

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



# Reševanje PDE z metodo Galerkina

11. naloga pri Matematično-fizikalnem praktikumu

**Avtor:** Marko Urbanč (28191096)  
**Predavatelj:** prof. dr. Borut Paul Kerševan

8.9.2023

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Naloga</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Opis reševanja</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Rezultati</b>	<b>4</b>
4.1	Bazne funkcije . . . . .	4
4.2	Koeficient $C$ in pretok . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Komentarji in izboljšave</b>	<b>9</b>

# 1 Uvod

Če poznamo lastne funkcije diferencialnega operatorja za določeno geometrijo, se reševanje parcialnih diferencialnih enačb včasih lahko prevede na razvoj po lastnih funkcijah. V tem primeru se lahko diferencialni operator zapiše kot matrika in enačbo potem rešujemo kot sistem linearnih enačb. Tega lahko računamo kot vemo in znamo. Zdaj smo to počeli že parkrat.

V našem primeru bo fizikalna inspiracija Navier-Stokesova enačba, ki je pravzaprav drugi Newtonov zakon za tekočine. Vendar pa je ta enačba zelo zapletena in je še vedno odprt problem, ali sploh obstajajo rešitve v splošnem. Zato se bomo omejili na preprostejši primer, kjer privzamemo, da imamo enakomeren laminaren tok nestisljive tekočine v dolgi ravni cevi pod vplivom stalnega tlačnega gradienta  $p'$ . V tem primeru se Navier-Stokesova enačba poenostavi na Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 \vec{v} = -\frac{p'}{\eta}, \quad (1)$$

kjer je  $\vec{v}$  hitrost tekočine in  $\eta$  njena viskoznost. Enačbo rešujemo v notranjosti preseka cevi, medtem ko je ob stenah hitrost enaka nič. Za pretok velja Poiseuillov zakon

$$\Phi = \int_S v \, dS = C \frac{p' S^2}{8\pi\eta}, \quad (2)$$

kjer je  $S$  presek cevi in  $C$  konstanta, ki je odvisna od oblike preseka. Konstanta znaša  $C = 1$  za krožni presek. V našem primeru pa bomo določili konstanto  $C$  pa polkrožni presek. Uvedemo nove spremenljivke  $\xi = r/R$  in  $u = v\eta/(p'R^2)$  in nato se problem glasi

$$\Delta u(\xi, \phi) = -1, \quad u(1, \phi) = u(\xi, 0) = u(\xi, \pi) = 0, \quad (3)$$

$$C = 8\pi \iint \frac{u(\xi, \phi) \xi \, d\xi \, d\phi}{(\pi/2)^2}. \quad (4)$$

Da se izognemo računanju lastnih funkcij (v temu primeru Besselovih) in njihovih ničel, lahko zapišemo rešitev v obliki razvoja po neki poskuni bazi. V našem primeru bomo vzeli bazo

$$\psi_{nm}(\xi, \phi) = \xi^{2m+1} (1 - \xi)^n \sin((2m + 1)\phi). \quad (5)$$

Z njo lahko zapišemo aproksimacijo rešitve kot linearno kombinacijo

$$\tilde{u}(\xi, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \psi_{nm}(\xi, \phi). \quad (6)$$

Za te funkcije niti ni nujno da so prava baza v smislu, da bi bile ortogonalne druga na drugo. Potrebno je da zadoščajo robnim pogojem tako, da jim bo avtomatično zadoščala tudi linearna kombinacija. Približna funkcija  $\tilde{u}$  seveda ne zadosti Poissonovi enačbi za res, ampak ji preostane majhna napaka  $\varepsilon$

$$\Delta \tilde{u}(\xi, \phi) = -1 + \varepsilon(\xi, \phi). \quad (7)$$

Pri metodi Galerkina zahtevamo, da je napaka ortogonalna na vse poskusne funkcije  $\psi_{nm}$ , torej

