

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Naključni sprehodi

2. naloga pri Matematično-fizikalnem praktikumu

Avtor: Marko Urbanč (28191096)
Predavatelj: prof. dr. Borut Paul Kerševan

20.10.2021

Kazalo

1	Uvod	2
2	Naloga	3
3	Opis reševanja	3
4	Rezultati	7
4.1	$\gamma(\mu)$ za polete	7
4.2	$\gamma(\mu)$ za sprehode	8
4.3	Komentarji in izboljšave	9
	Literatura	10

1 Uvod

Metode *Monte Carlo* so razred računalniških algoritmov, ki pridejo do numeričnih rezultatov preko naključnega vzorčenja. V fiziki se pogosto uporabljajo za veliko različnih simulacij sistemov kot so kapljevine, celične strukture itd. Sicer pa so v splošnem koristne pri numerični integraciji in modeliranju pojavov, ki imajo veliko nedoločenosti pri vhodnih parametrih (primer izračun rizika pri poslu).

Pri naključnem vzorčenju uporabljamo generatorje psevdonaključnih števil (ang. *Pseudorandom number generator*). Številke, ki nam jih dajo ti generatorji, niso resnično naključne. Število je popolnoma določeno z začetnimi vrednostmi generatorja. Običajno sta te začetni vrednosti seed in prejšnja vrednost. Seed pa ima lahko zares naključna števila. Dobimo jih lahko preko vzorčenja raznega termičnega šuma ali podobnih naključnih naravnih pojavov. Ker je potem seed naključen, so tudi števila, ki nam jih da generator, bolj za res naključna.

Simuliramo naključne sprehode, kar lahko počnemo na dva načina. Pri prvem, ki ga imenujejo Lévyjev polet oz. *flight*, gledamo, da vsak korak traja enako dolgo, medtem ko se hitrost med koraki zelo spreminja. Drugi način pa je Lévyjev sprehod oz. *walk*, kjer imamo hitrost gibanja konstantno, torej koraki različno dolgo časa trajajo. Čas trajanja i -tega koraka lahko zapišemo kot

$$t_i = l_i v$$

kjer je v konstantna hitrost gibanja in l_i dolžina i -tega koraka.

Z naključnimi sprehodi simuliramo difuzijo [1]. Zanimivo je opazovati naključne sprehode, pri katerih dovolimo nadpovprečno dolge korake. Verjetnostno gostoto porazdelitve zapišemo kot

$$p(l) \propto l^{-\mu}, \quad (1)$$

kjer je $1 < \mu < 3$. Tedaj postane drugi moment porazdelitve

$$\langle l^2 \rangle = \int l^2 p(l) dl$$

neskončen. Govorimo o anomalni difuziji, prisotni pri celi družini kinematičnih distribucij dolžin poti z "debelimi repi".

Pri anomalni difuziji razmazanost (varianca) velike množice končnih leg naključnih sprehodov narašča z drugačno potenco časa. Velja $\sigma^2(t) \sim t^\gamma$, kjer je

$$\begin{aligned} 1 < \mu < 2, & \quad \gamma = 2 & \quad (\text{balistični režim}), \\ 2 < \mu < 3, & \quad \gamma = 4 - \mu & \quad (\text{super-difuzivni režim}), \\ \mu > 3, & \quad \gamma = 1 & \quad (\text{normalna difuzija}). \end{aligned}$$

Za $\mu = 2$ pričakujemo $\sigma^2(t) \sim t^2 / \ln t$, za $\mu = 3$ pa $\sigma^2(t) \sim t \ln t$

Slika je nekoliko drugačna pri opazovanju naključnih poletov. Spet vzamemo zvezo $\sigma^2(t) \sim t^\gamma$ in dobimo odvisnosti

$$\begin{aligned} 1 < \mu < 3, & \quad \gamma = \frac{2}{\mu - 1} & \quad (\text{super-difuzivni režim}), \\ \mu > 3, & \quad \gamma = 1 & \quad (\text{normalna difuzija}). \end{aligned}$$

Pri $\mu = 2$ očitno pričakujemo $\sigma^2(t) \sim t^2$, torej balistični režim.

