone ⇒ zmanjša tkulo
- ② Temp. se poveča da pride do fotodisintegracije

železa:



To je endotermna reakcija, ki vzame $\frac{2\text{MeV}}{\text{nukleon}}$

Se dogaja na "freefall"
dinamični nestabilni stadij

• nadaljuje se sesedanje (da bi se vzpostavil tlak) → fotoni "falo" energetični da "razbijejo" He → ostanejo nevtroni in protoni

↳ 6MeV/nukleon

• dobimo izredno gosto jedro, protoni zajamejo elektrone

• izredno gosto jedro z nevtronov → degeneriran plin nevtronov

degeneriran plin nevtronov

$$10^{18} \text{ kg/m}^3$$

~40 km premera

} Neutronska zvezda

[Primer: Kam gre energija ob kolapsu?]

Kolaps \rightarrow gravitacijska energija SN

$$M_c \sim 1,5 M_\odot \quad (\text{začetna masa jedra})$$

$$R_c \sim 0,01 R_\odot \rightarrow R_{NS} \sim 20 \text{ km}$$

$$\Delta W_g \approx -GM_c^2 \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_{NS}} \right) \approx -\frac{GM_c^2}{R_{NS}} \approx 3 \cdot 10^{46} \text{ J}$$

Gravitacijska en. besedilo
jedra

Jedrski procesi (fotodesintegracija) absorbirajo energijo:

$$\Delta W_{\text{jedro}} \approx 7 \text{ MeV} \frac{M_c}{m_H} \approx 2 \cdot 10^{45} \text{ J}$$

Eno desetino tega vzamejo jedrski procesi. Preostali del gre v obliko, ki se različi in v izsev.

$$L_{SN} \sim 10^{37} \frac{\text{J}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^{10} L_\odot$$

$$\tau_{SN} \sim 1 \text{ leto}$$

$$\Rightarrow \Delta W_{\text{rad}} \sim L_{SN} \tau_{SN} = 3 \cdot 10^{44} \text{ J} \quad (\text{le } 1/100 \text{ energije})$$

Za odvrženi material pa:

$$\Delta W \approx \frac{GM_c(M - M_c)}{R_c} \approx 5 \cdot 10^{44} \text{ J}$$

$$\Delta W_{\text{kin}} \approx \frac{1}{2} (M - M_c) v^2 \approx 10^{45} \text{ J}$$

\uparrow
10000 km/s

Trenutno še nismo našli kam gre večina naše energije.

Odgovor: 50 nevtrini:

10^{57} nevtrinov $\rightarrow 10^{46}$ J (hitrosti blizu c)

Tok nevtrinov je tolikšen, da ovofnica ni čisto neprosopna in tako del te energije nevtrini oddajo ~~delajo~~ lahko v snov v okolici.

Pojavi se tudi (termičen) udarni val.

core-collapse (SN_{cc}) + nevtrinov

$M \sim 18 M_{\odot}$

\downarrow
 $0,075 M_{\odot}$ Ni nastalo

Feb 1987 \rightarrow SN1987A v LMC

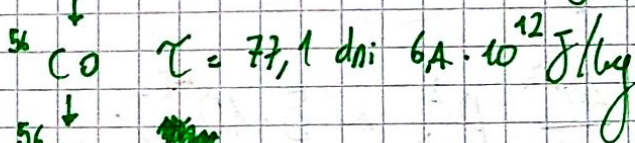
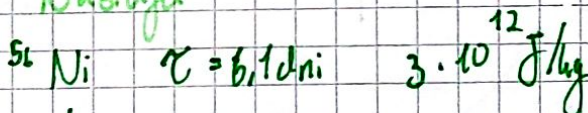
(detektorji: nevtrinov so zaznali več nevtrinov \rightarrow duli 20 na dan)

(nevtrini nastajajo tik pred supernovo pri zygatju elektronov)

Vedlo se je, da je bila $M_0 \gtrsim 20 M_{\odot}$.