$$\langle \psi_{nm}, \varepsilon \rangle = 0 \quad \forall n, m. \quad (8)$$

V splošnem bi lahko zahtevali še ortogonalnost napake na nek drug sistem utežnih funkcij. Metoda Galerkina je poseben primer takih metod (angl. *Methods of Weighted Residuals*), kjer je utežna funkcija kar poskusna funkcija sama. Omenjena izbira vodi do sistema enačb za koeficiente  $a_{nm}$

$$A_{nm,n'm'} a_{n'm'} = b_{nm}. \quad (9)$$

Koeficiente  $b_{nm}$  dobimo iz skalarnega produkta

$$b_{nm} = \langle -1, \psi_{nm} \rangle, \quad (10)$$

ki se zaradi ortogonalnosti poskusnih funkcij poenostavi v

$$b_{nm} = -\frac{2}{2m+1} B(2m+3, n+1), \quad (11)$$

kjer je B Eulerjeva beta funkcija. Matrika  $A$  pa je definirana kot

$$A_{nm,n'm'} = \langle \nabla^2 \psi_{nm}, \psi_{n'm'} \rangle, \quad (12)$$

kar se po upoštevanju ortogonalnosti poskusnih funkcij poenostavi v

$$A_{nm,n'm'} = -\frac{\pi}{2} \frac{nn'(3+4m)}{2+4m+n+n'} B(n+n'-1, 3+4m) \delta_{mm'}. \quad (13)$$

Končno, se naša enačba za koeficient za pretok  $C$  glasi

$$C = -\frac{32}{\pi} \sum_{mn,m'n'} b_{nm} A_{nm,n'm'}^{-1} b_{m'n'}. \quad (14)$$

## 2 Naloga

Naloga od nas zahteva, da rešimo Poissonovo enačbo (3) in izračunamo koeficient za pretok  $C$  v primeru polkrožnega preseka cevi. Naj si tudi pogledamo kako je odvisna natančnost rešitve od števila členov v indeksih  $m$  in  $n$ .

## 3 Opis reševanja

Za reševanje sem prižgal svoj trusty IBM PC/XT 5160 (*beri*: v resnici sem uporabil svoj domači računalnik) in preko božjega čudeža uspel uporabiti Python 3.11.0 kljub temu, da je bil ta napisan šele leta 2023. Uporabil sem standardni nabor paketov za znanstveno računanje, torej `numpy`, `scipy` in `matplotlib`.

Naloge sem se lotil kot zadnjih dveh nalog, kjer smo tudi reševali parcialne diferencialne enačbe, le na druge načine. Ne vem če je res smiselno ponavljati iste razloge zakaj uberem takšno metodo reševanja. Več naj bi bilo eventually dostopno na spletu na moji strani. Napisal sem razred `GalerkinObject` (da