2 Naloga

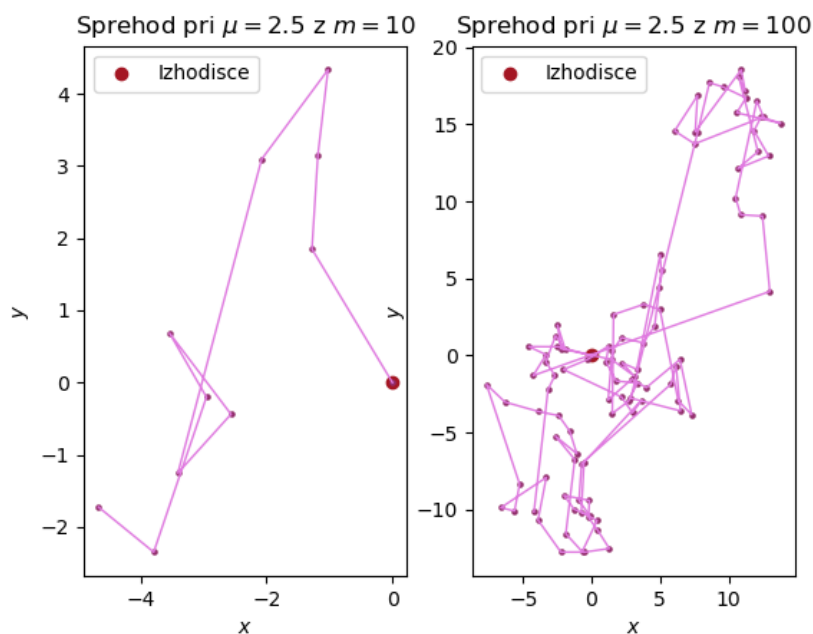
Pri nalogi moramo napraviti računalniško simulacijo dvorasežne hoje za **polete in sprehode**. Vedno začnemo v izhodišču ($x = y = 0$). Nadaljne lege določimo preko rekurzivne zveze

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + l \cos \phi, \\y_{n+1} &= y_n + l \sin \phi,\end{aligned}$$

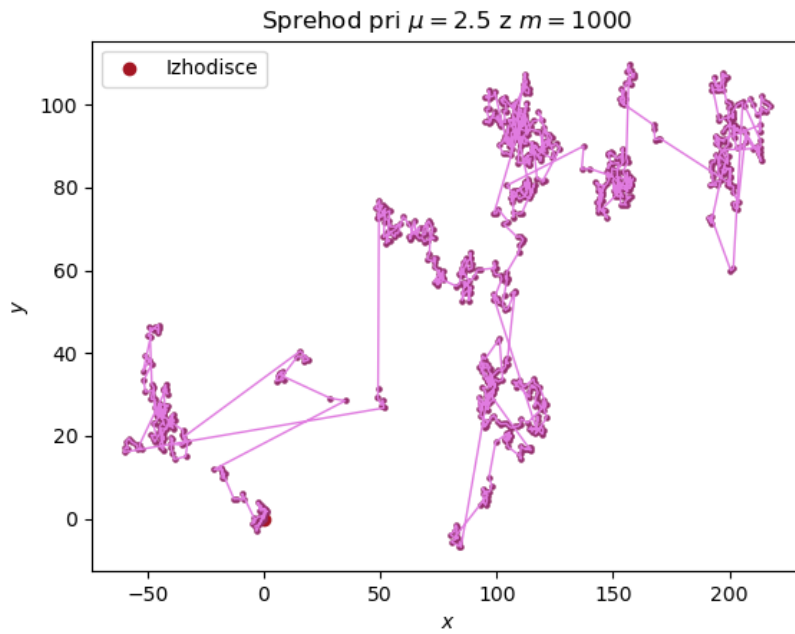
kjer je ϕ enakomerno naključno porazdeljen na intervalu $[0, 2\pi]$ in l , ki je potenco naključno porazdeljeno število, porazdeljeno v skladu z [1]. Narisati moramo nekaj značilnih slik sprehodov za 10, 100, 1000 in 10000 korakov in preveriti, če veljajo prej naštete napovedi za potenco γ .