Udarni val (termični) $\rightarrow T \sim 5 \cdot 10^9$ K

Nastajajo



Te radioaktivni elementi, dodajo k svetilnosti supernove tudi po njenem vzh.

b) Neutronske zvezde

$n = 1,5 \rightarrow R \propto M^{-1/3}$

Prisotna močna sila



Za mejno maso rabimo upoštevati, da je zvezda iz deg. nevtronov gostejša in da je njhova mirovna masa podobna lin. en. \Rightarrow Moramo upoštevati relativistično teorijo.

$M_{ov} \sim 2 - 3 M_{\odot}$

Oppenheimer-Volkoff

Vrteča se nevtronska zvezda - Pulsar:

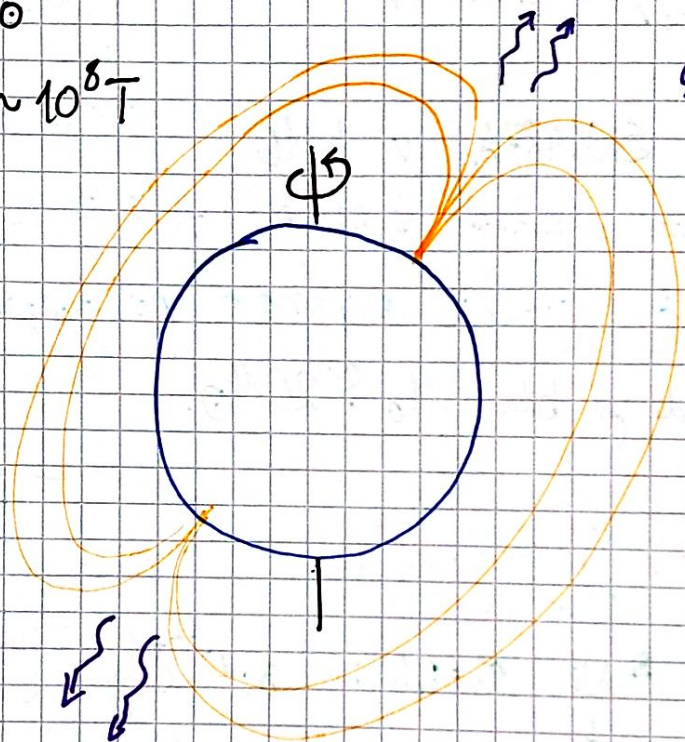
Rahovica P $0,033s$ 105450

Vela $0,089s$

Mehanizem: **Ohranitev** vrtilne količine

$$P = \frac{2M M_{\odot} R_{\odot}^2}{P_0} \rightarrow P_{NS} = P_0 \left(\frac{R_{NS}}{R_{\odot}} \right)^2 \approx 2 \cdot 10^{-3} s$$

Magnetno polje: $\sim 10^8 T$



Sinhrotrosko
Sevanje

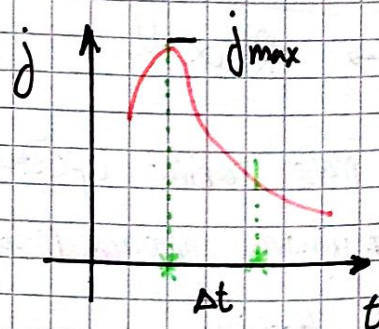
$$\Delta E_{rot} \approx \frac{1}{2} M_c \frac{4\pi^2}{P^2} R_{NS}^2 \sim 5 \cdot 10^{45} J$$

$$-E_{rot} \propto \frac{\dot{P}}{P^3}$$

Supernove tipa ~~Ia~~ Ia

C-O jedro
+ deg. elektronov

↓ = jedrska energija ("vžig C")



Fe - peak elements

Spektr. vrzice ^{56}Ni

Ocena energije:

$$\left. \begin{array}{l} 0,8145 \text{ MeV} \\ \frac{M_{\text{ch}}}{m_{\text{H}}} \approx 1,75 \cdot 10^{57} \end{array} \right\} \sim 2,3 \cdot 10^{44} \text{ J}$$

Zvezde z $M > 60 M_{\odot}$

Iz takih zvezd nastanejo (zvezdre) črne luknje

$$R_{\text{Sch}} = \frac{2GM}{c^2} = 3 \frac{M}{M_{\odot}} \text{ km}$$

Medzvezdna snov v Galaksiji

[Glej ppt Ciljus razvoja zvezd]

a) Območja HII (= emisijske meglice)