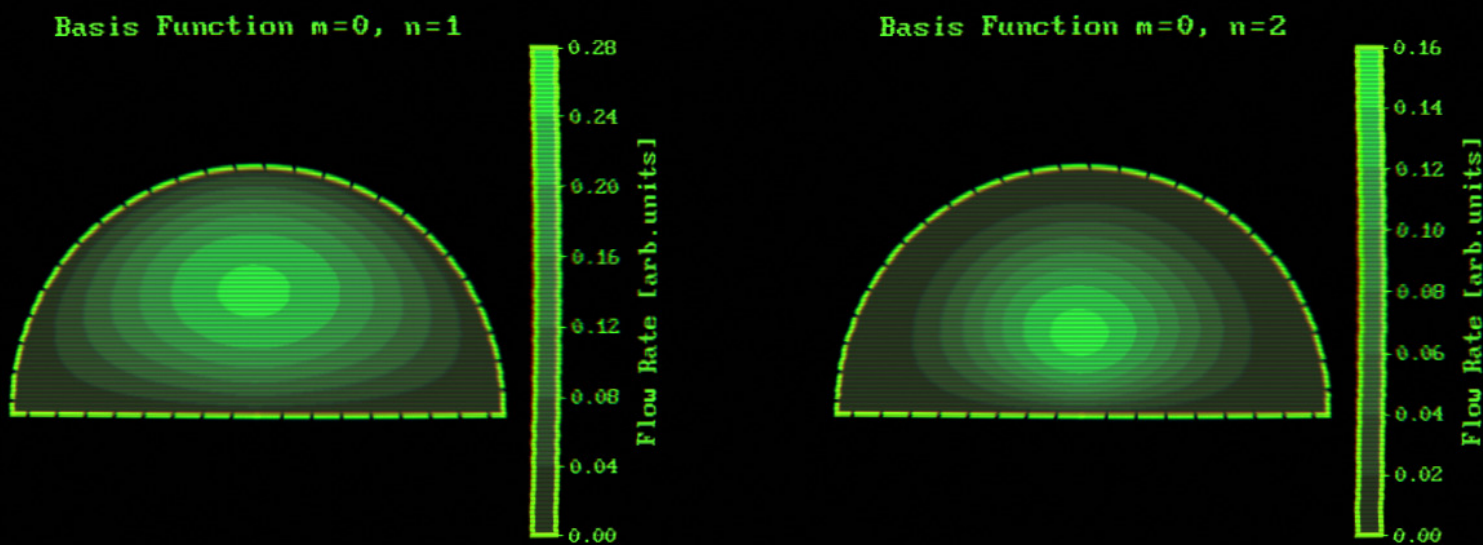
ni stalno Solver) v katerem je vsebovano vse kar potrebujemo za reševanje. Ob kreaciji novega `GalerkinObjekt`-a uporabnik poda, kolikšno naj bo število členov v indeksih  $m$  in  $n$ . Ostalo pa se ob klicanju metode `solve()` izračuna samodejno. Imel sem izbiro, da bi lahko uporabil za matrične sisteme kar `numpy`-jeve funkcije, ampak se mi je zdelo dovolj preprosto, da sem kar sam napisal funkcije za reševanje sistema.

## 4 Rezultati

Glede na to, kako se mi, zaradi lastnih napak, mudi z oddajo se mi zdi najbolj smiselno, da gremo kar takoj na rezultate.

### 4.1 Bazne funkcije

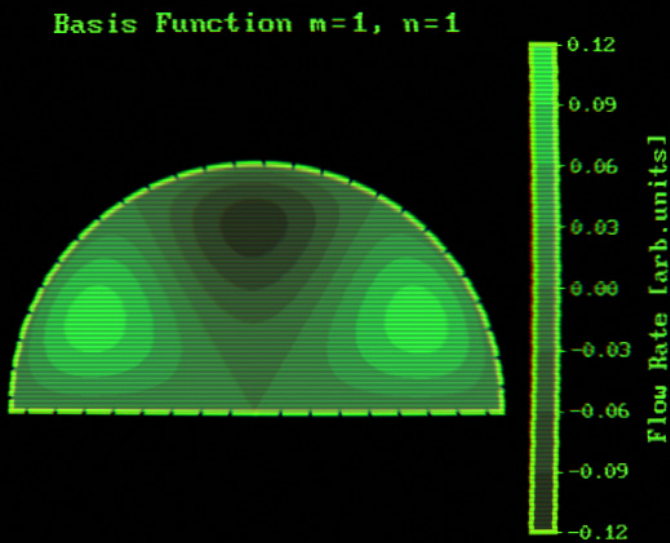
Najprej si pogledajmo kako izgledajo bazne funkcije. Kar se tiče  $\xi$  in  $\phi$  mreže sem uporabil v obeh primerih 1000 točk v vsaki smeri. V  $\xi$  smeri sem vzel interval  $[0, 1]$  v  $\phi$  smeri pa  $[0, \pi]$ . Spodaj je prikazanih nekaj baznih funkcij za različne  $m$  in  $n$ . Opazimo, da večanje  $m$  povečuje število nekih tokovih kanalov porazdeljenih po  $\phi$  smeri. Večanje  $n$  pa centrirano funkcijo potiska vedno bolj proti spodnjemu ravnemu robu cevi. Definitely sem narisal te grafe na IBM PC/XT 5160.. yes.