3 Opis reševanja

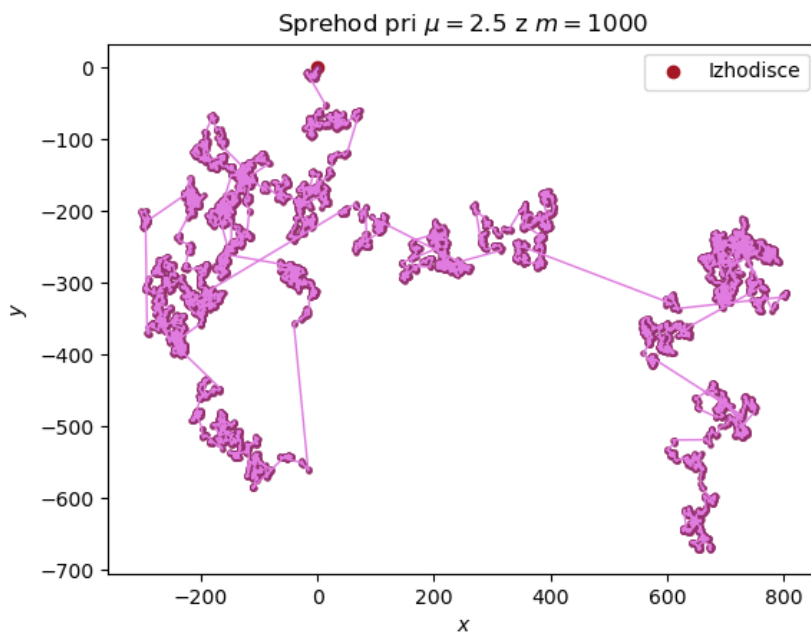
Problema sem se lotil v Pythonu, kjer sem si veliko pomagal z knjižnicama NumPy in SciPy. Za generacijo naključnega števila ϕ sem uporabil z 2π pomnožen `np.random.uniform()`. Število l pa sem generiral z `np.random.pareto()`. Napisal sem si funkciji, ki generirata naključne sprehode in naključne polete. Pri korakih lahko določimo hitrost. Pri poletih pa čas trajanja enega koraka. Seveda lahko izberemo pri obeh število korakov m .



Slika 1: Značilna sprehoda za $m = 10$ in $m = 100$



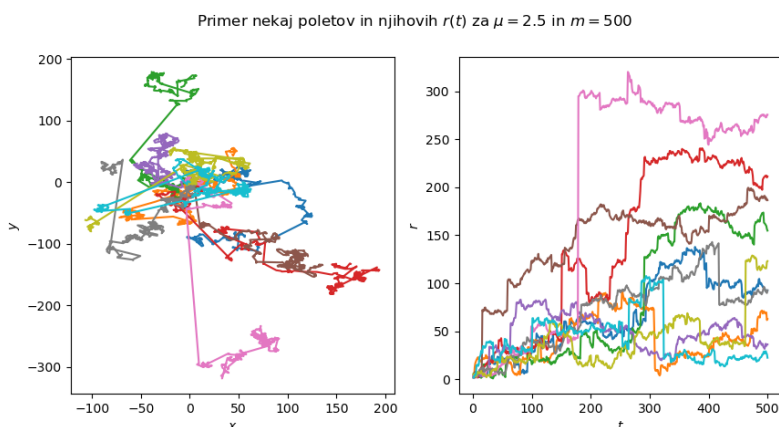
Slika 2: Značilen sprehod za $m = 1000$



Slika 3: Značilen sprehoda za $m = 10000$

Pri večjem številu korakov se jasno vidi, da vseeno obstaja neka možnost, da v enem koraku zelo daleč poskočimo. To je seveda odvisno od μ . Večji kot bo, manj je to verjetno. Narisal sem še nekaj primerov poletov in graf njihove oddaljenosti od izhodišča v odvisnosti od časa, kjer je oddaljenost izračunana preprosto kot