Nastane okoli vročih zvezd spektralnega tipa O in B. Vrhu v UV fotoni ($> 13,6 \text{ eV}$) \rightarrow sposobni ionizirati atomarni vodik (H I).

$$R_s \approx \left(\frac{3N}{4\pi\alpha} \right)^{1/3} n_{\text{H}}^{-2/3} \quad \text{Strömgrenov radij}$$

\rightarrow kvantno mehanika rekombinacijski koeficient

Strömgrenova sfera je območje: hitrost ionizacije = hitrost rekombinacije

Ob rekombinaciji se sprošča rdečkasta barva/svetloba.

[Primer]

$$\frac{dN}{dt} = \text{št. ionizirajočih fotonov}$$

$$\propto n_e n_H = \text{št. rekombinacij na volumen na sekundo}$$

$$T = 8000 \text{ K}$$

$$\alpha = 3,1 \cdot 10^{-19} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Prizetek: plin (suma) iz vodika

$$n_e = n_H$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha n_H^2 \cdot \frac{4}{3} \pi R_s^3$$

$$R_s = \left[\frac{3}{4\pi} \frac{dN/dt}{\alpha} \right]^{1/3} n_H^{-2/3} \quad \text{Strömngrenov radij}$$

Nastanek

Arad:

Fragmentacija

a) Pogoji za stabilnost

$$\text{Jeansov radij: } R \geq \frac{\alpha \mu m_H GM}{3kT} = R_J$$

V (sterni)

Jeansova masa:

$$M \leq \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{\alpha} \right)^{3/2} \left(\frac{kT}{\mu m_H G} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{g}} = M_J$$

Glede na porazdelitev mase

$$\text{ideal} \Rightarrow \int p dV = p_s \cdot V + \frac{1}{3} \alpha \frac{GM^2}{R}$$

$$\text{lejer: } \frac{M}{\mu m_H} RT = p_s V + \frac{1}{3} \alpha \frac{GM^2}{R} \geq \frac{1}{3} \alpha \frac{GM^2}{R}$$

Če $r < R_J$: kolaps

$R > R_J$: Stabilnost

Če maso:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\alpha G M \mu m_H}{3c^2} \right)^3}$$

$$\Rightarrow M^2 \leq \left(\frac{3c^2}{4\pi} \right)^3 \cdot \frac{1}{(\alpha G \mu m_H)^3} \frac{1}{\bar{\rho}}$$

$$\Rightarrow M \leq \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{3}{\alpha} \right)^{3/2} \left(\frac{c^2}{G \mu m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\bar{\rho}}} \approx 10^5 \frac{T^{3/2}}{\sqrt{n}} M_\odot$$

Če je $M < M_J$: Stabilnost

$M > M_J$: kolaps

HII $T \sim 10^4 \text{ K}$
 $n \sim 10^7 - 10^8 \text{ m}^{-3}$ $\rightarrow M_J = 3,1 \cdot 10^2 M_\odot$

HI $T \sim 50 - 100 \text{ K}$
 $n \sim 10^5 \text{ m}^{-3}$ $\rightarrow M_J = 3,1 \cdot 10^5 M_\odot$

H₂ $T \sim 10$
 $n \sim 1 - 3 \cdot 10^8 \text{ m}^{-3}$ $\rightarrow M_J = 316 M_\odot$

Rjave pritlikarke in planeti

Spodnja masa Zvezd $\sim 0,08 M_{\odot}$

Fragmenti, pa se lahko ~~na~~ dosežejo še nižje mase. Dobimo še manjše strukture. To so rjave pritlikarke.

Plasma

What is a plasma?

- a quasi-neutral gas

⋮

Plasmas in the Universe

- Earth and other planets ionosphere and magnetosphere
- Stars atmospheres and winds.

Solarwind plasma $\delta = 10^{-22} \text{ m}^2$

Nuclear cross-section $\delta = 10^{-28} \text{ m}^2$