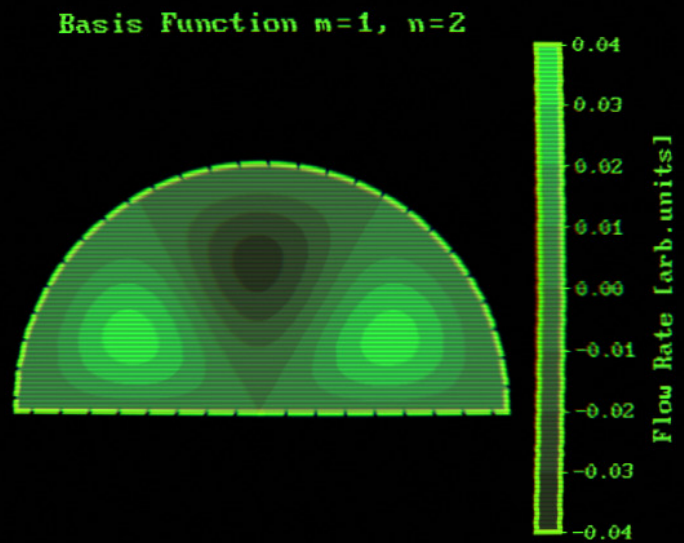
Slika 1:  $\psi_{01}$

Slika 2:  $\psi_{02}$

Slika 3: Bazne funkcije za  $m = 0$  in  $n = 1$  ter  $n = 2$ .