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} .$$



Slika 4: Primeri poletov pri $m = 500$ in $\mu = 2.5$

Nato sem se lotil računanja σ^2 oddaljenosti od izhodišča. Zaradi težav z konvergenco standardnega načina računanja σ^2 sem uporabil

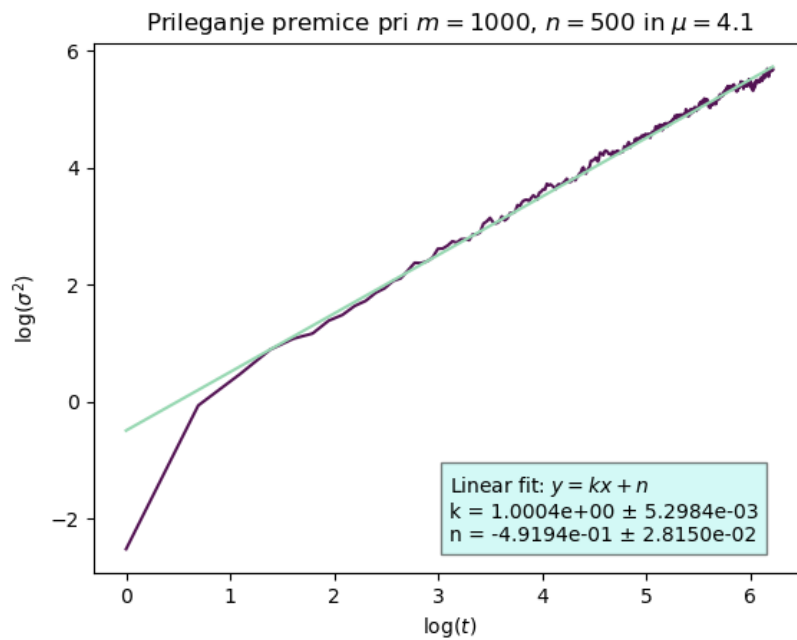
$$\sigma^2 = (\text{MAD}/0.67449)^2$$

kjer je MAD "median absolute deviation"

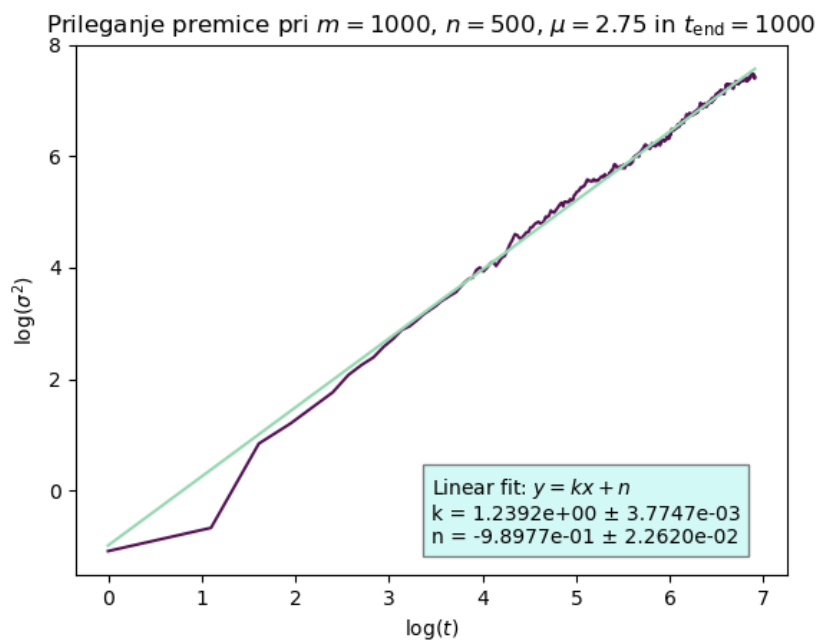
$$\text{MAD} \equiv \text{median}_i (|X_i - \text{median}_j X_j|)$$

in sem ga izračunal s pomočjo vgrajene funkcije v programskem paketu SciPy.

Napisal sem funkcijo, ki izvede več poskusov poletov ali sprehodov. Razmazanost oddaljenosti od izhodišča računamo za vse poskuse ob enakem času. Ker se vsi koraki pri poletih zgodijo ob enakem času, pri njih ni problema in samo gledamo oddaljenosti pri zaporednih korakih. Pri sprehodih pa sem si pomagal z linearno interpolacijo, da sem določil oddaljenosti ob nekih vnaprej določenih časih, za vse poskuse. Na log-log grafu sem potem podatkom prilagodil premico, katere strmina je ravno γ . To sem naredil s pomočjo funkcije iz SciPy. Za namen interpolacije korakov je za sprehode treba določiti tudi parameter t_{end} , ki je končni čas, do katerega interpoliramo izražen v arbitrarnih enotah časa. Za primer kako opisan postopek deluje za polete sem narisal dve taki prilagoditvi [Sliki 5, 6].



Slika 5: Fit premice za polete pri $n = 1000$, $m = 500$ in $\mu = 4.1$

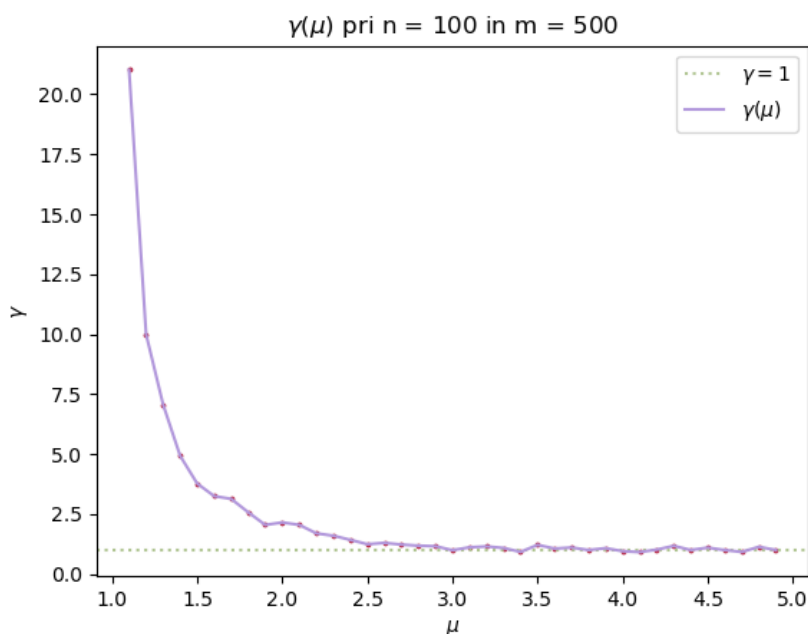


Slika 6: Fit premice za sprehode pri $n = 1000$, $m = 500$, $\mu = 2.75$ in $t_{\text{end}} = 1000$

4 Rezultati

Zdelo se mi je zanimivo, da bi narisal graf $\gamma(\mu)$ zato sem spisal funkcijo, ki izvede ta postopek prilaganja krivulje pri nekemu μ in si spravi naklon premice na log-log grafu. Kot glavni rezultat naloge, sem se odločil predstaviti omenjena grafa $\gamma(\mu)$.