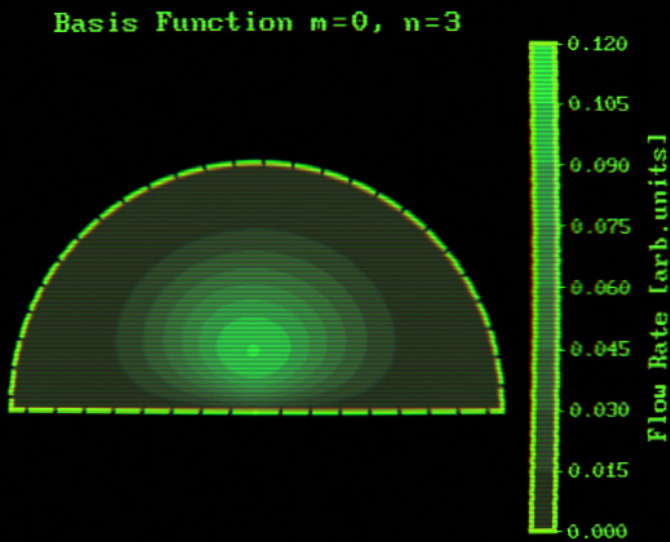


Slika 4:  $\psi_{11}$

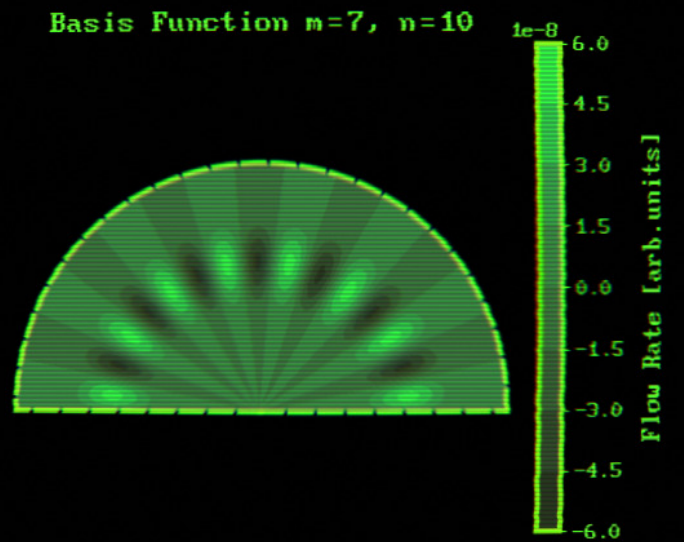


Slika 5:  $\psi_{12}$

Slika 6: Bazne funkcije za  $m = 1$  in  $n = 1$  ter  $n = 2$ .



Slika 7:  $\psi_{03}$

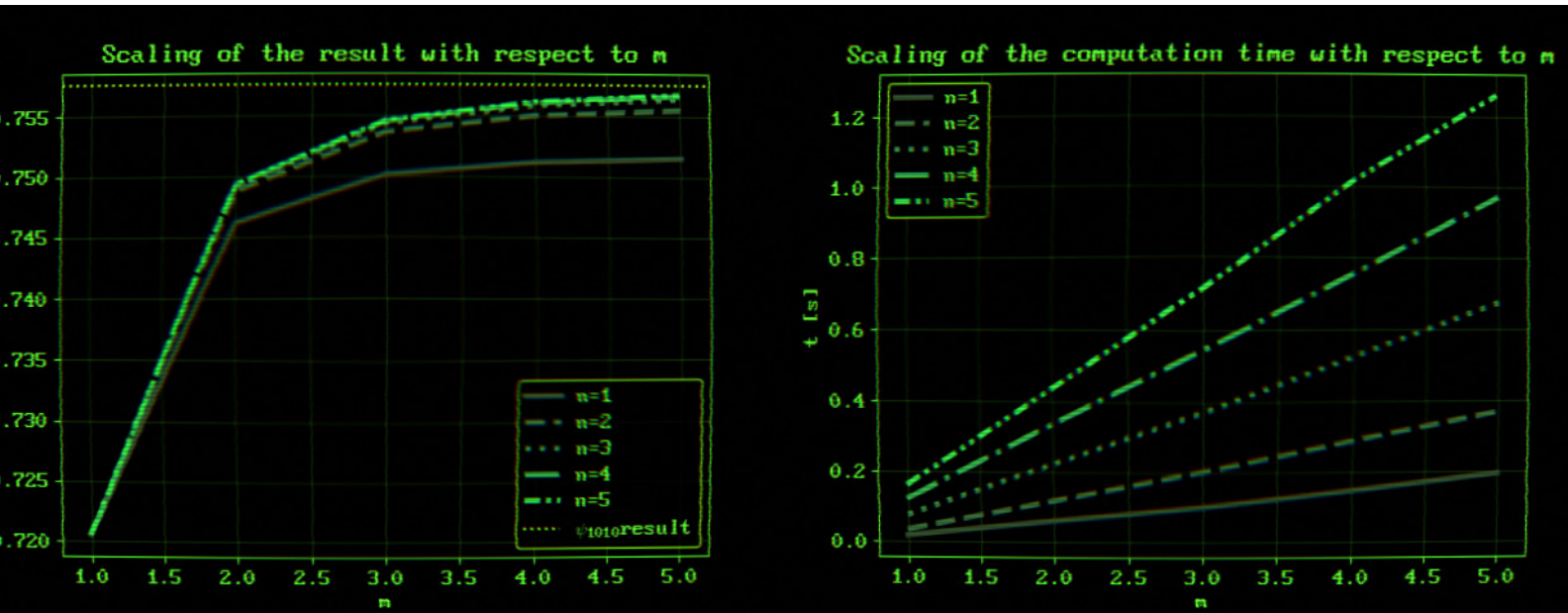


Slika 8:  $\psi_{710}$

Slika 9: Bazne funkcije za  $m = 0, n = 3$  in  $m = 7$  ter  $n = 10$ .

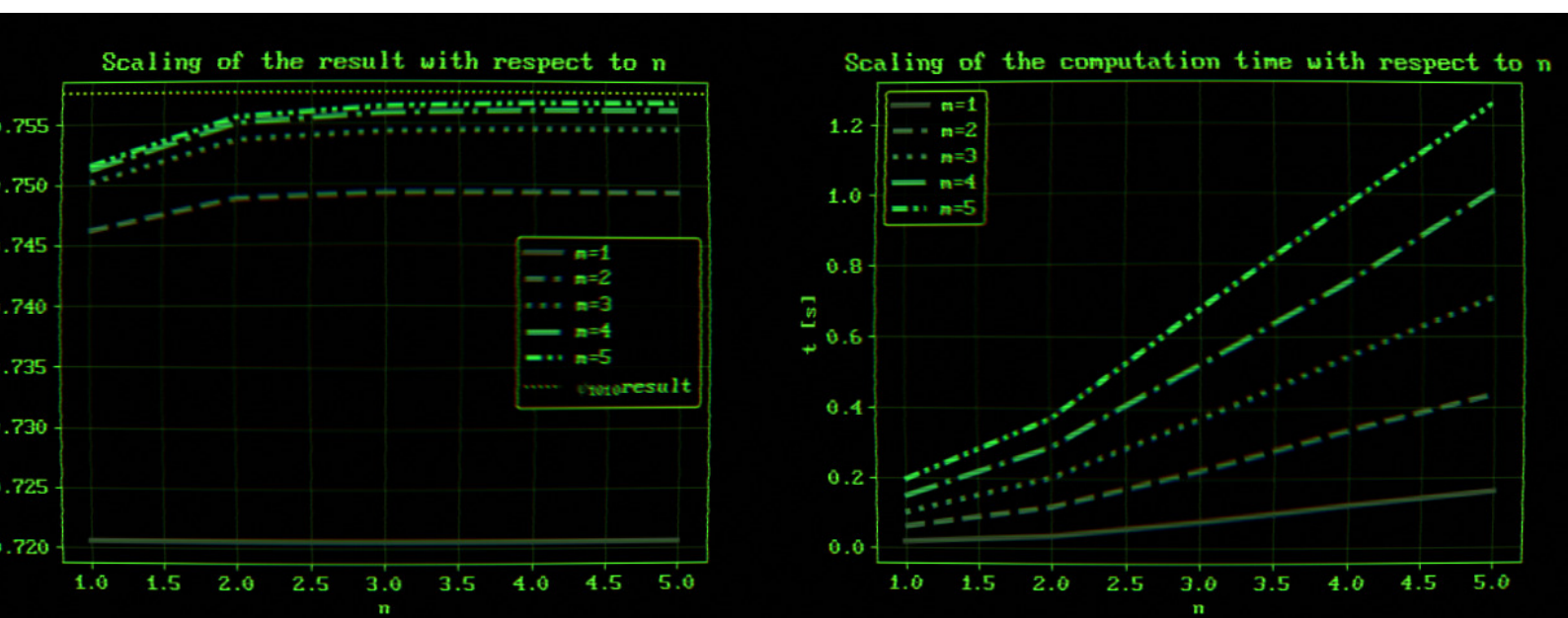
## 4.2 Koeficient $C$ in pretok

Sedaj si pogledimo kako je odvisen koeficient  $C$  od števila členov v indeksih  $m$  in  $n$ . Kar se tiče  $\xi$  in  $\phi$  mreže sem uporabil takšno kot prej. Za izračun koeficienta  $C$  sem uporabil enačbo (14).



Slika 10: Skaliranje koeficienta  $C$  in časa računanja z  $m$ .