4.1 $\gamma(\mu)$ za polete

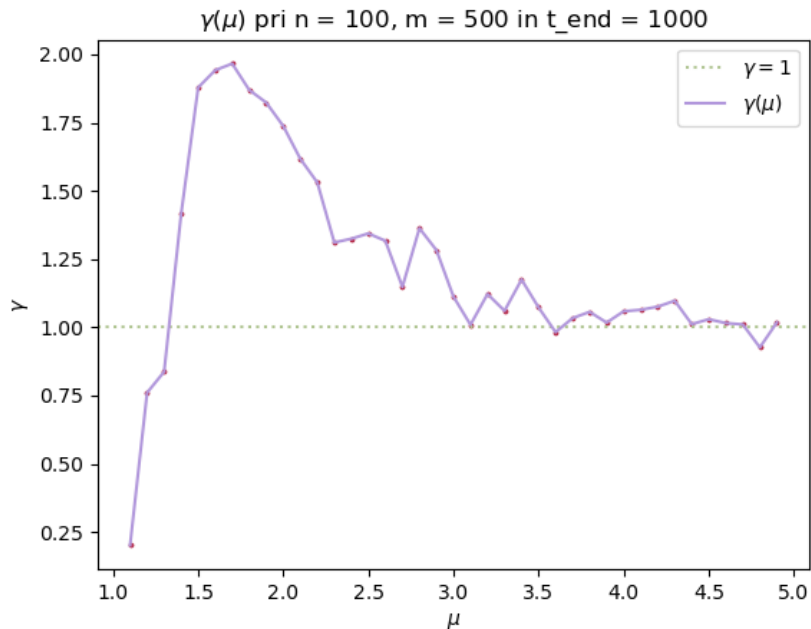


Slika 7: Graf $\gamma(\mu)$ za polete pri $n = 100$ in $m = 500$

Potenca γ se ujema s tistim kar smo pričakovali. Na območju $1 < \mu < 3$ res dobimo odvisnost potence kot približno $\gamma = \frac{2}{\mu-1}$, torej smo v super-difuzivnem režimu. Približno pravim, ker imamo žal še vedno neko odstopanje od prave vrednosti zaradi malega števila poskusov. Bolje bi bilo, če bi računalniku pustil, da računa dlje in mu nastavil število poskusov n na 1000 ali pa celo 10000. Vrednost potence bi divergirala za $\mu = 1$ in to tudi nakazuje graf, ki sem ga ravno zaradi razloga divergencence začel računati pri $\mu = 1.1$. Funkcija pa nato po enakomernih korakih večja μ in prilega premice, kot opisano prej. Smiselno bi bilo, da bi v območju, ko gre $\mu \rightarrow 1$, bolj na gosto računal vrednosti γ . Tako bi bila krivulja tam bolj natančna.

Spet kot pričakovano vrednosti potence za $\mu > 3$ res lezejo proti 1 in smo v režimu normalne difuzije. V okolici $\mu = 2$ tudi res dobimo $\gamma \approx 2$, kar ustreza balističnemu režimu.

4.2 $\gamma(\mu)$ za sprehode



Slika 8: Graf $\gamma(\mu)$ za sprehode pri $n = 100$, $m = 500$ in $t_{\text{end}} = 1000$

Tu dobimo nekoliko nepričakovan rezultat na okolici $1 < \mu < 1.5$. Želeli bi si, da smo v balističnem režimu in torej naj bi bil $\gamma = 2$, kar sicer potem velja za $1.5 < \mu < 2$. Zanimiv pa je ta skok na začetku. Sprašujem se, če bi več poskusov to težavo odpravilo. Po večkrat ponovljenem računu pri istih parametrih, so se vsakič pojavile takšne lastnosti, torej ta porast ni nekaj, kar bi bila posledica naključnosti simulacije.

Naprej pa se vede γ kot pričakovano z pričakovanim odstopanjem od čisto pravih vrednosti, kar bi tako kot prej popravili z večjim številom poskusov. Na območju $2 < \mu < 3$ se potencia res vede približno kot $\gamma = 4 - \mu$, kar ustreza super-difuzivnemu režimu. Za $\mu > 3$ pa ustrezno za normalni režim difuzije potencia leze proti 1.

4.3 Komentarji in izboljšave

Večino komentarjev ugotovitev sem podal že sproti. Zagotovo bi lahko grafa $\gamma(\mu)$ izboljšal, če bi nastavljal število poskusov na več. Nekoliko me je sicer omejeval čas, ker je že ob teh parametrih Python porabil slabe 10 minut za izračun takšnega grafa. Nekoliko nenavaden mi je pojav tistega porasta γ za sprehode na območju $1 < \mu < 1.5$. Ne znam razložiti, zakaj je prišlo do tega. Dodatek, ki sem si ga močno želel narediti, a mi je zmanjkalo časa, je animacija variance oddaljenosti. Mogoče je to nekaj, kar bi lahko naknadno čisto iz radovednosti naredil.

Literatura

- [1] Eric R. Weeks and Harry L. Swinney. Random walks and lévy flights observed in fluid flows, 1998.