Očitno neka srednja vrednost  $m$  zelo pripomore k izboljšavi rezultata. Na grafu je narisana primer za  $\psi_{1010}$  kot primerjalna vrednost za  $C$ . Čas računanja je očitno linearno odvisen od  $m$ ,  $n$  pa določa strmino premice. Vrednosti se asimptotsko približujejo neki vrednosti z večanjem  $m$ . Sklepam, da je to najbrž prava vrednost  $C$ .

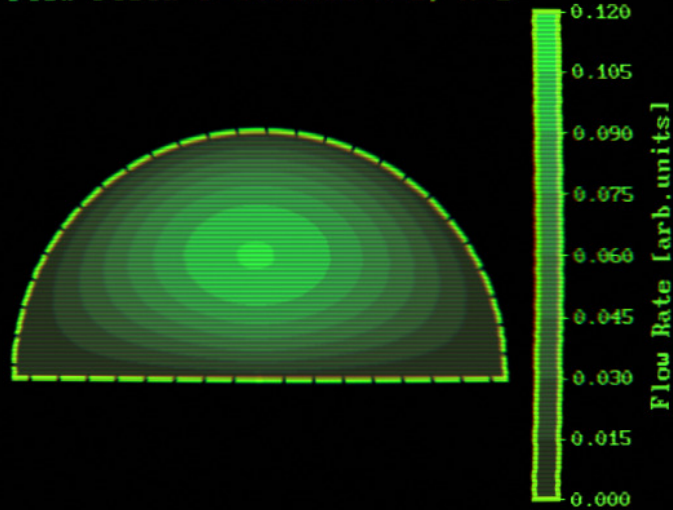


Slika 11: Skaliranje koeficienta  $C$  in časa računanja z  $n$ .

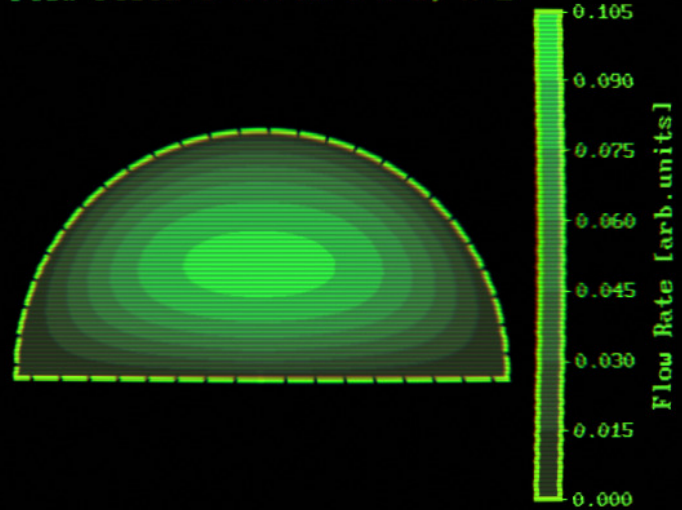
Zanimivo je, da  $n$  precej drastično vpliva na vrednost  $C$ . Določi kot stopnica, kje bo vrednost  $C$  asimptotsko konvergirala, ampak po nekaj členih ne kaže, da bi se vrednost kaj veliko spreminjala, kar pomeni, da pridemo hitro do rezultata. To vse je precej smiselno, še sploh bo zdaj, ko si pogledamo tokovna polja, ki so zelo podobi (a ne enaki) kot bazne funkcije za  $m = 0$  in različne  $n$ . Verjetno te prispevajo glavnino k pretoku. Poglejmo še tokovna polja



Flow Field C=0.72051 M=1, N=1

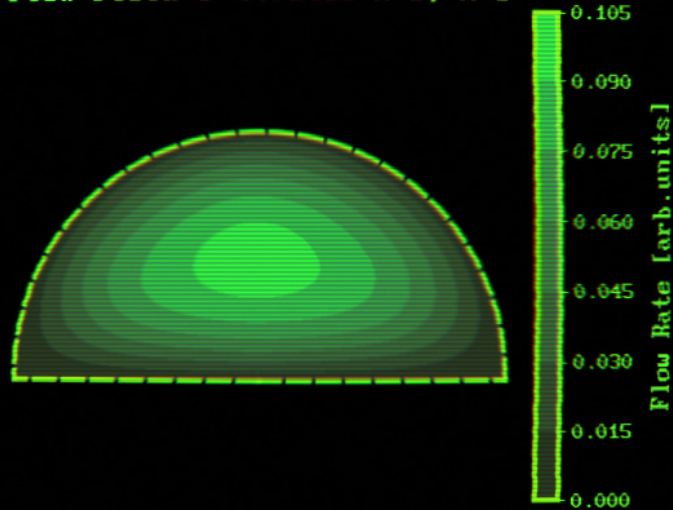


Flow Field C=0.74874 M=2, N=2

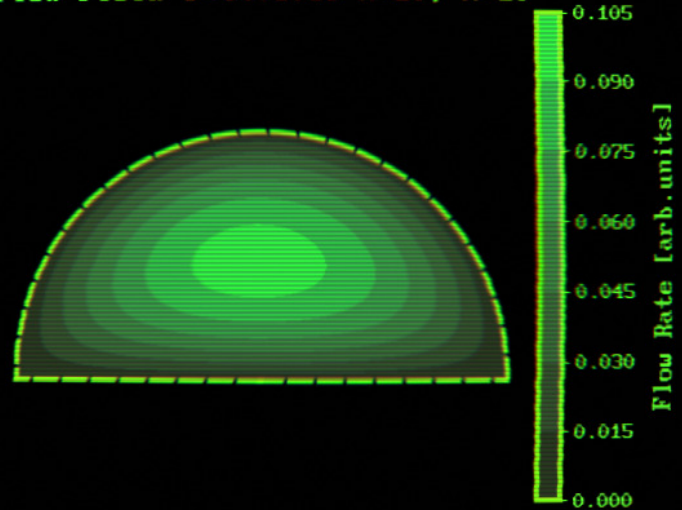


Slika 12: Tokova polja za  $1 \times 1$  in  $2 \times 2$  bazo.

Flow Field C=0.75433 M=3, N=3



Flow Field C=0.75759 M=10, N=10



Slika 13: Tokova polja za  $3 \times 3$  in  $10 \times 10$  bazo.

Kot pričakovano se z večanjem baze rezultat izboljšuje. Pri  $10 \times 10$  bazi imamo že res lepo prikazano tokovno polje. Za praktične namene pa je zdaj pravzaprav odvisno od uporabnika in njegove željene natančnosti. Za natančnost na 2 decimalni mesti je dovolj že  $3 \times 3$  baza. Za kaj več bi bilo pa treba ugotavljati

naprej. Največja vrednost baze za katero sem jaz računal je bila  $10 \times 10$ , to je seveda ker sem na IBM PC/XT 5160 računal in definitivno ne zaradi tega, ker bi se mi mudilo z oddajo. Dobil sem končno vrednost nekje

$$C = 0.7576 . \tag{15}$$

## 5 Komentarji in izboljšave

Naloga je bila precej zabavna kljub vsemu hitenju zaradi roka oddaje. Med računanjem sem se spomnil navdiha za theme plot-ov in upam, da je vam bralcu všeč. Sem poskusil uravnotežiti med tem, da zgleda avtentično, lepo in berljivo in da ne porabim ogromno časa, ker ga nimam. Definitivno bi poskusil več primerjav narediti, še sploh za večje baze. Mogoče bi bilo smiselno pogledati kakšne residume, kaj pa vem. No ja, upam, da je bilo branje dokaj prijetno in da so bile slike a trip down memory lane in ne kot annoyance.